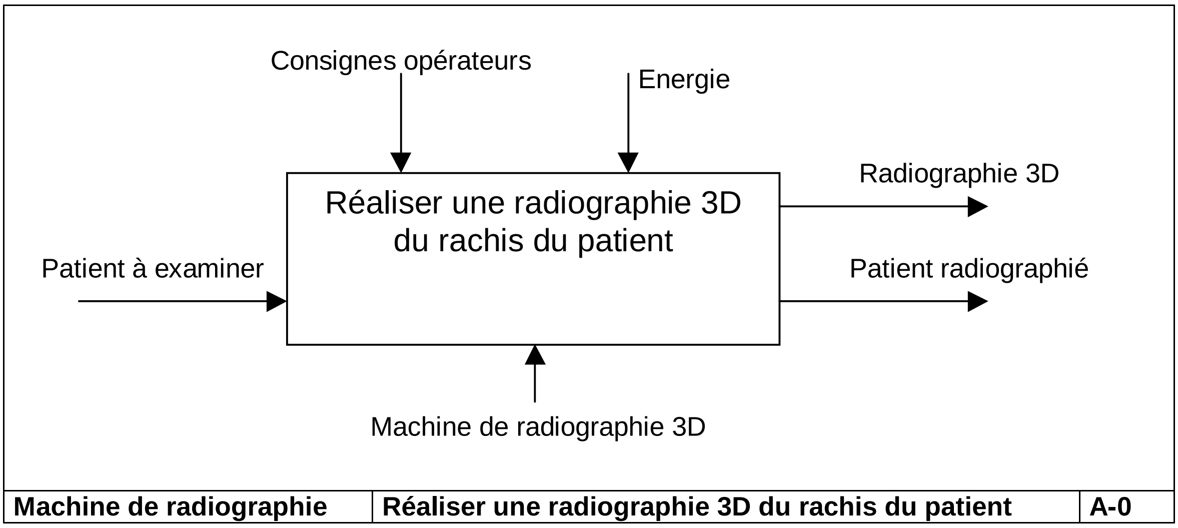
MACHINE DE RADIOGRAPHIE EN TROIS DIMENSIONS.

(Selon le concours MT 1997)

Analyse fonctionnelle de la machine.

Question 1 : *Établir l'actigramme relatif à la fonction globale de la machine de radiographie en trois dimensions.*



Question 2 : *Completer le diagramme relatif à la fonction globale en indiquant un seul niveau de décomposition de cette fonction et les moyens techniques associés.*

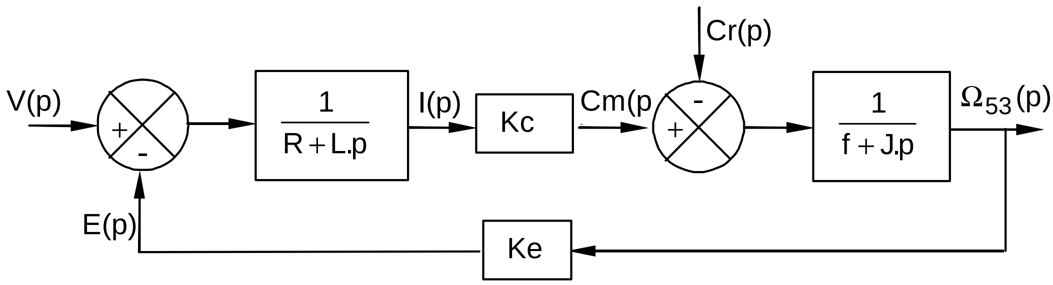
Fonction globale	Fonctions composantes	Moyens techniques
Réaliser une radiographie 3D du rachis du patient	Présenter le patient à hauteur	Plate-forme réglable en hauteur
	Amener le patient au plus près	Système de translation
	Maintenir le patient	Dispositif de maintient
	Réaliser la prise de vue	Appareil de prise de vue
	Faire tourner de 90°	Plateau tournant
	Construire l'image 3D	Station de travail

Étude de l'asservissement du sous-ensemble de rotation.
1/ Étude du moteur seul.

Question 3 : *Les conditions initiales étant nulles, écrire les transformées de Laplace des équations (1) à (4) numérotées (1') à (4').*

- Loi d'Ohm dans le circuit d'induit : $V(p) = E(p) + R.I(p) + L.p.I(p)$ (1)
- Équations de l'électromagnétisme dans le moteur : $E(p) = K_e.\Omega_{53}(p)$ (2)
  $C_m(p) = K_c.I(p)$ (3)
- Équation de la dynamique de l'arbre moteur : $C_m(p) - C_r(p) - f.\Omega_{53}(p) = J.p.\Omega_{53}(p)$ (4)

Question 4 : *Mettre le système sous la forme du schéma-bloc suivant.*
(On précisera les différentes fonctions de transfert des différents blocs).



NB : CE SCHEMA-BLOC NE REPRESENTE PAS UN SYSTEME ASSERVI
MAIS SEULEMENT LA MODELISATION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU.
LA BOUCLE DE RETOUR N'EST PAS UNE BOUCLE D'ASSERVISSEMENT.

Question 5 : *Exprimer de façon littérale* $\Omega_{53}(p)$ *en fonction de* $V(p)$ *pour* $Cr(p) = 0$ *(sans perturbation).*
Exprimer de façon littérale $\Omega_{53}(p)$ *en fonction de* $Cr(p)$ *pour* $V(p) = 0$.
En déduire l'expression de $\Omega_{53}(p)$ *en fonction de* $V(p)$ *et* $Cr(p)$ *(superposition des deux entrées).*

$$\left.\frac{\Omega_{53}}{V}\right|_{Cr=0} = \frac{\frac{1}{R+Lp}.K_c.\frac{1}{f+Jp}}{1+K_e.\frac{1}{R+Lp}.K_c.\frac{1}{f+Jp}} = \frac{K_c}{(R+Lp)(f+Jp)+K_e.K_c} = \frac{\frac{K_c}{Rf+K_eK_c}}{1+\frac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}.p+\frac{LJ}{Rf+K_eK_c}.p^2} = F1(p)$$

$$\left.\frac{\Omega_{53}}{C_r}\right|_{U=0} = \frac{-\frac{1}{f+Jp}}{1-\frac{1}{f+Jp}.K_e.(-1).\frac{1}{R+Lp}.K_c} = \frac{-(R+Lp)}{(R+Lp)(f+Jp)+K_e.K_c} = \frac{\frac{-R}{Rf+K_eK_c}(1+\frac{L}{R}.p)}{1+\frac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}.p+\frac{LJ}{Rf+K_eK_c}.p^2} = -F2(p)$$

$$\Omega_{53}(p) = F1(p)V(p) - F2(p)C_r(p)$$

2/ Étude du réducteur seul.

Question 6 : *Déterminer en fonction de* r_1 *et* r_2 *la fonction de transfert* $H_R(p)$ *du réducteur de vitesse constitué du train planétaire R1 et de l'engrenage de sortie R2.*

$$\Omega_{43}(p) = \Omega_{53}(p).r_1.r_2 \qquad \Rightarrow \qquad H_R = \frac{\Omega_{43}(p)}{\Omega_{53}(p)} = r_1.r_2$$

3/ Étude du système complet (moteur + réducteur) non perturbé : Cr(p)=0.

Question 7 : *Déterminer la fonction de transfert* $H(p)$ *de l'ensemble moteur + réducteur de vitesse.*

On a $$\left.\frac{\Omega_{53}}{V}\right|_{Cr=0} = \frac{\dfrac{K_c}{Rf+K_eK_c}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}.p+\dfrac{LJ}{Rf+K_eK_c}.p^2} \quad \text{et } H_R = \frac{\Omega_{43}}{\Omega_{53}} = r_1.r_2 \ \Rightarrow\ \left.\frac{\Omega_{43}}{V}\right|_{Cr=0} = \frac{\dfrac{K_cr_1r_2}{Rf+K_eK_c}}{1+\dfrac{RJ+Lf}{Rf+K_eK_c}.p+\dfrac{LJ}{Rf+K_eK_c}.p^2}$$

Question 8 : *Déterminer la valeur des paramètres caractéristiques. Conclure.*

$$H(p) = \left.\frac{\Omega_{43}}{V}\right|_{Cr=0} = \frac{62,5}{(p+50)^2+10^4} = \frac{62,5}{p^2+100.p+2500+10^4} = \frac{62,5}{12500+100.p+p^2} = \frac{0,005}{1+0,008.p+0,00008.p^2}$$

K=0,005 rad/s/V

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,00008}} = 112 \quad \text{rad/s}$$

$$z = \frac{112}{2}.0,008 = 0,45 \ \Rightarrow \text{ régime oscillatoire}$$

Question 9 : *Déterminer, selon le cours, la vitesse angulaire atteinte par le plateau en régime permanent, puis retrouver ce résultat par un calcul de limite.*

$$\omega_{43}(+\infty) = K.Ec = 0,005.100 = 0,5 \text{ rad/s}$$

$$v(t) = 100.u(t) \ \Rightarrow\ V(p) = \frac{100}{p}$$

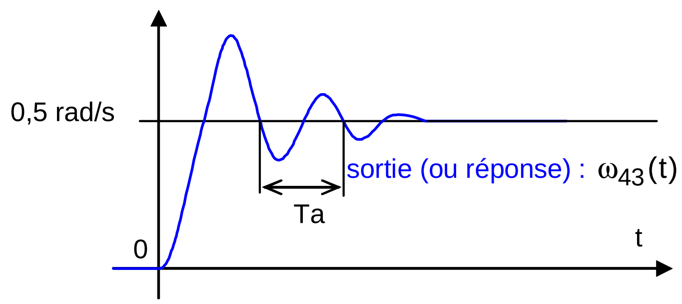
$$\omega_{43}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty}\omega_{43}(t) = \lim_{p\to 0} p.\Omega_{43}(p) = \lim_{p\to 0} p.H(p).V(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{62,5}{(p+50)^2+10^4}.\frac{100}{p} = 0,5 \text{ rad/s}$$

Question 10 : *Selon les abaques situés à la fin du problème, déterminer le temps de réponse à 5%, puis l'amplitude des dépassements supérieurs à 5% (si ils existent).*

$$z=0,45 \ \Rightarrow\ tr5\%.\omega_0 = 5,2 \ \Rightarrow\ tr5\% = \frac{5,2}{112} = 0,046 \text{ s}$$

z=0,45 $\Rightarrow$ D1=17% (D2 n'était pas à mentionner car D2=3,5%)

Question 11 : *Donner l'allure de la réponse* $\omega_{43}(t)$.



Question 12 : *Déterminer algébriquement la réponse* $\omega_{43}(t)$ *à l'entrée échelon.*

$$\Omega_{43}\big|_{Cr=0} = H(p).V(p) = \frac{62{,}5}{(p+50)^2+10^4}.\frac{100}{p} = \frac{6250}{p.\left[(p+50)^2+10^4\right]} = \frac{0{,}5}{p} + \frac{-0{,}5.p-50}{(p+50)^2+10^4}$$

NB : Les racines du polynôme du 2nd degré sont $-50 \pm j.10^2$

Pour trouver les coefficients de la 2ème fraction, on multiplie par $(p+50)^2+10^4$ et on fait tendre p vers une racine, puis on identifie partie réelle et partie imaginaire :

$$\frac{6250}{-50+j.10^2} = D.(-50+j.10^2)+E$$

$$\frac{6250}{50^2+10^4}(-50-j.10^2) = (-50.D+E)+j.10^2.D \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D = \dfrac{-6250}{50^2+10^4} = -0{,}5 \\ E = +50.(-0{,}5)+\dfrac{6250}{50^2+10^4}(-50) = -50 \end{cases}$$

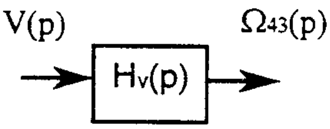
Donc $\Omega_{43}(p)\big|_{Cr=0} = \dfrac{0{,}5}{p} - 0{,}5\dfrac{p+50}{(p+50)^2+10^4} + \dfrac{0{,}5.50-50}{10^2}\dfrac{10^2}{(p+50)^2+10^4}$

$$\boxed{\omega_{43}(t)\big|_{Cr=0} = \left[0{,}5-0{,}5.e^{-50.t}\cos(10^2.t)-0{,}25.e^{-50.t}\sin(10^2.t)\right]u(t)}$$

4/ Étude du système complet asservi en vitesse et non perturbé : Cr(p)=0.

Utilisation d'un correcteur proportionnel.

Question 13 : *Mettre le schéma-bloc précédent sous la forme ci-contre. En déduire la fonction de transfert en boucle fermée du système complet Hv(p) en fonction de Kcor.*



$$H_v = H_R.\frac{H_{cor}.H_{mot}}{1+a.H_{cor}.H_{mot}} = 0{,}0025.\frac{K_{cor}.\dfrac{25000}{(p+50)^2+10^4}}{1+0{,}06.K_{cor}.\dfrac{25000}{(p+50)^2+10^4}} = \frac{62{,}5.K_{cor}}{(p+50)^2+10^4+1500.K_{cor}}$$

$$H_v = \frac{62{,}5.K_{cor}}{p^2+100p+50^2+10^4+1500.K_{cor}} = \frac{\dfrac{62{,}5.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}$$

Question 14 : *Donner la vitesse angulaire atteinte par le plateau en régime permanent en fonction de Kcor.*

$$\omega_{43}(+\infty) = K.Ec = \frac{62{,}5.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}.100 = \frac{25.K_{cor}}{50+6.K_{cor}}$$

Question 15 : *Exprimer la valeur de l'écart statique* $\varepsilon_S (= \varepsilon(+\infty))$ *ou écart en régime permanent en fonction de Kcor.*
Pour cela déterminer l'expression de $\varepsilon(p)$ *, puis* $\varepsilon(+\infty)$ *par un calcul de limite.*

1ère méthode pour déterminer $\varepsilon(p) = V(p) - V_\Omega(p)$ avec $V_\Omega(p) = a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$

donc $\varepsilon(p) = V(p) - a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$

$$\varepsilon(p).[1+a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)] = V(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{V(p)}{1+a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)} = \frac{\dfrac{100}{p}}{1+0{,}06.\dfrac{25000}{(p+50)^2+10^4}.K_{cor}} = \frac{100}{p}.\frac{[(p+50)^2+10^4]}{[(p+50)^2+10^4]+1500.K_{cor}}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{V(p)}{1+a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)} = \frac{\dfrac{100}{p}}{1+0{,}06.\dfrac{25000}{(p+50)^2+10^4}.K_{cor}} = \frac{100}{p}.\frac{[(p+50)^2+10^4]}{[(p+50)^2+10^4]+1500.K_{cor}}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{100}{p}.\frac{p^2+100p+50^2+10^4}{p^2+100p+50^2+10^4+1500.K_{cor}} = \frac{100}{p}.\frac{12500+100p+p^2}{12500+1500.K_{cor}+100p+p^2}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{\dfrac{100.12500}{12500+1500.K_{cor}}}{p}.\frac{1+\dfrac{100}{12500}p+\dfrac{1}{12500}p^2}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}$$

2ème méthode pour déterminer $\varepsilon(p) = V(p) - V_\Omega(p)$ avec $V_\Omega(p) = a.\dfrac{\Omega_{43}(p)}{H_R(p)} = a.\dfrac{H_V(p).V(p)}{H_R(p)}$

donc $\varepsilon(p) = V(p) - a.\dfrac{H_V(p).V(p)}{H_R(p)} = \left[1-a.\dfrac{H_V(p)}{H_R(p)}\right].V(p)$

$$\varepsilon(p)=\left[1-0{,}06.\frac{\dfrac{\dfrac{62{,}5.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}}{0{,}0025}\right].\frac{100}{p}$$

$$\varepsilon(p)=\left[1-\frac{\dfrac{1500.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}\right].\frac{100}{p}$$

$$\varepsilon(p)=\left[\frac{\left[1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2\right]-\left[\dfrac{1500.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}\right]}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}\right].\frac{100}{p}$$

$$\varepsilon(p)=\left[\frac{1-\dfrac{1500.K_{cor}}{12500+1500.K_{cor}}+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}\right].\frac{100}{p}$$

$$\varepsilon(p)=\left[\frac{\dfrac{12500}{12500+1500.K_{cor}}+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}\right].\frac{100}{p}$$

$$\varepsilon(p)=\frac{\dfrac{100.12500}{12500+1500.K_{cor}}}{p}.\frac{1+\dfrac{100}{12500}p+\dfrac{1}{12500}p^2}{1+\dfrac{100}{12500+1500.K_{cor}}p+\dfrac{1}{12500+1500.K_{cor}}p^2}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_S=\varepsilon(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p.\varepsilon(p)=\frac{100.12500}{12500+1500.K_{cor}}=\frac{2500}{25+3.K_{cor}}$$

Question 16 : *La valeur de Kcor étant réglable, a-t-on intérêt à la choisir grande ou petite ? Justifier votre réponse en fonction des réponses aux deux questions précédentes.*

Les fonctions ε_S et $\omega_{43}(+\infty)$ sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de Kcor. Il est donc préférable d'augmenter Kcor pour diminuer l'erreur statique et augmenter la valeur de la réponse en régime permanent.

Question 17 : *Comparer ces réponses à la réponse indicielle du système non corrigé, déterminée à la question 11 et conclure sur les avantages et/ou inconvénients du bouclage (ajout de la génératrice tachymétrique et du correcteur).*

Par rapport au système initial (moteur + réducteur), l'introduction de la génératrice tachymétrique et du correcteur :

Inconvénient : - provoque l'apparition d'un écart statique.

Avantages : - permet d'augmenter la vitesse atteinte en régime permanent,
- permet d'augmenter la rapidité du système.

Mais l'utilité essentielle du bouclage est la correction des effets des perturbations (lorsqu'elles existent : $Cr(p) \neq 0$). (Partie qui ne sera pas étudiée ici).

Question 18 : *Suivant les réponses indicielles représentées à la page précédente pour différentes valeurs de Kcor, quel est à votre avis le meilleur réglage de Kcor pour le système étudié ?*

Pour le système de mise en rotation du plateau, il n'est pas utile que la vitesse acquise dépasse celle du moteur seul (0,5 rd/s). De plus, si Kcor est important il y a apparition d'oscillations qui pourraient déstabiliser le patient. La valeur Kcor=1 conviendrait.

Utilisation d'un correcteur proportionnel-intégral.

Question 19 : *Exprimer la valeur de l'écart statique* $\varepsilon_S (= \varepsilon(+\infty))$ *ou écart en régime permanent du système équipé de ce nouveau correcteur.*

$$H_{cor}(p) = 5.\left(1 + \frac{40}{0{,}5.p}\right) = 5 + \frac{400}{p} = \frac{400 + 5p}{p}$$

1ère méthode pour déterminer $\varepsilon(p) = V(p) - V_\Omega(p)$ avec $V_\Omega(p) = a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$

donc $\varepsilon(p) = V(p) - a.H_{mot}(p).H_{cor}(p).\varepsilon(p)$

$$\varepsilon(p).[1 + a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)] = V(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{V(p)}{1 + a.H_{mot}(p).H_{cor}(p)} = \frac{\frac{100}{p}}{1 + 0{,}06.\frac{25000}{(p+50)^2 + 10^4}.\left(\frac{400+5p}{p}\right)} = 100.\frac{\left[(p+50)^2 + 10^4\right]}{p\left[(p+50)^2 + 10^4\right] + 1500.(400+5p)}$$

$$\varepsilon(p) = 100.\frac{p^2 + 100p + 50^2 + 10^4}{p^3 + 100p^2 + 50^2 p + 10^4 p + 600000 + 7500p} = 100.\frac{12500 + 100p + p^2}{600000 + 20000p + 100p^2 + p^3}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{100.12500}{600000}.\frac{1 + \frac{100}{12500}p + \frac{1}{12500}p^2}{1 + \frac{20000}{600000}p + \frac{100}{600000}p^2 + \frac{1}{600000}p^3}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_S = \varepsilon(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p.\varepsilon(p) = 0$$

Question 20 : *En déduire l'avantage que procure le caractère « intégral » de ce correcteur pour le système.*

L'annulation de l'erreur statique.

Question 21 : *Par lecture du diagramme, identifier cette fonction de transfert, notée* H_{boncnp} *(boucle ouverte non corrigé non perturbé).*

On peut remarquer, sur le diagramme de gain, que la courbe est au dessus des asymptotes (petite résonance autour de la pulsation $\log(\omega) = 2$) et que la pente (aux hautes pulsations) est de -40 dB/unité ou -40 dB/dec. De plus, sur le diagramme de déphasage, pour les hautes pulsations, la courbe tend vers -180°. Par conséquent, on peut identifier la fonction de transfert à une fonction de transfert du 2ème ordre.

Pour obtenir K, on regarde sur le diagramme de gain les basses pulsations : $G_{dB} \to 20\log K$:

$-18{,}4 = 20.\log(K) \quad \Rightarrow \quad K = 0{,}12$

Pour obtenir ω_0, on regarde sur le diagramme de gain, la pulsation ω pour laquelle les 2 asymptotes se coupent : $\omega = \omega_0 = \omega_{cassure}$:

$\log(\omega_{cassure}) = 2{,}08 \quad \Rightarrow \quad \omega_{cassure} = 120\ rd/s$

Pour obtenir z, on regarde sur le diagramme de gain, la différence entre $G_{0\ dB}$ et $G_{dB}(\omega_0)$ vaut $-20\log(2z)$ si $z < 0{,}7$ (phénomène de résonance) :

$-20\log(2z) = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 0{,}44$

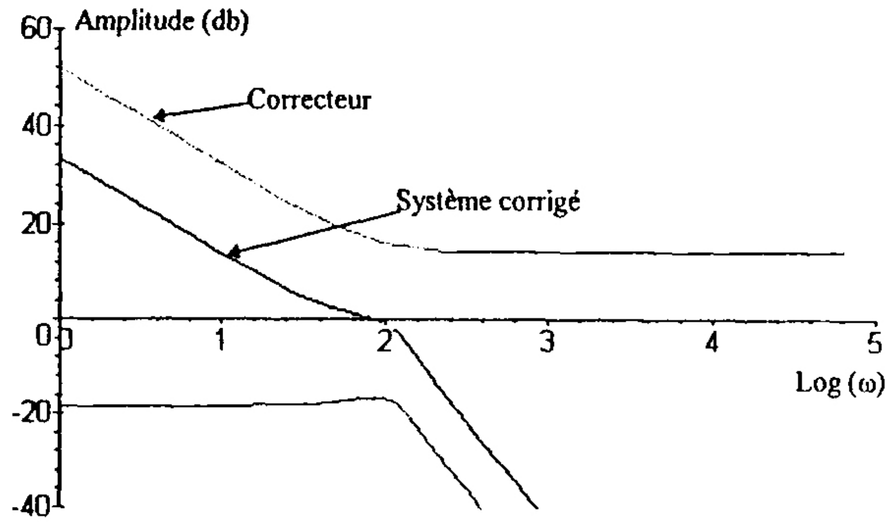
Donc $H_{boncnp} = \dfrac{0{,}12}{1 + \dfrac{2.0{,}44}{120}p + \dfrac{1}{120^2}p^2} \approx \dfrac{0{,}12}{1 + 0.008p + 0.00008p^2}$

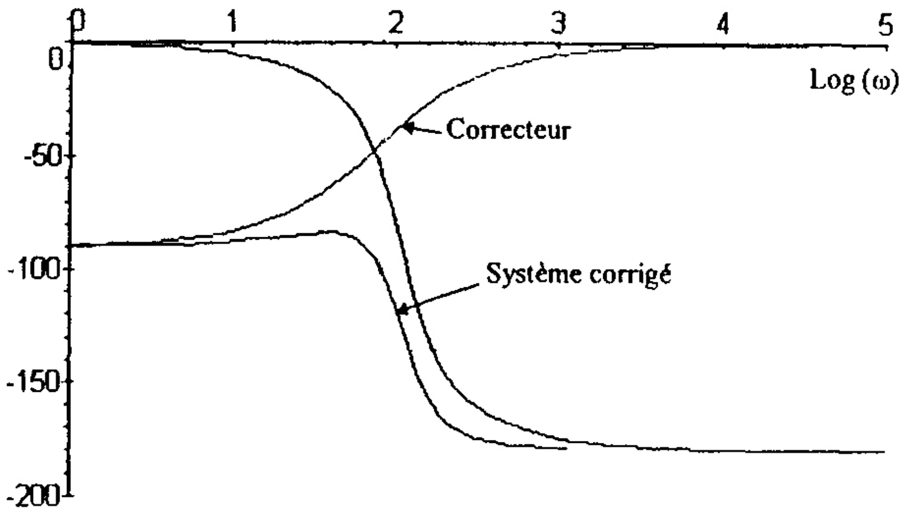
Question 22 : *Tracer sur le document réponse 2, la réponse harmonique du correcteur seul. En déduire graphiquement la réponse harmonique en boucle ouverte du système corrigé et sans perturbation.*

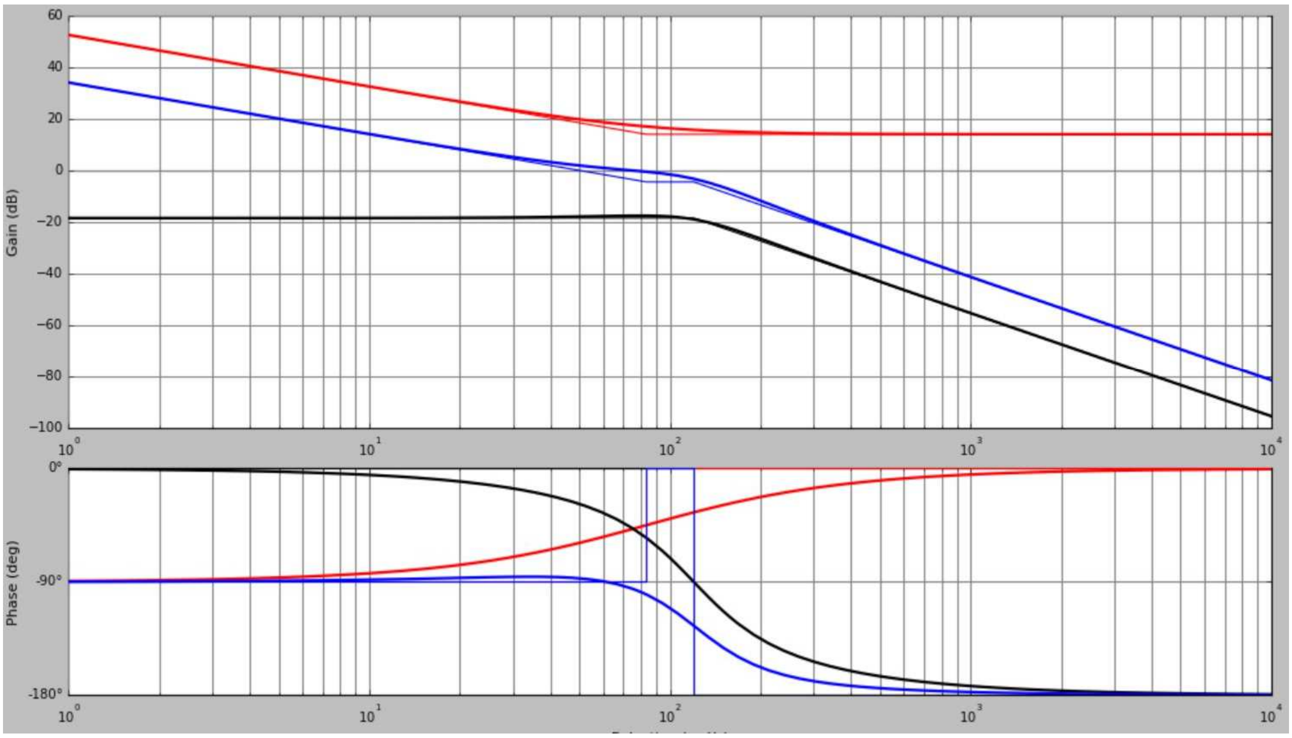
Pour le correcteur seul : $H_{cor}(p) = 5.\left(1 + \dfrac{40}{0{,}5.p}\right) = 5 + \dfrac{400}{p} = \dfrac{400 + 5p}{p} = \dfrac{400}{p}.(1 + \dfrac{5}{400}p) = \dfrac{400}{p}.(1 + \dfrac{1}{80}p)$

Sur le diagramme de gain, on trace d'abord l'intégrateur $\dfrac{400}{p}$ de pente -20 dB/dec et coupant l'axe des abscisses en $\omega = K = 400$ rad/s soit $\log(\omega) = 2{,}6$.
Puis on ajoute +20 dB/dec à la pulsation de cassure 80 rad/s soit $\log(\omega) = 1{,}9$ (ce qui fait une asymptote horizontale).

Sur le diagramme de déphasage, l'intégrateur donne un déphasage de -90° aux faibles pulsations, puis l'addition de +90° à la pulsation de cassure 80 rad/s soit $\log(\omega) = 1{,}9$ donne 0° aux hautes pulsations.


Amplitude (db)
Correcteur
Système corrigé
Log (ω)


Log (ω)
Correcteur
Système corrigé


Gain (dB)
Phase (deg)

La réponse harmonique en boucle ouverte du système corrigé et sans perturbation est la somme des 2 réponses harmoniques des fonctions de transfert précédentes.

Question 23 : *A l'aide de ces courbes, quantifier pour ce système :*

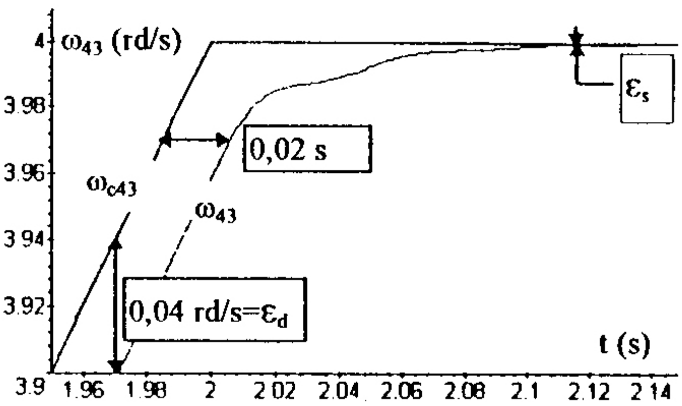
- *l'écart statique* $\varepsilon_S (= \varepsilon(+\infty))$ *,*
- *le dépassement D,*
- *l'écart dynamique* ε_d *(ou erreur de traînage),*
- *le retard de traînage.*

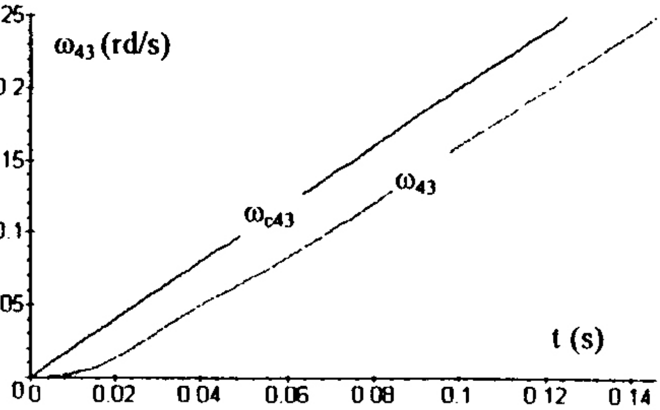
Expliquer à partir de ces grandeurs si le comportement du système « en poursuite » et « en régulation » est conforme à ce que l'on peut en attendre.

Voir graphe page suivante.

- o l'écart statique $\varepsilon_S (= \varepsilon(+\infty))$ est nul
- o le dépassement D est nul,
- o l'écart dynamique ε_d (ou erreur de traînage) vaut 0,04 rd/s,
- o le retard de traînage vaut 0,02 s.

« En poursuite », le système répond avec retard et avec un écart de 0,04 rd/s. Mais Cet écart est constant et la loi de mise en vitesse est respectée.
« En régulation » (vitesse constante), le dépassement est nul, les oscillations réduites et l'écart statique nul. Le système est donc précis et peu oscillant ce qui participe au confort du patient à déplacer.





5/ Étude du système complet asservi en vitesse, en position et non perturbé : Cr(p)=0.

Question 24 : *Compléter le schéma-bloc du document réponse 3, afin dé réaliser l'asservissement en position du système.*