

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera soigneusement la réponse.

1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction $x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t)dt$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est f .
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente et est nulle.
3. Il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes les deux des lois de Rademacher. Alors la variable aléatoire XY suit une loi de Rademacher.
5. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On suppose que A est dense dans B et que B est dense dans E . Alors A est dense dans E .
6. La réunion de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
7. La seule partie convexe dense de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

Exercice préliminaire

8. Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\Phi(A, B) = \text{Tr}(AB^T)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme associée au produit scalaire Φ . On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme un espace topologique avec la topologie définie par cette norme. Dans la suite, toute partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munie de la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (O est un ouvert de A si, et seulement si, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $O = U \cap A$).

9. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
 (b) Énoncer et démontrer une caractérisation similaire des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide de leurs spectres.
10. Soient A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^T A B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
11. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont convexes.
12. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
14. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. On notera $R = S^{1/2}$.
15. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que $S^{1/2}$ est inversible, puis que $(S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}$. On notera plus simplement $S^{-1/2}$ la matrice $(S^{1/2})^{-1}$.

Première partie : jauge d'un corps convexe symétrique

Définition 3. Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est un corps convexe si C est compact, convexe et si 0 appartient à l'intérieur de C , c'est-à-dire $0 \in \overset{\circ}{C}$. On dit que C est symétrique si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \in C) \iff (-x \in C).$$

On notera que cette notion de « corps convexe » n'est aucunement liée avec la notion de corps en algèbre.

16. Montrer que si C est la boule unité d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, alors C est un corps convexe symétrique.

Le but de cette partie est de caractériser les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ comme des boules unités d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire la jauge associée à un corps convexe symétrique :

Définition 4. Soit C un corps convexe symétrique. On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application J , appelée jauge de C , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda}x \in C \right\}.$$

On se donne maintenant un corps convexe symétrique C .

17. Justifier que J , la jauge de C , est bien définie et que $J(0) = 0$.
 18. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $J(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
 19. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, $J(\mu x) = \mu J(x)$.
 (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $J(\mu x) = |\mu|J(x)$.
 20. Montrer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n, J(x) \leq 1\}$.
 21. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit ε un réel strictement positif. On note :

$$x' = \frac{x}{J(x) + \varepsilon} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y}{J(y) + \varepsilon}.$$

Soit $\alpha = \frac{J(x) + \varepsilon}{J(x) + J(y) + 2\varepsilon}$ et $z = \alpha x' + (1 - \alpha)y'$.

- (a) Montrer que x' et y' appartiennent à C . En déduire que $z \in C$.
 (b) En déduire que $J(x + y) \leq J(x) + J(y)$.
 22. (a) Dédurre de ce qui précède que J est une norme.
 (b) Quelle est la boule unité de cette norme J ?
 (c) En déduire que $\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n, J(x) = 1\}$.
 23. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes de $\mathbb{R}^n$ ayant la même boule unité, alors $N_1 = N_2$.

Deuxième partie : généralités sur les ensembles convexes

Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire. On note $\|\cdot\|_E$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

Dans toute cette partie, on désigne par C un convexe compact de E .

24. Soit $a \in E$.
 (a) Montrer qu'il existe $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. Justifier que si $a \notin C$, alors $\|a - x_a\|_E > 0$.
 (b) Soient $x_0, x_1 \in C$ tels que $\|a - x_0\|_E = \|a - x_1\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. Montrer que $x_0 = x_1$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\frac{x_0 + x_1}{2}$.

Ainsi, pour tout $a \in E$, il existe un unique $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. On définit alors l'application $\pi_C : E \rightarrow C$ par la relation $\pi_C(a) = x_a$.

25. Soit $a \in E$.
 (a) Soit l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a - \pi_C(a), x \rangle_E$. Soit l'ensemble $H = \{x \in E, f(x) = f(a)\}$. Justifier que H est un sous-espace affine de E . Quelles sont les dimensions possibles pour H ?

(b) Vérifier que $f(\pi_C(a)) \leq f(a)$ et que cette inégalité est stricte si $a \notin C$.

(c) Montrer que pour tout $x \in C$, $f(x) \leq f(\pi_C(a))$.

Indication : On pourra considérer l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à t associe $\|a - ((1-t)\pi_C(a) + tx)\|_E^2$.

(d) Soit $b \in C$ tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b \rangle_E \leq 0$. Pour tout $x \in C$, montrer que $\|a - x\|_E \geq \|a - b\|_E$ et en déduire que $b = \pi_C(a)$.

Ainsi, on a montré que pour tout $a \in E$, $\pi_C(a)$ est l'unique point b de C tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b \rangle_E \leq 0$.

26. (a) Soient $a, a' \in E$. Montrer que $\|\pi_C(a') - \pi_C(a)\|_E^2 \leq \langle a' - a, \pi_C(a') - \pi_C(a) \rangle_E$.

(b) En déduire que π_C est 1-lipschitzienne.

27. Soit $a \in \partial C$. Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E \setminus C$ qui converge vers a .

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{a_p - \pi_C(a_p)}{\|a_p - \pi_C(a_p)\|_E} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de E et qu'elle possède une sous-suite convergeant vers un élément y de E .

(b) Montrer que y est non nul et que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - a \rangle_E \leq 0$.

Troisième partie : sur les ellipsoïdes

Définition 5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On appelle ellipsoïde associé à A la partie $\mathcal{E}_A$ définie par

$$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \leq 1\}.$$

Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$.

28. Soit $r > 0$. Montrer que $\bar{B}(0, r)$ (la boule fermée de centre 0 et de rayon r) pour la norme $\|\cdot\|$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et préciser une matrice $A_r \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $\bar{B}(0, r) = \mathcal{E}_{A_r}$.

29. Soit $\mathcal{E}_A$ l'ellipsoïde associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^{-1}\mathcal{E}_A = \{B^{-1}x, x \in \mathcal{E}_A\}$ est un ellipsoïde.

(b) Montrer que $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}B_2^n$.

(c) En déduire que $\mathcal{E}_A$ est un corps convexe symétrique.

(d) Quelle est la jauge J_A associée à $\mathcal{E}_A$?

(e) Montrer que cette jauge J_A est une norme euclidienne. On donnera la matrice du produit scalaire associé à cette norme dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

30. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ si et seulement si $A = B$.

31. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle Bx, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle$.

Définition 6. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde. On a montré qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. On définit alors la mesure de $\mathcal{E}$, noté $\mu(\mathcal{E})$, par

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

32. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$. Soit r un réel strictement positif. Donner une relation entre $\mu(\bar{B}(0, r))$ et le volume de $\bar{B}(0, r)$.

33. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Préciser la mesure de $B^{-1}\mathcal{E}$ en fonction de la mesure de $\mathcal{E}$.

34. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E} = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.
35. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Justifier que A admet n valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et qu'il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A f_i = \lambda_i f_i$.
- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que l'on a

$$\lambda_k = \sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$

où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k .

Indication : Si $V \in G_k$, on pourra considérer l'intersection de V avec le sous-espace engendré par $f_k, \dots, f_n$.

36. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. Montrer que $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{E}')$.

Quatrième partie : existence d'un ellipsoïde de mesure maximale

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.

37. Justifier que C est borné et qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}'$ tel que $C \subset \mathcal{E}'$.
38. Soit $\mathcal{A} = \{\mu(\mathcal{E}), \mathcal{E} \text{ ellipsoïde tel que } \mathcal{E} \subset C\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide et majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure notée α .
39. Justifier qu'il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, en notant $\mathcal{E}_p$ l'ellipsoïde associé à A_p , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_p \subset C$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{E}_p) = \alpha$.
40. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
41. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit $0 < \lambda_1(p) \leq \dots \leq \lambda_n(p)$ les valeurs propres de A_p . Montrer que la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif, puis que la suite $(\lambda_n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
42. En déduire que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme N .
43. En déduire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_{\varphi(p)} = A$.
44. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
45. En déduire qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de mesure maximale inclus dans C .

Cinquième partie : unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale

46. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
47. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(I_n + A) \geq 1 + \det^{1/n}(A)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda I_n$.
48. En déduire que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(A + B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $B = \lambda A$. *Indication :* on pourra utiliser la matrice $A^{1/2}$ introduite dans l'exercice préliminaire.
49. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det(A)\det(B)}$. Caractériser les cas d'égalité.

50. Montrer l'unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale.

Sixième partie : le théorème de John, sens indirect

Définition 7. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire $\psi_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \psi_u(v) = \langle u, v \rangle u.$$

Le but des parties 6 et 7 est d'établir le théorème suivant, dû à Fritz John.

Théorème 8. Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale de C si et seulement si, $B_2^n \subset C$ et s'il existe des points $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial C$ et des réels $c_1, \dots, c_m > 0$ tels que $\sum_{i=1}^m c_i \psi_{u_i} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

51. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, non nul.

- (a) Déterminer le noyau et l'image de ψ_u , ainsi que leurs dimensions.
- (b) Montrer que ψ_u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- (c) Déterminer la trace de ψ_u .
- (d) Déterminer la matrice de ψ_u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans les questions numérotées de 52 à 53, C est un corps convexe symétrique contenant B_2^n . On suppose de plus qu'il existe des points $u_1, \dots, u_m$ appartenant à $\partial C \cap S^{n-1}$ et des réels strictement positifs $c_1, \dots, c_m$ tels que $\sum_{i=1}^m c_i \psi_{u_i} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

52. Soit $v \in \partial C \cap S^{n-1}$. D'après la question 27, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - v \rangle \leq 0$.

- (a) Montrer que l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle y, x - v \rangle = 0\}$ est l'hyperplan tangent à S^{n-1} en v .
- (b) En déduire que pour tout $x \in C$, $\langle v, x \rangle \leq 1$.

53. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale.

- (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ strictement positifs tels que

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{\alpha_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Quitte à appliquer une isométrie, on suppose maintenant que $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \leq 1 \right\}.$$

- (b) Exprimer la mesure de $\mathcal{E}$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
- (c) Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \partial C \cap S^{n-1}$. Montrer que $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j^2 \leq 1$. Indication : On pourra utiliser le vecteur $w = (\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$.
- (d) Calculer $\sum_{i=1}^m c_i$.

(e) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2$.

(f) Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on pose $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \alpha_j u_{i,j}^2 \leq n.$$

(g) En déduire que

$$\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq 1.$$

(h) Conclure.

Septième partie : le théorème de John, sens direct

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que son ellipsoïde de mesure maximale est B_2^n . On note X l'ensemble des points de contact entre C et S^{n-1} , i.e. $X = S^{n-1} \cap \partial C$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire Φ défini dans l'exercice préliminaire.

54. Montrer que X est un compact non vide.

On pose $T = \{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\psi_u), u \in X\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où, rappelons-le, $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On admet dans toute la suite que $\text{conv}(T)$ (le plus petit convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient T) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème de Carathéodory). On souhaite donc montrer que $\frac{1}{n}I_n \in \text{conv}(T)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{1}{n}I_n \notin \text{conv}(T)$.

55. Montrer que $\text{conv}(T)$ est inclus dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

56. Montrer que pour toute matrice $M \in \text{conv}(T)$, la trace de M vaut 1.

57. (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \text{conv}(T), \quad f(M) > f\left(\frac{1}{n}I_n\right).$$

(b) Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ unique telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \text{Tr}(HM).$$

Quitte à changer f on peut supposer aussi que $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que H est de trace nulle (admis). On conserve cette hypothèse dans toute la suite.

58. En déduire que pour tout $u \in \partial C \cap S^{n-1}$, $\langle Hu, u \rangle > 0$.

59. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle (I_n + \delta H)x, x \rangle \leq 1\}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $\mathcal{E}_\delta$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.

60. (a) Montrer qu'il existe $\eta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, pour tout $u \in \partial C$,

$$\langle (I_n + \delta H)u, u \rangle > 1.$$

Indication : On pourra utiliser le fait suivant, après l'avoir justifié : pour toute réunion

$$\partial C = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \partial C) \text{ avec pour tout } i \in I, U_i \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \text{ il existe } J \subset I \text{ fini tel que}$$

$$\partial C = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap \partial C).$$

(b) En déduire que pour tout $\delta \in]0, \eta[, \mathcal{E}_\delta \subset C$.

61. Conclure.

Huitième partie : une conséquence du théorème de John

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C .

62. On suppose uniquement dans cette question que $\mathcal{E} = B_2^n$. Montrer que $B_2^n \subset C \subset \sqrt{n}B_2^n$.

63. En déduire que $\mathcal{E} \subset C \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.

Dans les questions numérotées de 64 à 66, on se propose de montrer que la constante $\sqrt{n}$ est optimale.

On pose $C = [-1, 1]^n$.

64. Vérifier que C est un corps convexe symétrique.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale. On note $J_{\mathcal{E}}$ la jauge de $\mathcal{E}$. On rappelle qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

65. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent une loi de Rademacher. Montrer que :

$$E \left(\| (X_1, \dots, X_n) \|_{\mathcal{E}}^2 \right) \geq n.$$

66. Conclure.

FIN DU SUJET

Représentation matricielle Ae^A

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A , et on note $\exp(A)$ ou e^A , la matrice $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$. Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ , la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

- 1) Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = w$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos(\theta)} = r \\ R\sin(\theta) = \alpha - \theta \quad (\text{modulo } 2\pi). \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right).$$

- 2) Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \rightarrow 0^+$ et lorsque $\theta \rightarrow \pi^-$. Que peut-on en déduire sur les solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ? Soit $D = \{Re^{i\theta} ; R > 0 \text{ et } 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et g l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

- 3) Dédurre de ce qui précède que g est surjective.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n .

- 4) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $\{X, NX, \dots, N^{n-1}X\}$ est libre.
- 5) En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.
- 6) Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .
- 7) Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

- 8) Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$$

où p est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ .

- 9) Montrer que $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + (J_n(0))^2 p(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n . En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

- 10) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

- 11) Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array} \right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

- 12) Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y , à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la i ème ligne de X pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)
- 13) Justifier que A' est nilpotente d'indice p . En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)
- 14) En déduire que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, p_2, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

D. Représentation Ae^A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A . Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i})$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$.

- 15) Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i . En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, N_2, \dots, N_s$ sont des matrices nilpotentes.

- 16) Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même est surjective.

FIN DU PROBLÈME

MATHÉMATIQUES II

SUJET 3

Notations

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ on note tA la matrice transposée de A , $\bar{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $rg(A)$ le rang de A .

On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E .

L'espace vectoriel V admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(k, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on pose $E_{k,m} = e_k {}^t e_m$, ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 si $(i, j) = (k, m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{k,m}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$.

On note I la matrice identité, $I = \sum_{1 \leq k \leq n} E_{k,k}$.

Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V , $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw | w \in W\}$.

Si F est un sous-ensemble de E , on dit que W est stable par F si

$$\forall A \in F, A(W) \subset W.$$

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :

P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,

P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n ,

P_3 : $\mathcal{L}$ contient I ,

P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E ,

P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices : $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow AB \in \mathcal{L}$,

P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Filière PC

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A - , $\mathcal{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles :

$$\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C}).$$

I.A.1) Soit x un vecteur non nul de V . Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer deux cas,

- a) la famille (x, y) est liée,
- b) la famille (x, y) est libre.

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

I.A.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \dots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.B - Dans cette section I.B - , $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que

$$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0$$

I.B.1) Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathcal{L}$. Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathcal{L}$?

I.B.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \dots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.C - Dans cette section I.C - , $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

I.C.1) On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \setminus \mathcal{L}$ le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans E). Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$? Montrer que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées :
 $\mathcal{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II -

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathcal{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée.

On note

$$m = \min \left\{ rg(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\} \right\},$$

et on se propose de montrer que $m = 1$, ce qui établira P_1 .

On suppose dans un premier temps que $m \geq 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $rg(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1, \dots, x_m$ des éléments de V tels que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $M_0 x_i = z_i$.

II.A - Montrer que $\left\{ N z_1 \mid N \in \mathcal{L} \right\} = V$.

On note alors N_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.B - Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$ puis que

$$\exists (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V), \text{ tel que } z \neq 0_V \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.$$

En déduire que $0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0)$.

Conclure que $m = 1$.

Partie III -

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathcal{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées, puis que $\mathcal{L} = E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$; on note k la dimension de W . Montrer que $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$ et dont la dimension vaut $n^2 - k(n - k)$. En déduire que $W = \{0_V\}$ ou $W = V$. On a donc démontré P_6 .

III.B -

III.B.1) On suppose ici : $(*) \exists k, m \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, k \neq m \text{ et } E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}$.

On note alors $\mathcal{H} = \text{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I .

Montrer que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$ puis que $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de (*) qui est vrai, donc

$$k \neq m \Rightarrow E_{k,m} \in \mathcal{L}.$$

Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,m}$ qui donne une matrice inversible. En déduire que dans tous les cas $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible A .

III.C - Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est une famille liée.

En déduire qu'il existe un entier $p > 0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tels que $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$ et

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_p A^p = 0.$$

Montrer alors que $I \in \mathcal{L}$.

On a donc démontré P_3 .

Compte tenu de la partie II -, la propriété P_1 est donc satisfaite. On note alors M_0 une matrice de rang 1 qui appartient à $\mathcal{L}$, matrice que l'on peut écrire

$$M_0 = v_0 {}^t \bar{w}_0, \text{ où } v_0, w_0 \in V \setminus \{0_V\}.$$

On introduit le produit scalaire canonique sur V , $(v, w) \mapsto {}^t \bar{v} w$ et pour $v \in V$ on pose

$$A_v = \left\{ L v \mid L \in \mathcal{L} \right\},$$

$$B_v = \left\{ {}^t \bar{L} v \mid L \in \mathcal{L} \right\},$$

$$C_v = (B_v)^\perp.$$

III.D - Soit $u \in V$, $u \neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.

Montrer alors que $C_u = \{0_V\}$ et $B_u = V$.

Montrer que $A_u = V$. En déduire que pour tout $(x, y) \in V^2$ il existe $L, M \in \mathcal{L}$ tels que $L v_0 = x$ et ${}^t \bar{M} w_0 = y$, puis que toute matrice $A \in E$ de rang 1 appartient à $\mathcal{L}$. Montrer que $\mathcal{L} = E$.

... FIN ...

Théorème de Müntz

On désigne par $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0, 1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0, 1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*La question préliminaire et les parties A, B, C et D
sont indépendantes les unes des autres.*

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de $C([0, 1])$.

A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}.$$

- 2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

- 3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

- 4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A .
 5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E , et on note $B = \{y; \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

- 6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.
 7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- 8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* de E , alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ on désigne par $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{pmatrix}.$$

- 9) Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée.
- 10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0, 1])$ on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 , respectivement. Pour $f \in C([0, 1])$ la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A relativement à la norme N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

- 11) Montrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0, 1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0, 1]) ; f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

- 12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.
- 13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 , mais n'est pas dense pour la norme N_∞ .
- 14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.
- 15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.
- 16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ , alors la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n . Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

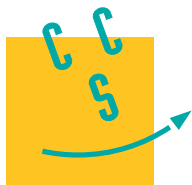
$$\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii) : & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \quad \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0.$$

FIN DU PROBLÈME



Polynômes de Tchebychev et de Dickson, applications

I Définitions et propriétés usuelles

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

On ne demande pas de justifier l'existence et l'unicité de la famille de polynômes définie par cette relation.

I.A – Polynômes de première espèce

I.A.1) Déterminer T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .

I.A.2) En remarquant que pour tout réel θ , on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Écrire en langage Maple ou Mathematica une fonction T prenant en argument un entier naturel n et renvoyant l'expression développée du polynôme T_n .

I.A.3) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \quad (\text{I.1})$$

En déduire, pour tout entier naturel n , le degré et le coefficient dominant de T_n . Retrouver ce résultat avec l'expression de la [question I.A.2](#).

I.A.4) Montrer que, pour tout entier naturel n , le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples appartenant à $] -1, 1[$. Déterminer les racines de T_n .

I.B – Polynômes de deuxième espèce

On définit les polynômes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Tchebychev de deuxième espèce par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}$$

I.B.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

I.B.2) En déduire les propriétés suivantes :

a) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence [\(I.1\)](#) que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Pour tout entier naturel n , le polynôme U_n est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples appartenant à $] -1, 1[$.

Déterminer les racines de U_n .

II Arithmétique des polynômes de Tchebychev

II.A – Division euclidienne

II.A.1) Montrer que

$$\begin{cases} T_m \cdot T_n = \frac{1}{2} (T_{n+m} + T_{n-m}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m \leq n \\ T_m \cdot U_{n-1} = \frac{1}{2} (U_{n+m-1} + U_{n-m-1}) & \text{pour tous entiers } 0 \leq m < n \end{cases}$$

II.A.2) Pour m et n entiers naturels tels que $m \leq n$, on se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de T_n par T_m .

a) On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2T_{n-m} \quad \text{et} \quad R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$$

b) Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

c) On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geq 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2 \left(T_{n-m} - T_{n-3m} + \dots + (-1)^{p-1} T_{n-(2p-1)m} \right) \quad \text{et} \quad R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$$

II.B – Plus grand commun diviseur

Dans toute cette sous-partie II.B, on fixe deux entiers naturels m et n .

II.B.1) Soit h le pgcd dans $\mathbb{N}$ de $m+1$ et $n+1$. En examinant les racines communes à U_n et U_m , montrer que U_{h-1} est un pgcd dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m .

II.B.2) Soit $g > 0$ le pgcd de m et n . On pose $m_1 = m/g$ et $n_1 = n/g$.

a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m .

b) Montrer que si l'un des deux entiers m_1 ou n_1 est pair, alors T_n et T_m sont premiers entre eux.

c) Que peut-on dire des pgcd de T_n et T_m lorsque m et n sont impairs ? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes ?

III Un théorème

Dans cette partie, on munit l'ensemble $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes de la loi de composition interne associative donnée par la composition, notée $\circ$. Plus précisément, étant donné $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k$, la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant nulle à partir d'un certain rang, on a

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k Q^k$$

On dit que les polynômes P et Q commutent si $P \circ Q = Q \circ P$. On note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes complexes qui commutent avec le polynôme P

$$\mathcal{C}(P) = \{Q \in \mathbb{C}[X], P \circ Q = Q \circ P\}$$

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes complexes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg F_n = n \quad \text{et} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad F_n \circ F_m = F_m \circ F_n \quad (\text{III.1})$$

Il est clair que la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.

On note G l'ensemble des polynômes complexes de degré 1, et pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on pose $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

III.A – Préliminaires

III.A.1) Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (III.1). On pourra comparer $T_n \circ T_m$ et T_{mn} .

III.A.2) Vérifier que G est un groupe pour la loi $\circ$.

L'inverse pour la loi $\circ$ d'un élément U de G sera noté U^{-1} .

III.B – Commutant de X^2 et T_2

III.B.1) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme complexe non constant qui commute avec P_α . Montrer que Q est unitaire.

III.B.2) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α . Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

III.B.3) Soit P un polynôme complexe de degré 2. Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$. Déterminer ces deux éléments lorsque $P = T_2$.

III.B.4) Justifier que $\mathcal{C}(T_2) = \{-1/2\} \cup \{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

III.C –

III.C.1) Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré trois sont 0 et -2 .

III.C.2) En déduire le théorème de Block et Thielmann : si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (III.1), alors il existe $U \in G$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U$$

IV Puissances dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$

Dans toute cette partie, on note $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, muni de son addition et de sa multiplication usuelle.

IV.A – Justifier qu'un élément M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ appartient à $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det M| = 1$.

IV.B – On introduit les polynômes de Dickson de première et deuxième espèce, $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définis sous la forme de fonctions polynomiales de deux variables par

$$D_0(x, a) = 2 \quad D_1(x, a) = x \quad E_0(x, a) = 1 \quad E_1(x, a) = x$$

puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D_{n+2}(x, a) = x D_{n+1}(x, a) - a D_n(x, a) \quad \text{et} \quad E_{n+2}(x, a) = x E_{n+1}(x, a) - a E_n(x, a)$$

Justifier la relation suivante avec les polynômes de Tchebychev

$$\forall (x, a) \in \mathbb{C}^2, \quad D_n(2xa, a^2) = 2a^n T_n(x) \quad \text{et} \quad E_n(2xa, a^2) = a^n U_n(x)$$

ainsi que les deux relations suivantes, valables pour tout entier naturel n et tout $(x, a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

$$D_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = x^n + \frac{a^n}{x^n} \quad \text{et} \quad \left(x - \frac{a}{x}\right) E_n\left(x + \frac{a}{x}, a\right) = \left(x^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}\right) \quad (\text{IV.1})$$

IV.C – Dans cette sous-partie, on cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément A de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ soit une puissance n -ième dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire pour qu'il existe une matrice $B \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $A = B^n$. Dans toute la suite, on notera

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \tau = \text{Tr } A \quad \delta = \det A$$

IV.C.1) Soit $B \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$. On note, dans cette question uniquement, $\sigma = \text{Tr } B$ et $\nu = \det B$. Montrer pour tout $n \geq 2$, l'égalité

$$B^n = E_{n-1}(\sigma, \nu) \cdot B - \nu E_{n-2}(\sigma, \nu) \cdot I_2$$

où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

Établir que $\text{Tr}(B^n) = D_n(\sigma, \nu)$.

IV.C.2) En déduire que si A est une puissance n -ième ($n \geq 2$) dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$, alors il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1, 1\}$ tels que

- $E_{n-1}(\sigma, \nu)$ divise b , c et $a - d$. On justifiera brièvement que $E_{n-1}(\sigma, \nu)$ est bien un entier.
- $\tau = D_n(\sigma, \nu)$ et $\delta = \nu^n$.

IV.C.3) On va maintenant établir la réciproque.

Soit A un élément de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ pour lequel il existe $\sigma \in \mathbb{Z}$ et $\nu \in \{-1, 1\}$ vérifiant les deux conditions précédentes

i et **ii**. Pour simplifier, on note $p = E_{n-1}(\sigma, \nu)$. On définit alors une matrice $B = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ avec

$$r = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{a-d}{p} \right) \quad s = \frac{b}{p} \quad t = \frac{c}{p} \quad u = \frac{1}{2} \left(\sigma - \frac{a-d}{p} \right)$$

a) En introduisant une racine complexe du polynôme $X^2 - \sigma X + \nu$ et à l'aide de (IV.1), montrer que

$$\tau^2 - 4\delta = p^2(\sigma^2 - 4\nu) \quad \text{puis} \quad ru - st = \nu$$

En déduire que B appartient à $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

b) Montrer que $A = B^n$.

IV.C.4) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ est un cube dans $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ et déterminer une matrice $B \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $B^3 = A$.

• • • FIN • • •

Fonction de Wallis

Preliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \quad (1)$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I .

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du,$$

puis que

$$D_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b , et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}.$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2 \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln \left(\frac{a+b}{2} \right) \right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de $]0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in]0, \pi], \Psi_n(t) = \ln(a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J .

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leq p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leq \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leq \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- 20** ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

- 21** ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $] - T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in] - T, +\infty[, (t + T)g(t) = (t + 2T)g(t + 2T).$$

- 22** ▷ Existe-t-il une application h , de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbf{R}, (t + T)h(t) = (t + 2T)h(t + 2T) ?$$

I.C – Application à l'approximation uniforme

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\| \cdot \|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein de f , noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0, 1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

I.C.1) Un exemple

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

I.C.2) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x \in [0, 1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

I.C.3) a) Montrer que si f est δ -lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) En déduire que si f est de classe C^1 , alors il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe C^1 par morceaux.

I.C.4) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) - r \leq P(x) \leq f(x) + r$.

II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \quad \text{quand } x \rightarrow 1, \ x < 1. \quad (\text{II.1})$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\tilde{a}_n$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \dots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (\text{II.2})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = 1 \quad (\text{II.3})$$

II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2

II.A.1) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.A.2) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant **II.1** mais ne convergeant pas vers 1.

II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3

II.B.1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

II.B.2) On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de n , suivant la parité de n , les réels u_n et v_n .

II.B.3) Calculer $\tilde{v}_n$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \dots, v_n$).

II.B.4) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant **II.1** mais ne vérifiant pas la **propriété II.3**.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer **II.1** et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$, est de démontrer la **propriété II.3** (théorème de Hardy et Littlewood).

II.C – Majoration de la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$

II.C.1) Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geq A_n x^n$.

II.C.2) Montrer l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, f(e^{-1/n}) \leq \frac{2}{1 - e^{-1/n}}.$$

II.C.3) En déduire que la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$ est majorée.

II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$ par un réel > 0

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0} : \forall n \in \mathbb{N}, \tilde{a}_n \leq \mu$.

II.D.1) a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, montrer que $(1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leq A_{N-1} \frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leq A_{N-1} + \mu \left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \right).$$

II.D.2) Soit λ un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$f(e^{-\lambda/N}) \geq \frac{1}{2(1 - e^{-\lambda/N})} \geq \frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout $N \geq N_0$

$$\tilde{a}_{N-1} \geq \frac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{N} + e^{-\lambda/N} \frac{1}{N(1 - e^{-\lambda/N})} \right).$$

c) Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

II.D.3) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\tilde{a}_n \geq \nu$.

II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = 1/x$ si $x \geq e^{-1}$ et $g(x) = 0$ sinon.

On fixe un réel $\varepsilon \in]0, e^{-1}[$. On définit deux applications continues $g^+, g^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi :

- g^+ est affine sur $[e^{-1} - \varepsilon, e^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1} - \varepsilon] \cup [e^{-1}, 1]$;
- g^- est affine sur $[e^{-1}, e^{-1} + \varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1}[\cup [e^{-1} + \varepsilon, 1]$.

Pour tout entier $N > 0$ on pose $x_N = e^{-1/N}$.

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses **II.1** et **II.4**

II.E.1) Calculer $\int_0^1 g^+(t) dt$ et $\int_0^1 g^-(t) dt$.

II.E.2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \int_0^1 P(t) dt.$$

On considérera d'abord le cas particulier $P(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

II.E.3) Établir l'existence de deux polynômes P, Q à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g^-(x) - \varepsilon \leq P(x) \leq g(x) \leq Q(x) \leq g^+(x) + \varepsilon.$$

II.E.4) Établir l'existence d'un entier $N_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geq N_1$,

$$(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geq \int_0^1 P(t) dt - \varepsilon$$

et

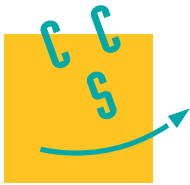
$$(1-x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leq \int_0^1 Q(t) dt + \varepsilon.$$

II.E.5) Dédurre des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geq N_1$

$$1 - 5\varepsilon \leq (1-x_N)A_N \leq 1 + 5\varepsilon.$$

II.E.6) Conclure.

• • • FIN • • •



Le but des deux premières parties est d'étudier l'existence d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. Les deux parties suivantes sont consacrées à des classes de fonctions pour lesquelles les dérivées successives en 0 de f déterminent complètement la fonction f .

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$). On notera $\binom{n}{p}$ ou C_n^p les coefficients binomiaux.

I Intervention des séries entières

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On cherche dans cette partie des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui sont somme d'une série entière sur un intervalle $]-\delta, \delta[$ pour au moins un réel $\delta > 0$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = u_n$.

I.A – Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, avec $\delta > 0$, donner une expression de $f^{(k)}(x)$ sur $]-\delta, \delta[$, et en déduire $f^{(k)}(0)$ en fonction de a_k pour tout $k \geq 0$.

I.B – Dans les exemples suivants, proposer une solution f , en précisant une valeur de δ convenable :

I.B.1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n$.

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$, et pour tout n impair, $u_n = 0$.

I.C – Pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n)!$, montrer qu'aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution du problème.

II Le théorème de Borel

II.A – Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II.A.1)

a) Montrer que pour tout naturel p il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1} .

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p - 2$.

c) Écrire dans le langage de calcul formel de votre choix un algorithme d'argument un entier p renvoyant la valeur de Q_p en fonction d'une indéterminée X .

On pourra utiliser la commande renvoyant, à partir d'une expression E et d'une variable x , la valeur de la dérivée de cette expression par rapport à cette variable que l'on pourra noter $\text{diff}(\mathbf{E}, \mathbf{x})$ ou $\mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{x}]$ selon le langage choisi.

II.A.2)

a) Montrer que pour tout entier naturel p

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g^{(p)}(x) = 0.$$

b) En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

II.B – Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par $h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t) dt}{\int_0^1 g(t) dt}$.

II.B.1) Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, \infty[$.

II.B.2) Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x .

a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi^{(k)}(x)|$$

II.C – Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si } n \geq 1 \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!} \varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$.

II.C.1)

a) Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$.

II.C.2) Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geq \frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq \frac{1}{\beta_n}$, on a $|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$.

II.C.3) Dédurre des questions précédentes que pour $n, j \in \mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

II.C.4) En considérant $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) = u_j$ (théorème de Borel).

III Un autre élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

III.A – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2} (|x + a_0| + |x - a_0| - 2|x|).$$

III.A.1) Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$, justifier sa continuité et tracer rapidement son graphe.

III.A.2) On pose $k = \frac{1}{a_0^2}$.

a) Pour tout réel x , montrer que $|f_0(x)| \leq \frac{1}{a_0}$.

b) Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.B – La première étape

On pose pour tout x réel

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1} \int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t) dt$$

III.B.1) Montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout x réel.

III.B.2) Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

III.B.3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_1(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

III.B.4) Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geq 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n} \int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t) dt$$

III.C.1) Montrer que f_n est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'_n(x)$ pour tout x réel.

III.C.2) Montrer que f_n est nulle en dehors de $[-\sum_{i=0}^n a_i, \sum_{i=0}^n a_i]$.

III.C.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $|f_n(x)| \leq \frac{1}{a_0}$ et que, si $p \leq n$, on a $|f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

III.C.4) Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

III.C.5) Montrer que pour tout naturel n

$$\int_{-S}^S f_n(t) dt = 1 \quad \text{où } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

III.D – La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

III.D.1)

a) Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , montrer que $|k_n(x)| \leq \frac{k}{2} a_n$.

b) En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.

Pour tout réel x , on note

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$$

III.D.2)

a) Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

b) Pour tout réel x réel, montrer que $|w(x)| \leq \frac{1}{a_0}$.

c) Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-S, S]$.

III.D.3)

a) Montrer que

$$\int_{-S}^S w(t) dt = 1.$$

b) En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

III.D.4)

a) Montrer que $\sum_{n \geq 2} (f'_n - f'_{n-1})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w , f_1 et $\sum_{n=2}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w'(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1}$.

III.D.5) Soit $p \geq 2$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq p+1} (f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w , f_p et $\sum_{n=p+1}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$.

c) En déduire que w est de classe C^p sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $|w^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

IV Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle $M = (M_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n > 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$M_0 = 1 \quad (\text{IV.2})$$

$$\forall n \geq 1, \quad M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1} \quad (\text{IV.3})$$

On note $\mathcal{C}(M)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ pour lesquelles il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ (dépendantes de f) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq AB^n M_n.$$

L'ensemble $\mathcal{C}(M)$ est dit classe associée à la suite M .

La classe $\mathcal{C}(M)$ est dite quasi-analytique si

$$\forall f \in \mathcal{C}(M) \quad (\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0) \Rightarrow f = 0.$$

IV.A – Quelques propriétés d'une classe

IV.A.1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(M)$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(M)$.

IV.A.2) Vérifier que $\mathcal{C}(M)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

IV.A.3)

a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, on a $M_k M_{n-k} \leq M_n$. On pourra étudier, pour p fixé, la monotonie de la suite $(M_n / M_{n-p})_{n \geq p}$.

b) En déduire que le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{C}(M)$ est un élément de $\mathcal{C}(M)$.

IV.B – Un exemple de classe quasi-analytique

On note U la suite définie par $U_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.B.1) Montrer que la suite U vérifie les conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3**.

IV.B.2) Soit $f \in \mathcal{C}(U)$; on fixe $A > 0, B > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq AB^n n!$$

a) Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel α vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(\alpha) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - \alpha| \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow f(x) = 0$.

c) Montrer que $\mathcal{C}(U)$ est une classe quasi-analytique.

IV.C –

IV.C.1) Montrer que si $\mathcal{C}(M)$ est quasi-analytique, alors $\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

IV.C.2) Montrer la réciproque ; on pourra montrer, lorsque $\mathcal{C}(M)$ n'est pas quasi-analytique, l'existence d'une fonction $g \neq 0$ dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, nulle sur $]-\infty, 0]$, puis considérer $h : x \mapsto g(x)g(c-x)$ pour un $c \in \mathbb{R}$ bien choisi.

IV.D – On se donne une suite réelle $M = (M_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les trois conditions **IV.1**, **IV.2** et **IV.3** et on considère les assertions :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{M_n} \right)^{1/n} \text{ converge} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{M_{n-1}}{M_n} \text{ converge} \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{la classe } \mathcal{C}(M) \text{ n'est pas quasi-analytique} \quad (\text{IV.6})$$

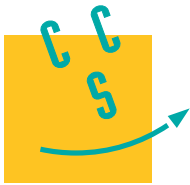
Pour tout $n \geq 1$, on note $\alpha_n = M_{n-1}/M_n$.

IV.D.1) Exprimer M_n en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et en déduire que **IV.4** $\Rightarrow$ **IV.5**.

IV.D.2) Démontrer en utilisant la **partie III** que **IV.5** $\Rightarrow$ **IV.6**.

On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que **IV.6** $\Rightarrow$ **IV.4**, ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.

• • • FIN • • •



Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie III traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie IV étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie V pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon. La partie VI utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

I Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{\text{cpm}}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de f*) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

I.A – On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B – On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

I.B.1) Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} |\psi(x)| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi^2}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm} .

I.C – Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D – Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1) Justifier que, pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt$$

I.E – On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1) Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi \xi y(\xi)$$

I.E.2) Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) dx = 1$.

II Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. On suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) d\xi \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) dt$$

II.A – Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

II.B – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

II.C – Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi i t \xi} d\xi \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi i t \xi} dt \right) d\xi$$

II.D – Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) d\xi$.

En déduire, en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (\text{II.1})$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II.E – Une application

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{1 + (2\pi \xi)^2} d\xi = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

III Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation II.1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

III.A – Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \int_{-1/2}^{1/2} (2\pi i \xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi = f(x)$$

III.C – On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

IV Cas des fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n , on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k x}$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

– la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \quad g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \quad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

– la suite de complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

IV.A –

IV.A.1) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et continue sur $] -1, 1[$.

IV.A.2) Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x) dx$.

IV.C – Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}, \quad S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

IV.D – Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=-n}^n c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx$$

IV.E – À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x) dx \right| \leq \frac{C}{2n+1}$$

IV.F – Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad G_t(x) = f'(x+t) \sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t)) \pi \cos(\pi x)$$

Établir l'existence d'un réel D , indépendant de x et de t , tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad |G_t(x)| \leq Dx^2$$

IV.G – Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2\pi i k t} \right| \leq \frac{E}{2n+1} \quad (\text{IV.1})$$

On pourra introduire la fonction $h_t : x \mapsto f(x+t)$.

V Formule d'échantillonnage de Shannon

Soit $f \in \mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi_k(x) = \psi(x+k) \quad (\text{V.1})$$

où ψ est définie à la question I.B.

V.A – Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

V.B – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

V.C – À l'aide de l'inégalité IV.1, prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^n d_k e^{2\pi i k x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

V.D – Démontrer que la suite de fonctions $\left(\sum_{k=-n}^n d_k \psi_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k \psi_k$.

V.E – Établir que $\forall j \in \mathbb{Z}, f(-j) = d_j$.

L'égalité $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.

VI Transformation de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$ (*transformée de Laplace de f*) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n e^{-xt} dt$$

Rappelons que, pour tout réel x , $[x]$ désigne la partie entière de x .

VI.A – On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

VI.A.1) Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont mutuellement indépendantes.

VI.A.2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

VI.A.3) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes

$$\begin{aligned} (S_n > n(\lambda + \varepsilon)) &\subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \\ (S_n \leq n(\lambda - \varepsilon)) &\subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \end{aligned}$$

VI.A.4) Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geq 0$.

Déduire du VI.A.3 que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq nx) = 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq nx) = 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.B – À l'aide de la question VI.A, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.C – Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq [nx]} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = \lambda$$

VI.C.1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq [nx]} (-1)^k \frac{n^k}{k!} (\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(y) dy$$

VI.C.2) En déduire que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles en dehors d'un segment.

• • • FIN • • •

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

Le but de ce problème est l'étude d'approximations discrètes de solutions d'équations différentielles avec conditions aux extrémités de l'intervalle de définition.

Première partie

Soit n un entier fixé, $n \geq 1$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles à n lignes, et I la matrice identité à n lignes. On note X_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, les coefficients d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On identifie un vecteur V de $\mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$ dans la base canonique, à la matrice colonne $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

1. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose

$$N(X) = \sup_{\substack{V \in \mathbf{R}^n \\ V \neq 0}} \left(\frac{\|XV\|}{\|V\|} \right).$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que, pour toutes matrices $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $N(XY) \leq N(X)N(Y)$.

Cette propriété est-elle vérifiée si l'on remplace la norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par la norme N_∞ définie par

$$N_\infty(X) = \sup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |X_{ij}| \quad ?$$

2. Soit $(X_p)_{p=1,2,\dots}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et X une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $\lim_{p \rightarrow +\infty} X_p = X$.

a) Montrer que, pour p assez grand, X_p est inversible.

b) Soit $V \in \mathbf{R}^n$. Montrer que, si X_p est inversible,

$$\|X_p^{-1}V - X^{-1}V\| \leq N(X^{-1})N(X - X_p)\|X_p^{-1}V\|.$$

En déduire qu'il existe un entier p_0 et un nombre C indépendant de p tel que, pour $p \geq p_0$,

$$\|X_p^{-1}V\| \leq C\|X^{-1}V\|.$$

c) Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} N(X_p^{-1} - X^{-1}) = 0$.

3. On dit qu'une matrice $X = (X_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (P) si les trois conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} X_{ii} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n & (P_1) \\ X_{ij} \leq 0 & \text{pour tous } i, j = 1, \dots, n \text{ tels que } i \neq j & (P_2) \\ \sum_{j=1}^n X_{ij} > 0 & \text{pour tout } i = 1, \dots, n. & (P_3) \end{cases}$$

Soit X une matrice qui possède la propriété (P) et soit $V \in \mathbf{R}^n$, de composantes $v_1, \dots, v_n$.

a) Montrer que si $XV = 0$, alors $V = 0$. [On considérera i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$.]

b) On suppose que XV a toutes ses composantes positives ou nulles. Montrer que V a toutes ses composantes positives ou nulles. [On considérera i_1 tel que $v_{i_1} = \min_{i=1, \dots, n} v_i$.]

4. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que X est inversible et que $X = \lim_{p \rightarrow +\infty} X_p$, où chaque X_p est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui possède la propriété (P) . Montrer que les coefficients de la matrice inverse X^{-1} sont positifs ou nuls.

Deuxième partie

Soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$.

5.a) Montrer qu'il existe une unique fonction u de classe C^4 sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.

c) On choisit pour f la fonction constante égale à 1. Déterminer la solution $\hat{u}$ du problème (1) dans ce cas.

Soit n un entier, $n \geq 1$. On pose $h = \frac{1}{n+1}$ et l'on considère la subdivision $(x_i)_{i=0,1,\dots,n+1}$ de l'intervalle $[0, 1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $x_{i+1} - x_i = h$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

6.a) Soit u une fonction à valeurs réelles de classe C^4 sur $[0, 1]$. Montrer que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)|,$$

où $u^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de u .

b) Que devient cette inégalité dans le cas où u est la fonction $\hat{u}$ trouvée à la question **5.c)** ?

7. Soit $F \in \mathbf{R}^n$, de composantes $f_1, \dots, f_n$. On désigne par U un vecteur de $\mathbf{R}^n$, de composantes $u_1, \dots, u_n$ et l'on pose $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0$.

a) Écrire sous forme matricielle $AU = F$ le système (2) linéaire en les inconnues $u_1, \dots, u_n$:

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

b) Montrer que, pour tout vecteur V de $\mathbf{R}^n$, le produit scalaire canonique $(AV|V)$ peut s'écrire comme une somme de carrés de nombres réels.

c) En déduire que la matrice A est inversible.

8.a) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de A . Montrer que les coefficients B_{ij} de B sont positifs ou nuls.

b) Soit $\hat{F}$ le vecteur de composantes toutes égales à 1. Déterminer les composantes de $B\hat{F}$ à l'aide des valeurs de la fonction $\hat{u}$ trouvée à la question **5.c)**. En déduire que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^n B_{ij} \leq \frac{1}{8}.$$

9. On suppose que $(u_1, \dots, u_n)$ est la solution du système (2) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, et l'on désigne par $u(x_1), \dots, u(x_n)$ les valeurs prises en $x_1, \dots, x_n$ par la solution u du problème (1).

a) Donner une majoration de $|u_i - u(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h et de la fonction f'' .

b) En quel sens peut-on dire que la solution du problème linéaire (2) avec $f_i = f(x_i)$ approxime la solution du problème (1) ?

c) On choisit la fonction f définie par $f(x) = \frac{25}{\sqrt{x^4 + 5}}$.

Trouver une valeur de l'entier n qui assure $|u_i - u(x_i)| < 10^{-4}$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

Troisième partie

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ comme dans la deuxième partie. Pour tout entier $p \geq 1$, on considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \frac{1}{p^2}u = f \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

10.a) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, il existe une unique fonction $u^{[p]}$ de classe C^4 sur $[0, 1]$ qui est solution du problème (3).

b) Montrer que la suite de fonctions $(u^{[p]})_{p \geq 1}$ tend simplement, quand p tend vers $+\infty$, vers une fonction u de classe C^4 sur $[0, 1]$, et que u est solution du problème (1) de la deuxième partie.

11. On choisit pour f la fonction constante égale à 1 et l'on note $\hat{u}^{[p]}$ la solution du problème (3) dans ce cas.

a) Déterminer $\hat{u}^{[p]}$.

b) Pour tout entier $p \geq 1$, étudier les variations de la fonction $x \in [0, 1] \mapsto \hat{u}^{[p]}(x) \in \mathbf{R}$.

c) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \hat{u}^{[p]}(x) < \frac{1}{8}$.

12. On reprend les notations de la deuxième partie.

a) Montrer que pour chaque entier $p \geq 1$, le système linéaire

$$(A + \frac{1}{p^2}I)U = F \quad (4)$$

a une solution unique, notée $U^{[p]}$. Que peut-on dire de $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^{[p]}$?

b) Soit $(u_1^{[p]}, \dots, u_n^{[p]})$ la solution du système (4) avec $f_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Donner une majoration de $|u_i^{[p]} - u^{[p]}(x_i)|$, valable pour tout $i = 1, \dots, n$, en fonction de h , p , f et f'' .

* *

*



Grandes déviations

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.

La partie I est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes A, B, C, toutes trois utilisées dans la partie II.

Notations et rappels

Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de X . On pose $S_0 = 0$ et, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $E(Y)$ l'espérance de Y .

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $V(Y)$ la variance de Y .

Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « Y est d'espérance finie » en « $E(Y) < +\infty$ ».

Si τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$, on dit que X vérifie (C_τ) si $E(e^{\tau|X|}) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

(P) pour Z et Y variables aléatoires réelles telles que $0 \leq Y \leq Z$, $E(Z) < +\infty \implies E(Y) < +\infty$

Étant données deux variables aléatoires Y et Z définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on dit que Y est *presque sûrement* égale à Z lorsque $P(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $Y_n, n \in B$.

I Premiers résultats

I.A – Une classe de variables aléatoires

I.A.1) Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque sûrement nulle. Montrer que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 \geq 0$ et que $E(U^2)E(V^2) - E(UV)^2 = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque sûrement nulle.

I.A.2)

a) On suppose que X est bornée. Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $E(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t , donner une expression simple de $E(e^{tX})$.

c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

Quels sont les réels t tels que $E(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t , donner une expression simple de $E(e^{tX})$.

I.A.3) Soient a et b réels tels que $a < b$. On suppose $E(e^{aX}) < +\infty$ et $E(e^{bX}) < +\infty$.

a) Montrer $\forall t \in [a, b], e^{tX} \leq e^{aX} + e^{bX}$. En déduire $E(e^{tX}) < +\infty$.

Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}; E(e^{tX}) < +\infty\}$?

b) Soient k dans $\mathbb{N}$, t dans $]a, b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y^k e^{ty}}{e^{ay} + e^{by}}$.

Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $E(|X|^k e^{tX}) < +\infty$.

d) On reprend les notations de la question b). Soient k dans $\mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c, d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leq M_{k,a,b,c,d}$.

I.A.4) Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et X vérifie (C_τ) .

a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $E(e^{tX}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour t dans I , on note $\varphi_X(t) = E(e^{tX})$.

b) Montrer que si $X(\Omega)$ est fini, φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I .

c) On suppose maintenant que $X(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(X = x_n)$.

En utilisant les résultats établis à la question I.A.3 et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complètement, montrer que φ_X est continue sur I et de classe C^∞ sur l'intérieur de I .

d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et k dans $\mathbb{N}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = E(X^k e^{tX})$.

e) Soit $\psi_X = \frac{\varphi'_X}{\varphi_X}$.

Montrer que ψ_X est croissante sur I et que, si X n'est pas presque sûrement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur I .

I.B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

I.B.1) Soit δ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$P(|S_n - nE(X)| \geq n\delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

I.B.2) Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < E(X) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = P(nu \leq S_n \leq nv)$$

I.C – Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{m+n} \geq u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

I.C.1) Soient m, q et r des éléments de $\mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geq q(u_m - ms) + u_r - rs$.

I.C.2) On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. En utilisant la division euclidienne de n par m , montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$,

$$\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

I.C.3) Montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = s$.

II Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

II.A – Exposant des grandes déviations

II.A.1) Montrer $P(X \geq a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geq na) = 0$.

II.A.2) Soient m et n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $S_{m+n} - S_m$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer $P(S_{m+n} \geq (n+m)b) \geq P(S_n \geq nb) P(S_m \geq mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème $P(X \geq a) > 0$.

II.A.3) Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(P(S_n \geq na))}{n}\right)_{n \geq 1}$ est bien définie et admet une limite γ_a négative ou nulle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque sûrement constante. On suppose également que a est strictement supérieur à $E(X)$.

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(P(S_n \geq na))_{n \geq 1}$ converge géométriquement vers 0) puis de déterminer γ_a .

II.B – Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction φ_X sont définis comme dans la question I.A.4.

II.B.1) Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $I \cap \mathbb{R}^+$

$$E(e^{tS_n}) = (\varphi_X(t))^n, \quad P(S_n \geq na) \leq \frac{\varphi_X(t)^n}{e^{nta}}$$

II.B.2) On définit la fonction $\chi : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(\varphi_X(t)) - ta \end{cases}$

a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

c) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \geq na) \leq e^{n\eta_a}$.

En déduire que $\gamma_a < 0$.

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérifiant les conditions $P(X \geq a) > 0$ et $a > E(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a .

i. X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

II.C – Le théorème de Cramer

On suppose ici que la borne inférieure η_a de la fonction χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$ est atteinte en un point σ intérieur à $I \cap \mathbb{R}^+$.

Soient t un nombre réel intérieur à I et tel que $t > \sigma$, b un nombre réel tel que $b > \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}$.

II.C.1)

a) Calculer $\sum_{x \in X(\Omega)} \frac{e^{tx}}{E(e^{tX})} P(X = x)$.

On admet alors (quitte à modifier $(\Omega, \mathcal{A}, P)$)

– qu'il existe une variable aléatoire X' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $X'(\Omega) = X(\Omega)$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X' = x) = \frac{e^{tx}}{E(e^{tX})} P(X = x)$$

– qu'il existe une suite $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi que X' .

b) Montrer

$$E(X') = \frac{\varphi_X'(t)}{\varphi_X(t)}, \quad E(X') > a$$

II.C.2) On admet que, si n dans $\mathbb{N}^*$ et si f est une application de $X(\Omega)^n$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$E(f(X'_1, \dots, X'_n)) = \frac{E(f(X_1, \dots, X_n) e^{tS_n})}{\varphi_X(t)^n}$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S'_n = \sum_{k=1}^n X'_k$. Montrer $P(na \leq S'_n \leq nb) \leq P(S_n \geq na) \frac{e^{ntb}}{\varphi_X(t)^n}$.

On pourra introduire l'application $f : \begin{cases} X(\Omega)^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } na \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nb \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

b) En utilisant les questions I.B.2, II.B.2c et le a) ci-dessus, montrer finalement que $\eta_a = \gamma_a$.

II.C.3) Dans cette question on pourra utiliser les résultats du II.B.2d.

a) Soit α dans $]0, 1/2[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\}, \left| k - \frac{n}{2} \right| \geq \alpha n \right\}, \quad U_n = \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k}$$

Déterminer la limite de la suite $(U_n^{1/n})_{n \geq 1}$.

b) Soit λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, α dans $]\lambda, +\infty[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq \alpha n}} \frac{n^k \lambda^k}{k!}$$

Déterminer la limite de la suite $(T_n^{1/n})_{n \geq 1}$.

• • • FIN • • •

Théorème 2. Soit $n \geq 1$ un entier et $A(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polynôme non nul tel que $a_k \in \{-1, 0, 1\}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Alors pour tout entier $L \geq 1$ on a

$$\sup_{\theta \in [-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]} |A(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{n^{L-1}}.$$

Troisième partie

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. On fixe $p, q \in [0, 1]$. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $\mathbf{S}_n$ une somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p . Alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leq \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) \leq e^{-n \frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on fixe $p, q \in [0, 1]$ et $(\mathbf{X}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p . On pose alors $\mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$.

12. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1 - p + pe^x)$ pour tout $x \geq 0$.

- Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, exprimer $g''(x)$ sous la forme $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$, où α et β sont des réels positifs pouvant dépendre de x .
- Montrer que $g''(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \geq 0$.
- Montrer que

$$\ln(1 - p + pe^x) \leq px + \frac{x^2}{8} \text{ pour tout } x \geq 0.$$

13. On suppose dans cette question que $p < q$.

- Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - q\right| \leq \left|\frac{\mathbf{S}_n}{n} - p\right|\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geq \frac{p+q}{2}n\right).$$

- Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p . Pour $u > 0$, calculer $\mathbb{E}(e^{u\mathbf{X}})$.
- Montrer que pour tout $u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{S}_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq e^{-n\left(\frac{p+q}{2}u - \ln(1-p+pe^u)\right)}.$$

Indication. On pourra admettre que si $(\mathbf{Z}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et prenant un nombre fini de valeurs, alors $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \mathbf{Z}_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i)$.

- Montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{S}_n \geq \frac{p+q}{2}n) \leq e^{-n \frac{(p-q)^2}{2}}$.

14. Démontrer le **Théorème 3**.

Quatrième partie

Dans cette partie, on s'intéresse à la reconstruction d'une suite de 0 ou 1 à partir d'un échantillon d'observations bruitées (on pourra utiliser le **Théorème 2** et le **Théorème 3**).

Plus précisément, étant donné un élément $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$, appelé la source, et un paramètre $p \in]0, 1[$ fixé, on considère la variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ à valeurs dans $\{0, 1\}^n$ construite comme suit :

- soient $(\mathbf{B}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ mutuellement indépendantes de Bernoulli de paramètre p ;
- on note $\mathbf{N}$ la variable aléatoire définie par

$$\mathbf{N} = \text{Card}(\{0 \leq i \leq n-1 : \mathbf{B}_i = 1\})$$

et $I_0 < I_1 < \dots < I_{\mathbf{N}-1}$ les éléments de l'ensemble aléatoire $\{0 \leq i \leq n-1 : \mathbf{B}_i = 1\}$ rangés dans l'ordre croissant ;

- on pose enfin

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \dots, \mathbf{O}_{n-1}(x)) = (x_{I_0}, x_{I_1}, \dots, x_{I_{\mathbf{N}-1}}, 0, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^n$$

avec la convention $\mathbf{O}(x) = (0, 0, \dots, 0) \in \{0, 1\}^n$ si $\mathbf{N} = 0$.

La variable aléatoire $\mathbf{O}(x)$ est appelée *observation bruitée de source x* . Ainsi, $\mathbf{O}(x)$ est obtenue à partir de x en gardant chaque coordonnée avec probabilité p , indépendamment les unes des autres (complétée par des 0 pour obtenir un vecteur de longueur n). Par exemple, si $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1, 1)$ et si $\mathbf{B}_0 = 0, \mathbf{B}_1 = 1, \mathbf{B}_2 = 0, \mathbf{B}_3 = 1, \mathbf{B}_4 = 1$ (ce qui arrive avec probabilité $p^3(1-p)^2$), alors $\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \dots, \mathbf{O}_4(x)) = (x_1, x_3, x_4, 0, 0) = (0, 1, 1, 0, 0)$.

15. Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$.

a. Montrer que $\cos(\theta) \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

b. Montrer que $\left| \frac{e^{i\theta} - (1-p)}{p} \right| \leq \exp\left(\frac{1-p}{2p^2} \cdot \theta^2\right)$.

Indication. On pourra calculer $\left| \frac{e^{i\theta} - (1-p)}{p} \right|^2$.

16. Soit $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ et considérons une observation bruitée

$$\mathbf{O}(x) = (\mathbf{O}_0(x), \mathbf{O}_1(x), \dots, \mathbf{O}_{n-1}(x))$$

de source x .

a. Si $0 \leq j \leq k \leq n-1$, montrer que $\mathbb{P}(\mathbf{N} \geq j+1 \text{ et } I_j = k) = p \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$.

b. Montrer que, pour tout $0 \leq j \leq n-1$, $\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] = p \sum_{k=j}^{n-1} x_k \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$.

c. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{O}_j(x) w^j \right] = p \sum_{k=0}^{n-1} x_k (pw + 1 - p)^k.$$

Dans la suite, on pose $L_n = \lfloor n^{1/3} \rfloor$, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel t .

17. Soient $x, y \in \{0, 1\}^n$ tels que $x \neq y$. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, $A_{x,y}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k - y_k) z^k$.

a. Justifier l'existence de $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{L_n}, \frac{\pi}{L_n}]$ tel que $|A_{x,y}(e^{i\theta_0})| \geq \frac{1}{n^{L_n-1}}$.

b. Démontrer que

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\mathbb{E}[\mathbf{O}_j(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_j(y)]| \cdot \left| \frac{e^{i\theta_0} - (1-p)}{p} \right|^j \geq \frac{p}{n^{L_n-1}}.$$

c. Justifier l'existence d'un entier $j_n(x, y)$ tel que $0 \leq j_n(x, y) \leq n-1$ et

$$|\mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)] - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)]| \geq \frac{p}{n^{L_n}} \exp\left(-\frac{1-p}{2p^2} \cdot \frac{\pi^2}{L_n^2} n\right).$$

Dans la suite, on fixe une fois pour toutes un entier n qu'il faut considérer comme étant très grand. Pour chaque couple $(x, y) \in (\{0, 1\}^n)^2$ tel que $x \neq y$, on fixe un entier $j_n(x, y)$ dont l'existence est prouvée dans la question 17c.

Soient $T \geq 1$ et $(E^1, E^2, \dots, E^T) \in (\{0, 1\}^n)^T$. Ainsi, pour $1 \leq i \leq T$ et $0 \leq j \leq n-1$, on a $E_j^i \in \{0, 1\}$. On dit que x est meilleur que y compte tenu de $E^1, E^2, \dots, E^T$ si

$$\left| \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T E_{j_n(x,y)}^i - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(x)] \right| < \left| \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T E_{j_n(x,y)}^i - \mathbb{E}[\mathbf{O}_{j_n(x,y)}(y)] \right|.$$

On pose alors $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = x$ si pour tout $y \neq x$, x est meilleur que y . Si l'on ne peut pas trouver de tel x on pose $R_{n,T}(E^1, E^2, \dots, E^T) = (0, 0, \dots, 0)$.

18. Démontrer que si $T_n \geq e^{3 \ln(n)n^{1/3}}$ alors pour tout $x \in \{0, 1\}^n$ et toute suite

$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)$$

de T_n variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$, on a

$$\max_{x \in \{0,1\}^n} \mathbb{P}\left(R_{n,T_n}\left(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^{T_n}(x)\right) \neq x\right) \leq u_n$$

où $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Indication. On pourra commencer par écrire, en le justifiant, que

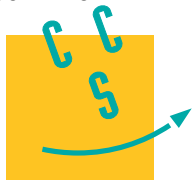
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(R_{n,T}(\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)) \neq x\right) \\ & \leq \sum_{\substack{y \in \{0,1\}^n \\ y \neq x}} \mathbb{P}\left(x \text{ n'est pas meilleur que } y \text{ compte tenu de } \mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)\right). \end{aligned}$$

On a donc démontré qu'en partant de $x \in \{0, 1\}^n$ inconnu, on peut retrouver x à partir de la donnée d'une suite

$$\mathbf{O}^1(x), \mathbf{O}^2(x), \dots, \mathbf{O}^T(x)$$

de T variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}^n$ mutuellement indépendantes de même loi que $\mathbf{O}(x)$ (qui représentent la donnée de T échantillons bruités obtenus à partir d'une même source), avec grande probabilité à partir de $e^{3 \ln(n)n^{1/3}}$ échantillons différents.

* * *



Ce problème a pour objet la représentation de la loi d'une variable aléatoire comme loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

On s'intéresse d'abord au cas d'une somme de deux variables à valeurs entières, puis au cas de variables aléatoires dont la loi est celle de la somme d'un nombre quelconque de variables indépendantes de même loi.

Notations

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont discrètes. On note $\mathbb{P}_X$ la loi d'une variable aléatoire X .

Si X et X' sont deux variables aléatoires définies sur les espaces probabilisés respectifs $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, la notation $X \sim X'$ signifie que X et X' ont même loi, c'est-à-dire $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice, définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

lorsque la série converge.

On pourra si nécessaire utiliser librement le résultat suivant.

Si $m \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathcal{L}$ est une loi de probabilité sur un espace probabilisé Ω_1 , alors il existe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_m$, définies sur un espace probabilisé Ω_m , mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{L}$.

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on désigne par $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble des entiers k tels que $a \leq k \leq b$.

I Variables aléatoires entières décomposables

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *décomposition* de X toute relation de la forme $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé pouvant être distinct de celui sur lequel X est définie.

On dit que X est *décomposable* si X admet une décomposition où Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement.

I.A – Premiers exemples

I.A.1) Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que $X \sim X'$ si et seulement si $G_X = G_{X'}$.

I.A.2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une décomposition $X \sim Y + Z$, où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Quelle relation lie G_X , G_Y et G_Z ?

I.A.3) Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$. Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geq 2$.

I.A.4) Soit $A(T) \in \mathbb{R}[T]$ le polynôme : $A(T) = T^4 + 2T + 1$.

a) Soit $U(T)$ et $V(T)$ deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $U(T)V(T) = A(T)$. Montrer que l'un des polynômes $U(T)$ ou $V(T)$ est constant.

On pourra distinguer les cas selon les valeurs des degrés de $U(T)$ et $V(T)$.

b) En déduire qu'il existe une variable aléatoire décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.

On pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A(T)$.

I.B – Variables uniformes

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \text{ si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ et } \mathbb{P}(X = k) = 0 \text{ sinon}$$

I.B.1) Variables uniformes décomposables

On suppose dans cette question que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b , supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que

$$X = aQ + R \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad R(\omega) \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$$

On pourra considérer une division euclidienne.

b) Préciser la loi de (Q, R) , puis les lois de Q et de R .

c) Montrer que X est décomposable. En déduire une expression de G_X comme produit de deux polynômes non constants que l'on précisera.

I.B.2) Variables uniformes non décomposables

On suppose dans cette question que n est un nombre premier et on établit que X n'est pas décomposable.

a) Montrer qu'il suffit de prouver le résultat suivant : si U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}$, alors l'un des deux polynômes U ou V est constant.

Dans ce qui suit, on fixe des polynômes U et V de $\mathbb{R}[T]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que

$$U(T)V(T) = 1 + T + \dots + T^{n-1}$$

On pose $r = \deg U$ et $s = \deg V$ et on suppose par l'absurde que r et s sont non nuls.

b) Montrer que $U(T) = T^r U\left(\frac{1}{T}\right)$ et $V(T) = T^s V\left(\frac{1}{T}\right)$.

On note alors $U(T) = 1 + u_1 T + \dots + u_{r-1} T^{r-1} + T^r$ et $V(T) = 1 + v_1 T + \dots + v_{s-1} T^{s-1} + T^s$ avec $r \leq s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

c) Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k v_k = 0$.

d) En déduire que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

e) Conclure.

On pourra d'abord montrer que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

II Variables infiniment divisibles : exemples

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est *infiniment divisible* si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires réelles discrètes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ mutuellement indépendantes, de même loi, et vérifiant $X \sim X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$. Dans cette définition, l'espace probabilisé Ω_m sur lequel sont définies les $X_{m,i}$ peut dépendre de m .

II.A – Variables bornées

II.A.1) On suppose que X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Montrer que X est infiniment divisible.

L'objectif de cette sous-partie est de montrer que toute variable aléatoire bornée infiniment divisible est presque sûrement constante.

Soit X une variable aléatoire bornée infiniment divisible définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M = \sup_{\Omega} |X|$, de sorte que $|X(\omega)| \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$.

II.A.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et telles que $X_1 + \dots + X_n$ ait même loi que X .

a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que $X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement, puis $|X_i| \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

b) En déduire que $\mathbb{V}(X) \leq \frac{M^2}{n}$, où $\mathbb{V}(X)$ désigne la variance de X .

II.A.3) Conclure que X est presque sûrement constante.

II.B – Étude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

II.B.1) Une variable binomiale est-elle infiniment divisible ?

II.B.2) Soit n un entier naturel non nul et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

II.B.3) Soit X une variable aléatoire de Poisson. Montrer que X est infiniment divisible.

II.B.4) Soit r un entier naturel non nul et soit $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires de Poisson mutuellement indépendantes. Montrer que $\sum_{i=1}^r iX_i$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

II.C – Séries de variables aléatoires à valeurs entières

II.C.1) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si A et B sont des événements de $\mathcal{A}$, et si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont leurs événements contraires respectifs, alors

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

b) En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

II.C.2) Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série des $\mathbb{P}(U_i \neq 0)$ soit convergente.

a) Soit $Z_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \geq n, U_i(\omega) \neq 0\}$. Montrer que (Z_n) est une suite décroissante d'événements et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

b) En déduire que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

c) On pose $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que G_{S_n} converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.

II.C.3) Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum \lambda_i$ est convergente, et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i , X_i suive une loi de Poisson de paramètre λ_i . On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.

a) Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

b) Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de Poisson de paramètre λ .

c) Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} iX_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme $X = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$ définit une variable aléatoire infiniment divisible.

III Variables entières infiniment divisibles : étude générale

III.A – Série entière auxiliaire

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

III.A.1) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X = k - j)$$

III.A.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer

$$|\lambda_k| \mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X = k - j) \leq (1 - \mathbb{P}(X = 0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \right)$$

III.A.3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer : $1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X = 0)^k}$.

III.A.4) Montrer que la série entière $\sum \lambda_k t^k$ a un rayon de convergence $\rho(X)$ supérieur ou égal à $\mathbb{P}(X = 0)$. Pour tout réel t de $] -\rho(X), \rho(X)[$, on pose

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k$$

À toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, on associe ainsi une série entière H_X . Dans la suite du problème, H_X sera appelée *série entière auxiliaire* de X .

III.A.5) Pour $t \in] -\rho(X), \rho(X)[$, montrer $G'_X(t) = H'_X(t)G_X(t)$, puis $G_X(t) = \exp(H_X(t))$.

III.A.6) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit H_X et H_Y leurs séries entières auxiliaires. Montrer $H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$ pour tout réel t vérifiant $|t| < \min(\rho(X), \rho(Y))$.

III.B – Variables aléatoires entières λ -positives

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, et soit H_X sa série entière auxiliaire :

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k t^k$$

On dira que X est λ -positive si $\lambda_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

On suppose dans cette sous-partie que X est λ -positive.

III.B.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\lambda_k \leq \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0)}$. En déduire que la série $\sum \lambda_k$ converge.

III.B.2) Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \exp(H_X(t))$ et que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0))$.

III.B.3) Soit (X_i) la suite de variables aléatoires définie au II.C.3. Montrer que $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

III.C – Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

Soit X une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

Le but de cette sous-partie est de montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) X est infiniment divisible ;
- (ii) X est λ -positive ;
- (iii) il existe une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables de Poisson indépendantes, comme au II.C.3, telle que $X \sim \sum_{i=1}^{\infty} iX_i$.

Dans les questions III.C.1 à III.C.4, on suppose que X est une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc n variables aléatoires indépendantes $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ de même loi telles que la variable aléatoire $X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ suive la loi de X .

III.C.1)

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $X_{n,1}$ est presque sûrement positive ou nulle.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.
- c) Montrer que les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

III.C.2)

- a) Montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = 1$.
- b) En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0$.

III.C.3) Soit H_X la série entière auxiliaire de X , comme elle est définie à la question III.A.4, et soit $\rho(X)$ son rayon de convergence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit H_n la série entière auxiliaire de $X_{n,1}$.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $nH_n = H_X$.
- b) En déduire, pour tous n et k dans $\mathbb{N}^*$

$$kn\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j)$$

III.C.4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(n\mathbb{P}(X_{n,1} = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers λ_k . En déduire que X est λ -positive.

III.C.5) Conclusion

- a) Montrer le résultat annoncé au début de cette sous-partie III.C.
- b) Comment adapter ce résultat aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$?
- c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

La variable aléatoire X est-elle infiniment divisible ?

• • • FIN • • •
