Vrai/faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera soigneusement la réponse.

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction $x \longmapsto \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est f.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente et est nulle.
3. Il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ suivant toutes les deux des lois de Rademacher. Alors la variable aléatoire XY suit une loi de Rademacher.
5. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On suppose que A est dense dans B et que B est dense dans E. Alors A est dense dans E.
6. La réunion de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
7. La seule partie convexe dense de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

Exercice préliminaire

8. Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}\left(AB^\top\right)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme associée au produit scalaire Φ. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme un espace topologique avec la topologie définie par cette norme. Dans la suite, toute partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munie de la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (O est un ouvert de A si, et seulement si, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $O = U \cap A$).

9. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
   (b) Énoncer et démontrer une caractérisation similaire des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide de leurs spectres.
10. Soient A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^\top AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
11. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont convexes.
12. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
14. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. On notera $R = S^{1/2}$.
15. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que $S^{1/2}$ est inversible, puis que $(S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}$. On notera plus simplement $S^{-1/2}$ la matrice $(S^{1/2})^{-1}$.

Première partie : jauge d'un corps convexe symétrique

Définition 3. *Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est un* corps convexe *si C est compact, convexe et si 0 appartient à l'intérieur de C, c'est-à-dire $0 \in \mathring{C}$. On dit que C est symétrique si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \in C) \iff (-x \in C).$$

On notera que cette notion de « corps convexe » n'est aucunement liée avec la notion de corps en algèbre.

16. Montrer que si C est la boule unité d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, alors C est un corps convexe symétrique.

Le but de cette partie est de caractériser les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ comme des boules unités d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire la jauge associée à un corps convexe symétrique :

Définition 4. *Soit C un corps convexe symétrique. On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application J, appelée jauge de C, par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \inf\left\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{\lambda}x \in C\right\}.$$

On se donne maintenant un corps convexe symétrique C.

17. Justifier que J, la jauge de C, est bien définie et que $J(0) = 0$.
18. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $J(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
19. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, $J(\mu x) = \mu J(x)$.
    (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $J(\mu x) = |\mu| J(x)$.
20. Montrer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) \leqslant 1\}$.
21. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit ε un réel strictement positif. On note :

$$x' = \frac{x}{J(x)+\varepsilon} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{y}{J(y)+\varepsilon}.$$

Soit $\alpha = \dfrac{J(x)+\varepsilon}{J(x)+J(y)+2\varepsilon}$ et $z = \alpha x' + (1-\alpha)y'$.

(a) Montrer que x' et y' appartiennent à C. En déduire que $z \in C$.
(b) En déduire que $J(x+y) \leqslant J(x) + J(y)$.

22. (a) Déduire de ce qui précède que J est une norme.
    (b) Quelle est la boule unité de cette norme J ?
    (c) En déduire que $\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) = 1\}$.
23. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes de $\mathbb{R}^n$ ayant la même boule unité, alors $N_1 = N_2$.

Deuxième partie : généralités sur les ensembles convexes

Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ le produit scalaire. On note $\|\cdot\|_E$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$.
Dans toute cette partie, on désigne par C un convexe compact de E.

24. Soit $a \in E$.
    (a) Montrer qu'il existe $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf\limits_{x\in C} \|a - x\|_E$. Justifier que si $a \notin C$, alors $\|a - x_a\|_E > 0$.
    (b) Soient $x_0, x_1 \in C$ tels que $\|a - x_0\|_E = \|a - x_1\|_E = \inf\limits_{x\in C} \|a - x\|_E$. Montrer que $x_0 = x_1$.
    Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\dfrac{x_0 + x_1}{2}$.

Ainsi, pour tout $a \in E$, il existe un unique $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf\limits_{x\in C} \|a - x\|_E$. On définit alors l'application $\pi_C : E \to C$ par la relation $\pi_C(a) = x_a$.

25. Soit $a \in E$.
    (a) Soit l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a - \pi_C(a), x\rangle_E$. Soit l'ensemble $H = \{x \in E,\ f(x) = f(a)\}$. Justifier que H est un sous-espace affine de E. Quelles sont les dimensions possibles pour H ?

(b) Vérifier que $f(\pi_C(a)) \leqslant f(a)$ et que cette inégalité est stricte si $a \notin C$.

(c) Montrer que pour tout $x \in C$, $f(x) \leqslant f(\pi_C(a))$.

Indication : On pourra considérer l'application $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui à t associe $\|a - ((1-t)\pi_C(a) + tx)\|_E^2$.

(d) Soit $b \in C$ tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b\rangle_E \leqslant 0$. Pour tout $x \in C$, montrer que $\|a - x\|_E \geqslant \|a - b\|_E$ et en déduire que $b = \pi_C(a)$.

Ainsi, on a montré que pour tout $a \in E$, $\pi_C(a)$ est l'unique point b de C tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b\rangle_E \leqslant 0$.

26. (a) Soient $a, a' \in E$. Montrer que $\|\pi_C(a') - \pi_C(a)\|_E^2 \leqslant \langle a' - a, \pi_C(a') - \pi_C(a)\rangle_E$.

(b) En déduire que π_C est 1-lipschitzienne.

27. Soit $a \in \partial C$. Soit $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E\backslash C$ qui converge vers a.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_p - \pi_C(a_p)}{\|a_p - \pi_C(a_p)\|_E}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de E et qu'elle possède une sous-suite convergeant vers un élément y de E.

(b) Montrer que y est non nul et que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - a\rangle_E \leqslant 0$.

Troisième partie : sur les ellipsoïdes

Définition 5. *Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On appelle* ellipsoïde associé à A *la partie $\mathcal{E}_A$ définie par*

$$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle \leqslant 1\}.$$

Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde *s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$.*

28. Soit $r > 0$. Montrer que $\overline{B}(0,r)$ (la boule fermée de centre 0 et de rayon r) pour la norme $\|\cdot\|$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et préciser une matrice $A_r \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $\overline{B}(0,r) = \mathcal{E}_{A_r}$.

29. Soit $\mathcal{E}_A$ l'ellipsoïde associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^{-1}\mathcal{E}_A = \{B^{-1}x,\ x \in \mathcal{E}_A\}$ est un ellipsoïde.

(b) Montrer que $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}B_2^n$.

(c) En déduire que $\mathcal{E}_A$ est un corps convexe symétrique.

(d) Quelle est la jauge J_A associée à $\mathcal{E}_A$?

(e) Montrer que cette jauge J_A est une norme euclidienne. On donnera la matrice du produit scalaire associé à cette norme dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

30. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ si et seulement si $A = B$.

31. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle Bx, x\rangle \leqslant \langle Ax, x\rangle$.

Définition 6. *Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde. On a montré qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. On définit alors* la mesure de $\mathcal{E}$, *noté $\mu(\mathcal{E})$, par*

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

32. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$. Soit r un réel strictement positif. Donner une relation entre $\mu(\overline{B}(0,r))$ et le volume de $\overline{B}(0,r)$.

33. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Préciser la mesure de $B^{-1}\mathcal{E}$ en fonction de la mesure de $\mathcal{E}$.

 Tournez la page S.V.P.

34. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leqslant 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.
35. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
    (a) Justifier que A admet n valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ et qu'il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Af_i = \lambda_i f_i$.
    (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que l'on a
    $$\lambda_k = \sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$
    où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.
    Indication : Si $V \in G_k$, on pourra considérer l'intersection de V avec le sous-espace engendré par $f_k, \dots, f_n$.
36. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. Montrer que $\mu(\mathcal{E}) \leqslant \mu(\mathcal{E}')$.

Quatrième partie : existence d'un ellipsoïde de mesure maximale

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.

37. Justifier que C est borné et qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}'$ tel que $C \subset \mathcal{E}'$.
38. Soit $\mathcal{A} = \{\mu(\mathcal{E}),\ \mathcal{E} \text{ ellipsoïde tel que } \mathcal{E} \subset C\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide et majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure notée α.
39. Justifier qu'il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, en notant $\mathcal{E}_p$ l'ellipsoïde associé à A_p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_p \subset C$ et $\lim_{p \to +\infty} \mu(\mathcal{E}_p) = \alpha$.
40. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
41. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit $0 < \lambda_1(p) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(p)$ les valeurs propres de A_p. Montrer que la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif, puis que la suite $(\lambda_n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
42. En déduire que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme N.
43. En déduire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{p \to +\infty} A_{\varphi(p)} = A$.
44. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
45. En déduire qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de mesure maximale inclus dans C.

Cinquième partie : unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale

46. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
47. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(I_n + A) \geqslant 1 + \det^{1/n}(A)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda I_n$.
48. En déduire que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(A + B) \geqslant \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $B = \lambda A$. *Indication* : on pourra utiliser la matrice $A^{1/2}$ introduite dans l'exercice préliminaire.
49. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geqslant \sqrt{\det(A)\det(B)}$. Caractériser les cas d'égalité.

50. Montrer l'unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale.

Sixième partie : le théorème de John, sens indirect

Définition 7. *Soit $u \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire $\psi_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \psi_u(v) = \langle u, v\rangle u.$$

Le but des parties 6 et 7 est d'établir le théorème suivant, dû à Fritz John.

Théorème 8. *Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale de C si et seulement si, $B_2^n \subset C$ et s'il existe des points $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial C$ et des réels $c_1, \dots, c_m > 0$ tels que $\sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{u_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.*

51. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, non nul.
    (a) Déterminer le noyau et l'image de ψ_u, ainsi que leurs dimensions.
    (b) Montrer que ψ_u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
    (c) Déterminer la trace de ψ_u.
    (d) Déterminer la matrice de ψ_u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans les questions numérotées de 52 à 53h, C est un corps convexe symétrique contenant B_2^n. On suppose de plus qu'il existe des points $u_1, \dots, u_m$ appartenant à $\partial C \cap S^{n-1}$ et des réels strictement positifs $c_1, \dots, c_m$ tels que $\sum_{i=1}^{m} c_i \psi_{u_i} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

52. Soit $v \in \partial C \cap S^{n-1}$. D'après la question 27, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - v\rangle \leqslant 0$.
    (a) Montrer que l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle y, x - v\rangle = 0\}$ est l'hyperplan tangent à S^{n-1} en v.
    (b) En déduire que pour tout $x \in C$, $\langle v, x\rangle \leqslant 1$.

53. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale.
    (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ strictement positifs tels que

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle x, e_j\rangle^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1 \right\}.$$

    Quitte à appliquer une isométrie, on suppose maintenant que $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \leqslant 1 \right\}.$$

    (b) Exprimer la mesure de $\mathcal{E}$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
    (c) Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \partial C \cap S^{n-1}$. Montrer que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^2 \leqslant 1$. *Indication* : On pourra utiliser le vecteur $w = (\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$.
    (d) Calculer $\sum_{i=1}^{m} c_i$.

 Tournez la page S.V.P.

(e) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle x, u_i \rangle^2$.

(f) Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on pose $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_i \alpha_j u_{i,j}^2 \leqslant n.$$

(g) En déduire que

$$\left(\prod_{j=1}^{n} \alpha_j \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leqslant 1.$$

(h) Conclure.

Septième partie : le théorème de John, sens direct

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que son ellipsoïde de mesure maximale est B_2^n. On note X l'ensemble des points de contact entre C et S^{n-1}, i.e. $X = S^{n-1} \cap \partial C$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire Φ défini dans l'exercice préliminaire.

54. Montrer que X est un compact non vide.

On pose $T = \{\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\psi_u),\ u \in X\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où, rappelons-le, $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On admet dans toute la suite que $\mathrm{conv}(T)$ (le plus petit convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient T) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème de Carathéodory). On souhaite donc montrer que $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \in \mathrm{conv}(T)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{1}{n}\mathrm{I}_n \notin \mathrm{conv}(T)$.

55. Montrer que $\mathrm{conv}(T)$ est inclus dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

56. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{conv}(T)$, la trace de M vaut 1.

57. (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{conv}(T), \quad f(M) > f\left(\frac{1}{n}\mathrm{I}_n\right).$$

(b) Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ unique telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \mathrm{Tr}(HM).$$

Quitte à changer f on peut supposer aussi que $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que H est de trace nulle (admis). On conserve cette hypothèse dans toute la suite.

58. En déduire que pour tout $u \in \partial C \cap S^{n-1}$, $\langle Hu, u \rangle > 0$.

59. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle (\mathrm{I}_n + \delta H)\, x, x \rangle \leqslant 1\}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $\mathcal{E}_\delta$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.

60. (a) Montrer qu'il existe $\eta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, pour tout $u \in \partial C$,

$$\langle (\mathrm{I}_n + \delta H)\, u, u \rangle > 1.$$

Indication : On pourra utiliser le fait suivant, après l'avoir justifié : pour toute réunion $\partial C = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \partial C)$ avec pour tout $i \in I$, U_i ouvert de $\mathbb{R}^n$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\partial C = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap \partial C)$.

(b) En déduire que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, $\mathcal{E}_\delta \subset C$.

61. Conclure.

Huitième partie : une conséquence du théorème de John

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C.

62. On suppose uniquement dans cette question que $\mathcal{E} = B_2^n$. Montrer que $B_2^n \subset C \subset \sqrt{n} B_2^n$.
63. En déduire que $\mathcal{E} \subset C \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.

Dans les questions numérotées de 64 à 66, on se propose de montrer que la constante $\sqrt{n}$ est optimale.
On pose $C = [-1, 1]^n$.

64. Vérifier que C est un corps convexe symétrique.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale. On note $J_\mathcal{E}$ la jauge de $\mathcal{E}$. On rappelle qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

65. Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, qui suivent une loi de Rademacher. Montrer que :

$$\mathrm{E}\left(\|(X_1, \ldots, X_n)\|_\mathcal{E}^2 \right) \geqslant n.$$

66. Conclure.

FIN DU SUJET

SUJET 2

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2006

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Matrices réelles de partie symétrique positive

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ sera muni du produit scalaire usuel noté $(.|.)$ et de la norme correspondante $\|.\|$. On notera $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, et I la matrice identité ; on munira $M_n(\mathbf{R})$ de la norme usuelle :

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\ ,\ x \neq 0\right\}\ .$$

Une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ sera dite *s-positive* si l'on a $(Ax|x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a.

2. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de A_s, pour que A soit s-positive.

Deuxième partie

3. Montrer que, pour toute matrice s-positive A et tout nombre réel $\lambda > 0$, la matrice $\lambda I + A$ est inversible.

On posera alors $R_\lambda(A) = (\lambda I + A)^{-1}$.

4. (Étude d'exemples) On examinera les deux exemples suivants :

a) $n = 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $n = 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour chacun de ces exemples : calculer Ker A, Im A, $R_\lambda(A)$, dire si $R_\lambda(A)$ (resp. $\lambda R_\lambda(A)$) admet une limite lorsque $\lambda \to 0$ et, si oui, donner cette limite.

Dans la suite de cette deuxième partie on se donne une matrice s-positive A et un réel $\lambda > 0$.

5. Démontrer les assertions suivantes :

5.a) $$AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A)\ .$$

5.b) Pour tout réel $\mu > 0$, on a

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)\ .$$

6. Démontrer l'inégalité $\|R_\lambda(A)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$, avec égalité si et seulement si $\det A$ est nul.

7. Démontrer les assertions suivantes :

7.a) Pour tout $x \in$ Im A, $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$.

7.b) L'espace $\mathbf{R}^n$ est somme directe de Ker A et Im A.

7.c) Lorsque λ tend vers 0, $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur Ker A parallèlement à Im A.

8. Montrer que l'application $\Phi : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ est indéfiniment dérivable, et exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puissances $\Phi^q : \lambda \mapsto \Phi(\lambda)^q$.

Troisième partie

Dans cette troisième partie on se donne une application F de $]0, +\infty[$ dans $M_n(\mathbf{R})$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda > 0\ ,\ \|F(\lambda)\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$;

(ii) $\forall \lambda\, ,\, \mu > 0\ ,\ F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu)$;

(iii) $F(1)$ est inversible.

9. Montrer que $F(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.

10.a) Calculer $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1}$.

10.b) Montrer que, lorsque $\lambda \to 0$, $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A et que l'on a, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I + A = F(\lambda)^{-1}$.

11. Montrer que les matrices $AF(\lambda)$ et A sont s-positives.

Quatrième partie

Étant donné une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$, on pourra admettre les résultats suivants :

(i) La série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente. Notons $\exp A$ sa somme.

(ii) La fonction de variable réelle $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA) \ .$$

12. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) pour tout $t \geqslant 0$, on a $\| \exp(-tA)\| \leqslant 1$;

(ii) pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la fonction $t \mapsto \| \exp(-tA)x\|^2$ est décroissante ;

(iii) A est s-positive.

On fixe maintenant une matrice A s-positive et un réel $\lambda > 0$.

13. Démontrer la convergence des intégrales

$$\rho(\lambda)_{i,j} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\exp(-tA))_{i,j} \, \mathrm{d}t \quad , \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \ .$$

On note $\rho(\lambda)$ la matrice de coefficients $\rho(\lambda)_{i,j}$.

14. Comparer $\rho(\lambda)$ et $R_\lambda(A)$. [On pourra calculer d'abord $A\rho(\lambda) + \lambda\rho(\lambda)$.]

15. On considère le premier exemple de la question **4**. Calculer $\exp(-tA)$, puis $\rho(\lambda)$. Retrouver la valeur de $R_\lambda(A)$ obtenue à la question **4**.

* *
*

Le but de ce problème est d'étudier certains aspects de la diagonalisabilité des matrices symétriques à coefficients rationnels. Ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, mais il se trouve que leurs valeurs propres ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur réelle. Le principal objectif de ce problème est de caractériser les nombres réels qui apparaissent comme valeurs propres de matrices symétriques à coefficients rationnels.

Notations

Dans tout le problème, si n et m sont des entiers naturels non nuls et K est un corps,

- on note $M_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K ainsi que $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans K ;
- on identifie l'espace vectoriel K^n à l'espace vectoriel des vecteurs colonnes $M_{n,1}(K)$;
- on note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques carrées de taille n à coefficients dans K ;
- si $A \in M_{m,n}(K)$, on note A^T la matrice transposée de A et, si $m = n$,

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

  son polynôme caractéristique, qui est donc un polynôme unitaire ;
- si $q_1, \ldots, q_n$ sont des éléments de K, on note $\mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_n)$ la matrice diagonale de taille n de coefficients diagonaux $q_1, \ldots, q_n$.

Première partie

1. Exhiber une matrice $M \in S_2(\mathbb{Q})$ dont $\sqrt{2}$ est valeur propre.

2. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas valeur propre d'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$. On suppose qu'il existe $M \in S_2(\mathbb{Q})$ telle que $\sqrt{3}$ est valeur propre de M.

2a. En utilisant l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, montrer que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 3$.

2b. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3.

2c. Montrer qu'il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) premiers entre eux dans leur ensemble tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

2d. Conclure.

3a. On se donne $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et une matrice $A \in S_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^2 = qI_n$. Construire une matrice $B \in S_{2n}(\mathbb{Q})$ commutant à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ et telle que $B^2 = (q+1)I_{2n}$.

3b. Montrer que pour tout $d \geqslant 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_k^2 = kI_n$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant d$.

3c. Soit $d \geqslant 1$ un entier. En déduire que si $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_i^2 = q_i I_n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

4. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde, supposant l'existence d'une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ (pour un certain entier n) dont $\sqrt[3]{2}$ est valeur propre.

4a. Montrer que $X^3 - 2$ divise le polynôme caractéristique de M. (On pourra commencer par prouver que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.)

4b. Conclure.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, construire une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ dont $\cos(\frac{2\pi}{n})$ est valeur propre. (On pourra commencer par construire une matrice orthogonale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui admet $e^{2i\pi/n}$ pour valeur propre.)

Deuxième partie

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$ à coefficients complexes que l'on écrit sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d.$$

On suppose que $a_0 \neq 0$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les racines de $P(X)$ (avec multiplicité). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit :

$$N_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_d^n.$$

6. Soit $Q(X)$ le polynôme réciproque de $P(X)$ défini par $Q(X) = X^d P(\frac{1}{X})$. Montrer que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= 1 + a_{d-1} X + \cdots + a_1 X^{d-1} + a_0 X^d \\ &= (1 - \lambda_1 X)(1 - \lambda_2 X) \cdots (1 - \lambda_d X). \end{aligned}$$

7. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \backslash (\mathbb{R} \cap \{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_d}\}) \to \mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$, et que le développement en série entière de f en 0 s'écrit :

$$\forall x \in]-r, r[\,, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1} x^n.$$

8a. Montrer que si $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$, alors $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$.

8b. Réciproquement montrer que si $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.

8c. En déduire que si $\mu_1, \ldots, \mu_d$ sont des nombres complexes et si $P(X) = \prod_{i=1}^{d} (X - \mu_i)$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{d} \mu_i^n \in \mathbb{Q}.$$

9. Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres complexes. On définit :

$$A(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$
$$B(X) = (X - \beta_1)(X - \beta_2) \cdots (X - \beta_m).$$

Montrer que si $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients rationnels, alors les polynômes

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i \beta_j) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i - \beta_j)$$

sont aussi à coefficients rationnels.

Troisième partie

On dit qu'un nombre complexe z est *totalement réel* (resp. *totalement positif*) s'il existe un polynôme $P(X)$ non nul à coefficients rationnels tel que :

(i) z est une racine de P, et

(ii) toutes les racines de P sont dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}_+$).

10. Soit M une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Montrer que les valeurs propres de M sont totalement réelles.

11a. Montrer que l'ensemble des nombres totalement réels est un sous-corps de $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le résultat de la question 9.)

11b. Montrer que l'ensemble des nombres totalement positifs est inclus dans $\mathbb{R}_+$, est stable par addition, multiplication et que l'inverse d'un nombre totalement positif non nul est totalement positif.

12. Soit x un nombre complexe. Montrer que x est totalement réel si et seulement si x^2 est totalement positif.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de montrer que, réciproquement, tout nombre totalement réel est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des nombres totalement réels et on **admet** qu'il existe une fonction $t : \mathscr{R} \to \mathbb{Q}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) pour $x, y \in \mathscr{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, on a $t(\lambda x + \mu y) = \lambda t(x) + \mu t(y)$

(ii) pour x totalement positif, on a $t(x) \geqslant 0$ et l'égalité est stricte si $x \neq 0$.

On considère un nombre z totalement réel non nul. Par définition, il existe un polynôme unitaire $Z(X) \in \mathbb{Q}[X]$ qui annule z. On écrit $Z(X)$ sous la forme :

$$Z(X) = X^d - \left(a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0\right)$$

avec $d \in \mathbb{N}^\star$ et $a_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. On suppose en outre que $Z(X)$ est choisi de façon à ce que d soit minimal parmi les degrés des polynômes unitaires $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(z) = 0$.

On considère la matrice S de taille $d \times d$ dont le coefficient (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant d$, vaut $t(z^{i+j})$. Pour $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on pose $B(X, Y) = X^T S Y$.

13a. Montrer que $B(X, X) > 0$ pour $X \in \mathbb{Q}^d$, $X \neq 0$.

13b. En déduire que la matrice S est inversible.

14. Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

15a. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec $e_i \in \mathbb{Q}^d$ pour tout i et $B(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

15b. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ et $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, tels que :

$$S = P^T \cdot \mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_d) \cdot P.$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

16. Calculer le polynôme caractéristique de M.

17a. Vérifier que la matrice SM est symétrique.

17b. En déduire que la matrice RMR^{-1} est symétrique où $R = \mathrm{Diag}(\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_d}) \cdot P$.

18. Construire une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2017 **FILIÈRE MP**

SUJET 4

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES – A – (XLCR)

(Duré: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Dans tout le problème
- E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
- Id est l'application identité sur E: $\mathrm{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
- $\mathrm{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E,
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E,
- $E^* = \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E,
- $\mathrm{A}(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\omega(\lambda x + y, z) = \lambda\omega(x, z) + \omega(y, z)\,, \qquad \omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z)\,,$$

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x)\,.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{rccc} \omega(x,\cdot): & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array}\right.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{rccc} \varphi_\omega: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}\right.$$

Un élément ω de $\mathrm{A}(E)$ est appelé **forme symplectique sur** E si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
Un élément J de $\mathrm{L}(E)$ est appelé **structure complexe sur** E s'il vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.
On dit qu'une forme symplectique ω sur E **dompte** une structure complexe J si $\omega(x, J(x)) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On note
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
- I_n la matrice unité de taille n,
- lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

• det l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
• ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
On identifie tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n.

2. Montrer que $\omega(x,x)=0$ pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et pour tout $x \in E$.

3. Soit $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $\mathcal{B}=(b_1,\ldots,b_n)$ une base de E.

   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = {}^tXMY$ où $X,Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$:

   $$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x = x_1b_1+\cdots+x_nb_n\,, \\ \\ y = y_1b_1+\cdots+y_nb_n\,. \end{array}$$

   On notera alors $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.

   (b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tM=-M$.

   (c) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{A}(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.

   (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
   ($\mathcal{E}_1$): ω est une forme symplectique sur E.
   ($\mathcal{E}_2$): Pour tout $x \in E\setminus\{0\}$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x,y)\neq 0$.
   ($\mathcal{E}_3$): $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ est inversible.

4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E, alors E est de dimension paire.

   Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n ***est un entier pair*** $\geqslant 2$.

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

   $$\begin{array}{rccc} \omega_0: & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & {}^tXJ_nY \end{array}$$

   est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

   Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω ***sur*** E.

   Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ ***de*** E ***telle que*** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)=J_n$.

6. Traiter le cas où E est de dimension 2.

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u : F \to \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\widetilde{u} : E \to \mathbb{R}$ dont la restriction à F coïncide avec u.

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \,:\, \forall y \in F,\, \omega(x,y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{rccc} \psi_F : & E & \to & F^* \\ & x & \mapsto & \varphi_\omega(x)|_F \end{array}\right.$$

où $\varphi_\omega(x)|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F.

(b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$.

(c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F?

(d) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$.

(e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F, alors $E = F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que ω dompte au moins une structure complexe sur E.

Partie II: Deux outils sur les polynômes

On note $\mathbb{R}_d[X]$ ***l'espace vectoriel des polynômes de degré*** $\leqslant d$ ***à coefficients réels, pour tout*** $d \in \mathbb{N}$***.***

10. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls de degrés respectifs p et q strictement positifs. Montrer que l'application linéaire $L_{P,Q}$ définie par

$$\left|\begin{array}{rccc} L_{P,Q} : & \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ & (V, W) & \mapsto & VP + WQ \end{array}\right.$$

est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Construire une application

$$\left|\begin{array}{rccc} r : & \mathbb{R}_d[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & r(P) \end{array}\right.$$

polynomiale en les coefficients de P, telle que, si $r(P)$ est non nul, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Indication: On pourra utiliser la question précédente.

12. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que la fonction f est non nulle. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.
Indication: On pourra utiliser le fait qu'un polynôme non nul à une variable n'a qu'un nombre fini de racines.

Dans les parties III et IV, on fixe deux formes symplectiques ω et ω_1 sur E.

Partie III: Réduction simultanée

13. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $\omega_1(x,y) = \omega(u(x),y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Montrer alors que u appartient à l'ensemble $\mathcal{S}$ défini par

$$\mathcal{S} = \big\{\, u \in \mathrm{GL}(E) \,:\, \forall (x,y) \in E^2,\, \omega\big(x,u(y)\big) = \omega\big(u(x),y\big) \big\}\ .$$

Dans les questions 14 à 19, on suppose que E est de dimension 4.

14. Soit $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_4$. Soit $U \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

    (a) Quelle relation y a-t-il entre les matrices J_4 et U?

    (b) Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$U = \begin{pmatrix} N & \alpha J_2 \\ \beta J_2 & {}^tN \end{pmatrix}\ .$$

    (c) Déterminer, en fonction de N, α et β les coefficients du polynôme T défini par $T(X) = \det(N - XI_2) + \alpha\beta$. Montrer que T est un polynôme annulateur de U.

Dans les questions 15 à 19, on suppose que u n'admet aucune valeur propre réelle.

Le but des questions 15 à 19 est de montrer qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = J_4 \quad \textbf{\textit{et}} \quad \mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega_1) = r \begin{pmatrix} 0 & -R_{-\theta} \\ R_\theta & 0 \end{pmatrix}$$

où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

15. Montrer que U est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et des vecteurs Z et Y de $\mathbb{C}^4$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$ tels que $UZ = \lambda Z$ et $UY = \lambda Y$.

16. Soient Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que $Z = Z_1 + iZ_2$ et $Y = Y_1 + iY_2$. Soient $(z_1, z_2, y_1, y_2) \in E^4$ de coordonnées respectives Z_1, Z_2, Y_1, Y_2 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\widetilde{\mathcal{B}} := (z_1, z_2, y_1, -y_2)$ est une base de E.

17. Montrer que

$$\begin{aligned} &\omega(z_1,z_2) = \omega(y_1,y_2) = 0\,,\\ &\omega(z_1,y_1) = -\omega(z_2,y_2)\,,\\ &\omega(z_1,y_2) = \omega(z_2,y_1)\,. \end{aligned}$$

18. Montrer que, quitte à remplacer Y par ξY avec $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bien choisi, on a $\omega(z_1, y_1) = -1$ et $\omega(z_1, y_2) = 0$.

19. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(u) = r \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$$

et conclure.

Jusqu'à la fin de cette partie, on ne fait plus d'hypothèse sur la dimension de E ni sur l'endomorphisme u. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ annulateur de u et une décomposition $P = P_1 \cdots P_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{R}[X]$. On note $F_j = \ker[P_j(u)]$ pour $j = 1, \ldots, r$.

20. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ et que F_j est stable par u pour $j = 1, \ldots, r$.

21. Montrer que, pour tous j et k appartenant à $\{1, \ldots, r\}$ et distincts, on a $F_k \subset F_j^\omega$ et $F_k \subset F_j^{\omega_1}$ (la notation F^ω est définie en question 7).

On dit alors que $F_1, \ldots, F_r$ sont deux à deux orthogonaux pour ω et pour ω_1.

22. En déduire que, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, les restrictions de ω et ω_1 à $F_j \times F_j$ sont des formes symplectiques sur F_j.

23. On suppose que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que E est la somme directe de sous-espaces de dimension 2 ou 4, deux à deux orthogonaux pour ω et ω_1, et sur lesquels les restrictions de ω et ω_1 sont des formes symplectiques.

Partie IV: Structures complexes domptées simultanément

Dans cette partie, nous allons étudier les liens entre les propositions

$(\mathcal{F}_1)$: ***Il existe une structure complexe domptée par ω et par ω_1.***
$(\mathcal{F}_2)$: ***Le segment $[\omega, \omega_1] = \{(1-\theta)\omega + \theta\omega_1; \theta \in [0,1]\}$ est inclus dans l'ensemble des formes symplectiques sur E.***

24. Soit u l'automorphisme de E défini en question 13. On suppose que $(\mathcal{F}_2)$ est satisfaite et que le polynôme caractéristique de u est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(\mathcal{F}_1)$ est satisfaite.
Indication: On pourra démontrer puis utiliser le fait que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^tXR_\phi X > 0$ et ${}^tXR_{\theta+\phi}X > 0$.

25. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble défini en question 13. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$, dont le polynôme caractéristique P est à racines au plus doubles dans $\mathbb{C}$, est dense dans $\mathcal{S}$.
Indication: On pourra utiliser $r(P')$ où l'application r est définie en question 11.

26. Que peut-on conclure?

Avertissement

La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite en particulier le candidat à produire des raisonnements précis et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes. Chaque partie est d'ailleurs largement indépendante des précédentes, une fois admis les résultats qui y sont démontrés.
Plus précisément, la partie 1 n'est utilisée que dans la partie 6. Les parties 4 et 5 sont mutuellement indépendantes ainsi qu'essentiellement du reste du problème : seules les formules équivalentes obtenues dans les question 4.5 et 5.6 sont utilisées dans la partie 6.

Notations

Soit ζ un nombre complexe. On note $\mathbf{Q}[\zeta]$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $\{\zeta^n, n \in \mathbf{N}\}$: c'est une $\mathbf{Q}$-algèbre
On note $\mathbf{Z}[\zeta]$ le sous-groupe additif de $\mathbf{Q}[\zeta]$ engendré par $\{\zeta^n, n \in \mathbf{N}\}$.
Un sous-corps de $\mathbf{C}$ qui est de dimension finie (vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel) est appelé un corps de nombres.
Soient n, k deux entiers. Si ζ est une racine n-ième de l'unité, le complexe ζ^k ne dépend que de la classe x de k dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et sera noté ζ^x.
Dans le cas particulier où $\zeta = \exp(\frac{2i\pi}{n})$, on notera τ_n la somme

$$\tau_n = \sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \zeta^{x^2}.$$

1. Préliminaires

Soit p un nombre premier impair et $y \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. On dit que y est un carré s'il existe $z \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ tel que $y = z^2$

1.1. Montrer l'égalité

$$\prod_{x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} x = \begin{cases} -y^{\frac{p-1}{2}} & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Indication : regrouper deux à deux dans le produit les termes $x, y/x$, $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$].

1.2. En déduire les égalités

$$\begin{cases} y^{\frac{p-1}{2}} = 1 & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}} = -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Généralités

2.1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un polynôme P unitaire à coefficients rationnels annulant ζ ;
(ii) La $\mathbf{Q}$-algèbre $\mathbf{Q}[\zeta]$ est un corps de nombres.

Soit V un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de V. Si $v_1, \cdots, v_n$ sont des éléments de V, on note $\mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_n$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers des v_i, $i = 1, \cdots, n$.

2.2. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un polynôme P unitaire à coefficients entiers annulant f ;
(ii) Il existe un entier n et des vecteurs v_i, $i = 1, \cdots, n$ engendrant V tels que

$$f(\mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_n) \subset \mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_n.$$

[Indication : pour (ii) $\Longrightarrow$ (i), on pourra introduire une matrice carrée dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} v_i, \ i = 1, \cdots, n$$

et considérer son polynôme caractéristique].

Un tel endomorphisme est dit *entier*.

2.3. Montrer que le composé et la somme de deux endomorphismes entiers f, g de V qui commutent (*ie* tels que $f \circ g = g \circ f$) sont entiers. [Indication : on pourra montrer qu'on peut choisir un entier n, des vecteurs v_i, $i = 1, \cdots, n$ comme dans (ii) de (2.2) qui conviennent à la fois pour f et g]. Montrer que ce n'est plus le cas en général si on ne suppose pas que les endomorphismes commutent.

Soit K un corps de nombre, muni de sa structure de $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. On dira que $x \in K$ est *entier* si l'endomorphisme de multiplication

$$m_x : \begin{cases} K & \to & K \\ y & \mapsto & xy \end{cases}$$

est entier. On note $\mathcal{O}_K$ l'ensemble des éléments de K qui sont entiers, qui est donc un sous-anneau de K d'après la question 2.3.

2.4. Montrer l'égalité $\mathcal{O}_K \cap \mathbf{Q} = \mathbf{Z}$.

3. Entiers des corps quadratiques

Soit $D \in \mathbf{Q}$ qui n'est pas le carré d'un rationnel. Si D est négatif, on notera $\sqrt{D}$ le complexe $i\sqrt{-D}$. Un corps de la forme $\mathbf{Q}[\sqrt{D}]$ (avec D non carré) est dit corps quadratique. On remarque que $(1, \sqrt{D})$ est une base de $\mathbf{Q}[\sqrt{D}]$. On note σ l'isomorphisme de corps

$$\sigma : \begin{cases} \mathbf{Q}[\sqrt{D}] & \to & \mathbf{Q}[\sqrt{D}] \\ a + b\sqrt{D} & \mapsto & a - b\sqrt{D} \end{cases}$$

3.1. Montrer que les seuls isomorphismes de corps de $\mathbf{Q}[\sqrt{D}]$ dans lui-même sont l'identité et σ.

3.2. Soit $D' \in \mathbf{Q}^*$. Montrer que $\mathbf{Q}[\sqrt{D}] = \mathbf{Q}[\sqrt{D'}]$ si et seulement si $D/D' \in \mathbf{Q}^2$.

3.3. Montrer qu'il existe un unique $d \in \mathbf{Z}$ sans facteur carré tel que $\mathbf{Q}[\sqrt{D}] = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$.

3.4. Soit K un sous-corps de $\mathbf{C}$ de dimension 2 sur $\mathbf{Q}$. Montrer que K est un corps quadratique.

Soit d un entier sans facteur carré et $K = \mathbf{Q}[\sqrt{d}]$.

3.5. Montrer que $x \in \mathcal{O}_K$ si et seulement si $x \in K$ et

$$\begin{cases} x + \sigma(x) \in \mathbf{Z} \\ x\sigma(x) \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Soit $\omega \in \mathcal{O}_K$ défini par

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{si } d \equiv 1 \mod 4 \\ \sqrt{d} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.6. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathbf{Z}^2 & \to & \mathcal{O}_K \\ (x, y) & \mapsto & x + y\omega \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens.

4. Un calcul analytique de τ_n.

On se donne n un entier ≥ 1. Pour $k = 0, \cdots, n-1$, on note f_k la fonction

$$f_k : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbf{C} \\ t & \mapsto & \exp(\frac{2i\pi(t+k)^2}{n}) \end{cases}$$

et $f = f_0 + \cdots + f_{n-1}$.

Tournez la page S.V.P.

4.1. Montrer que la suite de terme général

$$u_k = \sum_{m=-k}^{k} \int_0^1 f(t) \exp(-2i\pi mt) \mathrm{d}t$$

converge vers τ_n.

4.2. Montrer que la fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{C}$ qui à un réel x associe

$$\int_{-x}^{x} \exp\left(\frac{2i\pi t^2}{n}\right) \mathrm{d}t$$

admet une limite $I_n \in \mathbf{R}$ en $+\infty$.

4.4. Comparer I_n et I_1.

4.5. Montrer la formule

$$\tau_n = \frac{1 + i^{-n}}{1 + i^{-1}} \sqrt{n}$$

4.6. Soit K un corps quadratique. Montrer qu'il existe une racine de l'unité ξ telle que $K \subset \mathbf{Q}[\xi]$.

5. Un calcul algébrique de τ_n

Soit n un entier impair > 1 et ζ le complexe $\zeta = \exp(\frac{2i\pi}{n})$.
Soit V le $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n des fonctions de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}$. Soit φ l'endomorphisme de V qui à la fonction f associe $\varphi(f)$ définie par

$$\varphi(f) : \begin{cases} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{y \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} f(y)\zeta^{xy}. \end{cases}$$

5.1. Soit $f \in V$. Montrer l'égalité

$$\varphi \circ \varphi(f)(x) = nf(-x) \text{ pour tout } f \in V,\ x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

5.2. Diagonaliser $\varphi \circ \varphi$.

On remarque que

$$\tau_n = \sum_{x \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \zeta^{x^2}$$

est la trace de φ.

5.3. Montrer que le module $|\tau_n|$ est $\sqrt{n}$.

On cherche à calculer τ_n.
Soient a, b, c, d les multiplicités respectives des valeurs propres $\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}$ de φ.

5.4. Montrer les égalités $a + b = \frac{n+1}{2}$ et $c + d = \frac{n-1}{2}$ ainsi que $(a-b)^2 + (c-d)^2 = 1$.

5.5. En calculant $\det(\varphi)$, calculer a, b, c, d en fonction de n.

5.6. Montrer

$$\tau_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si} \quad n \equiv 1 \mod 4, \\ i\sqrt{n} & \text{si} \quad n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

(formule compatible avec la question 4.5).

6. Réciprocité quadratique

On considère deux nombres premiers impairs distincts p, q. On note L le corps de nombres $\mathbf{Q}[\exp(\frac{2i\pi}{p})]$ et K le corps quadratique $\mathbf{Q}[\tau_p]$, qui est contenu dans L. On note $\left(\frac{q}{p}\right)$ l'entier qui vaut 1 si la classe q modulo p est un carré et -1 sinon. On se propose de montrer par deux méthodes différentes la formule

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}. \tag{1}$$

Première méthode

6.1. Montrer l'égalité $\mathcal{O}_L \cap K = \mathcal{O}_K$.

6.2. Montrer la relation $\tau_p^q - \left(\frac{q}{p}\right)\tau_p \in q\mathcal{O}_K$.

6.3. Soit n un entier relatif. Montrer que si $n\tau_p$ est un élément de $q\mathcal{O}_K$, alors q divise n [Indication : utiliser la question 3.6].

6.4. Montrer l'égalité (1).

Seconde méthode

6.5. Montrer qu'il existe une unique bijection

$$\phi : \mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/pq\mathbf{Z}$$

telle que

$$\phi((x \mod q), (y \mod p)) = (xp + yq) \mod pq$$

pour tout $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.

6.6. Montrer la formule

$$\tau_{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)\tau_p\tau_q.$$

6.7. En déduire l'égalité (1) [Utiliser les formules obtenues aux questions 4.5 ou 5.6].

6.8. On pose dans cette question $K = \mathbf{Q}[i]$. En étudiant $(1+i)^q$ dans $\mathcal{O}_K$, montrer l'égalité

$$\left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}$$

[Indication : on s'inspirera de la question 6.2].

Une application

On admet le résultat difficile suivant :
Etant donnés des entiers a, b non nuls premiers entre eux, l'ensemble $\{ak + b, k \in \mathbf{Z}\}$ contient une infinité de nombres premiers.

6.9. Soit n un entier relatif. Soit S un ensemble fini de nombres premiers. On suppose que pour tout nombre premier $l \notin S$, la classe de n modulo l est un carré dans $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Montrer que n est le carré d'un entier.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2005

SUJET 6

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Endomorphismes d'espaces fonctionnels

Ce problème a pour but l'étude de certains endomorphismes des espaces de fonctions différentiables et des espaces duaux.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on désigne par E_n l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^n, définies sur l'intervalle $[-1,1]$; pour toute f de E_0 on pose

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\ ,\ x \in [-1,1]\}\ .$$

Enfin, on munit E_n de la norme π_n définie par

$$\pi_n(f) = \max\{\|f^{(k)}\|\ ,\ k = 0,1,\ldots,n\}\ .$$

(On ne demande pas de vérifier que π_n est effectivement une norme).

Première partie

1. Calculer $\pi_n(X^p)$ où $p \in \mathbf{N}$ et où X désigne la fonction $x \mapsto x$.

Pour tout f de E_n, $n \geqslant 0$ et tout g de E_n, $n \geqslant 1$, on pose

$$(A_n f)(x) = x\, f(x) \quad , \quad (B_n g)(x) = \int_0^1 g'(xt)dt \quad \text{pour tout } x \in [-1,1]\ .$$

2.a) Vérifier que $A_n f$ appartient à E_n, et que $B_n g$ appartient à E_{n-1}.

b) Montrer que A_n est une application linéaire continue de E_n dans lui-même, de norme égale à $n+1$, et que B_n est une application linéaire continue de E_n dans E_{n-1}, de norme égale à 1.

3. Calculer les produits $B_n A_n$ et $A_{n-1} B_n$, applications de E_n dans E_{n-1}.

4. On se propose maintenant de démontrer que le sous-espace image de A_n est le sous-ensemble F_n de E_n formé des fonctions g telles que $g(0) = 0$ et que, en outre, $\frac{1}{x}\Big(g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)\Big)$ admette une limite finie lorsque x tend vers 0.

a) Traiter le cas où $n = 0$.

b) Supposant maintenant $n > 0$, vérifier que Im A_n est inclus dans F_n.

c) Prenant g dans F_n et posant $f = B_n g$, montrer que f est de classe C^n sur $[-1, 1]$ privé de 0, puis étudier le comportement de $\frac{1}{x}\Big(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\Big)$ lorsque x tend vers 0.

d) Conclure.

Deuxième partie

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, de classe C^∞, définies sur $[-1, 1]$. Pour toute $f \in E$ on pose

$$\delta(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\pi_n(f)}{1 + \pi_n(f)} \ .$$

5. Démontrer les assertions suivantes :

a) Pour $f_1, f_2, f_3 \in E$, on a

$$\delta(f_1 - f_2) \leqslant \delta(f_1 - f_3) + \delta(f_2 - f_3) \ .$$

b) Étant donnés des éléments f et $f_i (i \in \mathbf{N})$ de E, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$
(ii) pour tout $n \geqslant 0$, $f_i^{(n)}$ converge uniformément vers $f^{(n)}$.

c) La fonction δ définie ci-dessus est-elle la seule pour laquelle les assertions **5.a)** et **5.b)** sont vraies ?

On désigne respectivement par A et B les endomorphismes de E définis par

$$(Af)(x) = x\, f(x) \quad , \quad (Bg)(x) = \int_0^1 g'(xt)dt \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1, 1] \ .$$

6.a) Déterminer les produits $A\,B$ et $B\,A$.

b) Déterminer les noyaux et les images de A et B.

7.a) Déterminer des fonctions $\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots$ sur $[0, 1]$ telles que l'on ait, pour toute $g \in E$,

$$(B^n g)(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)\, g^{(n)}(xt) dt\ .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n.]

b) Calculer $(B^n g)(0)$.

c) On fixe g dans E. Déterminer des polynômes P_n, $n = 0, 1, \ldots$ tels que l'on ait

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \geqslant 1 \quad , \quad (A^n\, B^n g)(x) = g(x) - P_{n-1}(x)\ .$$

[On pourra procéder par récurrence sur n et écrire $A^{n+1}\, B^{n+1} = A^n\, A\, B\, B^n$.]

d) Déduire de ce qui précède une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

8. Déterminer l'image de A^n et le noyau de B^n.

Troisième partie

On désigne par E' l'espace vectoriel des formes linéaires φ sur E possédant la propriété suivante : si des éléments f et $f_i (i \in \mathbf{N})$ de E sont tels que $\delta(f_i - f)$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$, alors $\varphi(f_i)$ tend vers $\varphi(f)$.

9. Vérifier que, si φ appartient à E', il en est de même des formes linéaires $\varphi \circ A$ et $\varphi \circ B$.

On note A' et B' respectivement les endomorphismes de E' ainsi définis. Pour tout $i \in \mathbf{N}$ et tout $\alpha \in [-1, 1]$, on note $\varphi_{\alpha;i}$ la forme linéaire sur $E : f \mapsto f^{(i)}(\alpha)$.

10. Pour n entier positif, déterminer $\mathrm{Im}\,(A')^n$ et $\mathrm{Ker}\,(B')^n$; montrer que les $\varphi_{0;i}$, $i = 0, \ldots, n-1$, forment une base de $\mathrm{Ker}\,(A')^n$.

11. Déterminer les éléments ψ de E' solutions de l'équation $(A')^n \psi = \varphi_{0;0}$.

Étant donné un nombre complexe α, on désigne par T_α l'endomorphisme de E défini par

$$(T_\alpha f)(x) = (x - \alpha)\, f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in [-1, 1]\ .$$

On pourra admettre les résultats suivants :

(i) si φ appartient à E', il en est de même de $\varphi \circ T_\alpha$. On notera T'_α l'endomorphisme de E' ainsi défini.

(ii) si $\alpha \in [-1, 1]$, $(T'_\alpha)^n$ est surjectif et $\mathrm{Ker}\,(T'_\alpha)^n$ admet pour base les $\varphi_{\alpha;i}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

12. Dans cette question on désigne par G un espace vectoriel et par $U_1, \ldots, U_r$ des endomorphismes de G, commutant deux à deux et tels que, pour $i \neq j$, on ait

$$\text{Ker } U_i = U_j(\text{Ker } U_i) \ .$$

Montrer que l'on a

$$\text{Ker } (U_1 \ldots U_r) = \text{Ker } U_1 + \ldots + \text{Ker } U_r \ .$$

13. Soit Q un polynôme à une indéterminée, à coefficients complexes ; notons T_Q l'endomorphisme de E défini par $(T_Q f)(x) = Q(x)\, f(x)$.

a) Vérifier que, si φ appartient à E', il en est de même de $\varphi \circ T_Q$. On note T'_Q l'endomorphisme de E' ainsi défini.

b) Préciser l'image de T'_Q et donner une base de son noyau.

* *
*

SUJET 7 ENS 2012 Math C

Avertissement et Notations

L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit.

L'objet de cette épreuve est l'étude des nombres de Pisot, qui interviennent dans différents domaines de l'arithmétique et de l'analyse. L'épreuve comporte quatre parties. Ces parties ne sont pas indépendantes (les parties 1 à 3 sont liées, la partie 4 ne dépend que de la partie 1). Les résultats de questions non-traitées peuvent être admis et utilisés dans les réponses aux questions suivantes, mais cela doit être clairement indiqué dans la copie.

Dans la suite, on notera $\mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Q}[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{Q}$). On utilisera les deux définitions suivantes:

- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *nombre algébrique*, s'il est racine d'un polynôme non-nul de $\mathbb{Q}[X]$.
- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *entier algébrique*, s'il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

Il est clair qu'un entier algébrique est un nombre algébrique, la réciproque étant fausse. D'autres définitions (dont celle des nombres de Pisot) sont données dans la partie 1.

Partie 1

1. Soit θ un nombre algébrique. Montrer que $I_\theta := \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\theta) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $\Pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, de degré minimal, et annulant θ. Le polynôme Π_θ est appelé *polynôme minimal de θ*.

2. Un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est dit *primitif* si ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ sont primitifs, leur produit PQ l'est aussi.

   Indication: On raisonnera par l'absurde. En notant $P = \sum a_k X^k, Q = \sum b_k X^k$ et $PQ = \sum c_k X^k$, on introduira un diviseur premier p de tous les c_k, ainsi que le plus petit entier N pour lequel p ne divise pas a_N.

3. En déduire que si θ est un entier algébrique, alors $\Pi_\theta \in \mathbb{Z}[X]$.

4. *On appelle nombre de Pisot un entier algébrique θ tel que:*

   i) $|\theta| \geq 1$.

   ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \theta$, $\Pi_\theta(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$.

   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres de Pisot. Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$.

5. Soit $\theta \in \mathcal{P}$. On admet qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, et des nombres complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ de module strictement plus petit que 1, tels que

$$\theta^n + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^n \in \mathbb{Z}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   En déduire que la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ est convergente. On montrera dans la partie 3 la réciproque de ce résultat.

Partie 2

Dans toute cette partie,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

désigne une série entière à coefficients complexes c_n, $n \in \mathbb{N}$, de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement infini). On note $D(0,R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

1. On suppose dans cette question que f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q(z) \neq 0$ et $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ pour tout $z \in D(0,R)$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \ldots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\beta_0 c_n \ + \ \beta_1 c_{n+1} \ + \ \ldots \ + \ \beta_p c_{n+p} = 0, \quad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{0.1}$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \ldots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que (0.1) soit vérifiée. Montrer que f est une fraction rationnelle.

3. On suppose que f est une fraction rationnelle. Montrer que les déterminants

$$\Delta_m := \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m & c_{m+1} & \ldots & \ldots & c_{2m} \end{vmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}$$

sont tous nuls à partir d'un certain rang.

4. On suppose réciproquement que $\Delta_m = 0$ pour tout m à partir d'un certain rang. On note p le rang minimal. On souhaite montrer que f est une fraction rationnelle. On suppose $p \geq 1$ (le cas $p = 0$ est trivial).

   (a) Montrer qu'il existe des complexes $\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}$ tels que

   $$C_{j+p} := \beta_0 c_j \ + \ \beta_1 c_{j+1} \ + \ \ldots \ + \ \beta_{p-1} c_{j+p-1} + c_{j+p}$$

   soit nul pour tout $j = 0, \ldots, p$.

   (b) Montrer que $\Delta_{p+1} = -\Delta_{p-1}(C_{2p+1})^2$.

   (c) Montrer que $C_{j+p} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

   Indication: on pourra raisonner par récurrence, et montrer que si C_{j+p} est nul pour tout $j \leq m-1$ ($m > p$), alors $\Delta_m = (-1)^{m+p}\Delta_{p-1}(C_{p+m})^{m-p+1}$.

   (d) En déduire que f est une fraction rationnelle.

5. On suppose que f est une fraction rationnelle, que l'on écrit sous forme irréductible:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \cdots + q_n z^n}, \quad z \in D(0,R)$$

avec P et Q premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, uniques à constante multiplicative près. On suppose de plus que f est à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

On admet que les coefficients p_i et q_j peuvent alors être choisis dans $\mathbb{Z}$ et premiers entre eux dans leur ensemble. On supposera désormais ces deux hypothèses satisfaites.

(a) Montrer que les coefficients q_j de Q sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(b) En utilisant le théorème de Bezout dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $r = Q(Uf + V)$.

(c) En déduire que r divise les coefficients de $Uf + V$.

Indication: on pourra s'inspirer du résultat de la question 2, Partie 1, en le généralisant aux séries entières.

(d) Conclure que $q_0 = \pm 1$.

Partie 3

Soient $\theta > 1$ et $\lambda > 0$ tels que la série de terme général $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ converge. L'objectif de cette partie est de montrer que θ est un nombre de Pisot. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n$, avec $a_n \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On introduit aussi $\eta_m := a_m - \theta a_{m-1}$, $m \geq 1$.

1. (a) Montrer que les séries de terme général ε_n^2 et η_n^2 convergent.

   (b) On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le déterminant $\Delta_n := |(a_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}|$. Montrer que

$$\Delta_n^2 \leq \left(\sum_0^n a_m^2\right)\left(\sum_1^{n+1} \eta_m^2\right)\left(\sum_2^{n+2} \eta_m^2\right)\cdots\left(\sum_n^{2n} \eta_m^2\right)$$

   Indication: on utilisera sans démonstration le lemme d'Hadamard suivant: pour toute matrice A réelle de taille n, de colonnes $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$|\det(A)| \leq \|A_1\|_2 \ldots \|A_n\|_2, \quad \text{où } \|\ \|_2 \text{ désigne la norme euclidienne sur } \mathbb{R}^n.$$

   (c) Déduire des questions précédentes que $\Delta_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. En utilisant les résultats de la partie 2, montrer qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux, tels que $Q(0) = 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

3. On garde les notations de la question précédente. Montrer que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, et que

$$f(z) = \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

4. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité ouvert.

5. Montrer que $(1 - |z|) f(z) \to 0$ quand $|z| \to 1$. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité fermé.

6. En déduire que θ est un nombre de Pisot.

Partie 4

On rappelle pour cette partie le résultat suivant, démontré dans les parties précédentes:

Soit $\theta \geq 1$. Si θ est un nombre de Pisot, la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ converge. Réciproquement, s'il existe $\lambda > 0$ tel que la série de terme général $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ converge, alors θ est un nombre de Pisot.

Soit $\theta > 1$. On introduit, pour tout $u > 0$,

$$\Gamma(u) := \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(u\theta^{-k})$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que dans le cas $\theta = 2$, $\Gamma(u) = \dfrac{\sin(2u)}{2u}$ pour tout $u > 0$.

   Indication: on fera bon usage de la formule $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

3. On suppose dans cette question que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

   (a) Montrer l'existence d'un $\delta > 0$, d'une suite réelle convergente $(\lambda_s)_{s\in\mathbb{N}}$, et d'une suite d'entiers strictement croissante $(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$ tels que:

   $$\text{pour tout } \ s \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \lambda_s < \theta, \ \text{ et } \ |\Gamma(\pi\lambda_s\theta^{m_s})| \geq \delta.$$

   On notera $u_s = \pi\lambda_s\theta^{m_s}$, et $\lambda \in [1, \theta]$ la limite des λ_s.

   (b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

   $$|\Gamma(u_s)| \ \leq \ |\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\ldots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|\,.$$

   En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

   $$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leq \ln(1/\delta^2).$$

   (c) En déduire que θ est un nombre de Pisot.

4. On suppose dans cette question que θ est un nombre de Pisot avec $\theta \neq 2$.

   (a) Montrer que $\theta^m \neq \frac{2k+1}{2}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^{-m})$ converge vers un nombre $A > 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   (c) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^{m})$ converge vers un nombre $B > 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   (d) En déduire que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

E.N.S. SAINT-CLOUD FONTENAY

OPTION MATH MATH 2

SUJET 8 1986

DURÉE : 4 heures

Une importance particulière sera attachée à la présentation et à la clarté des copies. Les parties I et II sont indépendantes.

I

Soit r un entier $r \geqslant 1$ et a un nombre réel strictement positif.

A

On considère une fonction f définie et de classe C^r sur l'intervalle $[0, a]$ qui vérifie

$$f(0) = 0,$$
$$f(x) < x \quad \text{pour} \quad x \in]0, a],$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, a].$$

1° Montrer que l'on a $f'(0) \leqslant 1$.

2° On définit une suite de fonctions f_n par $f_0(x) = x$ et $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que les fonctions f_n sont définies et de classe C^r sur l'intervalle $[0, a]$ et que leurs dérivées y sont strictement positives.

3° Montrer que la suite f_n converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, a]$.

B

4° Soient λ un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1[$ et h_1 une fonction continue strictement croissante sur $[\lambda, 1]$ qui vérifie

$$h_1(\lambda) = f(a),$$
$$h_1(1) = a.$$

Montrer qu'il existe une fonction h, unique, sur l'intervalle $]0, 1]$ telle que

(i) $h(x) = h_1(x)$ pour $x \in [\lambda, 1]$,

(ii) $h(x) \in]0, a]$ pour $x \in]0, 1]$,

(iii) $h(\lambda x) = f(h(x))$ pour $x \in]0, 1]$.

Montrer que h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$ et que l'on a $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

5° Montrer que si $\dfrac{h(x)}{x}$ admet une limite (finie) non nulle en 0, on doit avoir $\lambda = f'(0)$.

C

6° On se donne $\lambda \in]0, 1[$. Soient g, h deux fonctions définies, continues et strictement croissantes sur l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifient

(i) $h(0) = g(0) = 0$, $h(1) = g(1) = a$.

(ii) Pour tout $x \in [0, 1]$ on a $h(\lambda x) = f(h(x))$, $g(\lambda x) = f(g(x))$.

On pose $K(x) = g^{-1}(h(x))$ pour $x \in [0, 1]$.

a. Montrer que K est définie, continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ et que l'on a $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

b. Si K est dérivable en 0, montrer que $K(x) = x$.

c. Montrer qu'il existe des fonctions K continues, strictement croissantes sur $[0, 1]$ qui vérifient $K(0) = 0$, $K(1) = 1$ et $K(\lambda x) = \lambda K(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, mais qui sont différentes de la fonction $x \longmapsto x$.

D

Dans cette partie, on suppose que $\lambda = f'(0) \in]0, 1[$ et que f est de classe C^r et $r \geqslant 2$.

7° Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in [0, a]$ et tout entier $n \geqslant 0$ on ait

$$f_n(x) \leqslant c(\lambda + \varepsilon)^n x.$$

8° Soit ψ la fonction définie sur l'intervalle $[0, a]$ par $\psi(0) = 0$ et $\psi(x) = \log \dfrac{f(x)}{\lambda x}$ pour $x \in]0, a]$.

a. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $[0, a]$.

b. Montrer que la série $\sum_{i \geqslant 0} \psi \circ f_i$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, a]$. Soit Ψ sa somme.

c. On pose $g(x) = x \exp \Psi(x)$ pour $x \in [0, a]$. Montrer que $g(f(x)) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in [0, a]$.

d. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c' > 0$ telle que l'on ait pour tout $x \in [0, a]$ et tout entier $i \geqslant 0$

$$f_i'(x) \leqslant c'(\lambda + \varepsilon)^i.$$

e. Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $[0, a]$ et que sa dérivée y est strictement positive.

Tournez la page S. V. P.

E

9° On définit une fonction f sur l'intervalle $[0, a]$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \lambda x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right) \quad \text{pour} \quad x \in]0, a].$$

On suppose que λ et a sont tels que $0 < f(x) < x$ pour $x \in]0, a]$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, a]$, que sa dérivée y est strictement positive et que l'on a $f'(0) = \lambda$.

b. Montrer que $\lambda^{-n} f_n(a)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Soit b un nombre strictement positif. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $h : [0, b] \longrightarrow [0, a]$, dérivable en 0, telle que $h(\lambda x) = f(h(x))$.

II

Étant donné une fonction de variable réelle v, de classe C^∞ au voisinage de 0, on lui associe une série entière $\Sigma v_n z^n$ dite développement de Taylor de v en zéro définie par

$$v_0 = v(0), \quad v_i = \frac{v^{(i)}(0)}{i!}.$$

On considère dans cette partie un polynôme à coefficients complexes

$$P(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i \quad (P(0) = 0).$$

1° Soit une série entière $h(z) = \sum_{i \geqslant 0} h_i z^i$ telle que $h(0) = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^{N} a_i (h(z))^i$ est une série entière $\sum_{i \geqslant 1} b_i z^i$ dont le disque de convergence contient celui de h. Montrer que l'on a pour tout entier $i \geqslant 1$:

$$b_i = \sum_{k=1}^{\inf(i, N)} a_k \left(\sum_{j_1 + \ldots + j_k = i, j_p \geqslant 1} h_{j_1} \ldots h_{j_k} \right).$$

2° Soit c un nombre réel strictement positif. On considère la fonction v définie dans un voisinage de 0 par

$$v = \frac{1}{2(1+c)} \left(1 + x - \sqrt{1 - 2(1+2c)x + x^2}\right).$$

a. Montrer que v est de classe C^∞ au voisinage de 0.

b. On note $\Sigma v_n z^n$ le développement de Taylor de v en 0. Montrer que $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et que la série entière $\Sigma v_n z^n$ converge pour

$$|z| < (\sqrt{c} + \sqrt{1+c})^{-2}.$$

(On pourra décomposer le radical en facteurs du premier degré.)

c. Montrer que la fonction v vérifie pour x dans un voisinage de 0

$$\frac{c\, v(x)^2}{1 - v(x)} = v(x) - x.$$

d. En déduire que l'on a pour $n \geqslant 2$

$$v_n = c \sum_{k \geqslant 2} \sum_{\substack{j_1 + \ldots + j_k = n \\ j_p \geqslant 1}} v_{j_1} \ldots v_{j_k}.$$

3° On pose $a_1 = \lambda$ et on suppose $|\lambda| \neq 1, 0$. On définit une suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres complexes par la relation de récurrence : $h_1 = 1$ et, pour $i \geqslant 2$

$$h_i = \frac{1}{\lambda^i - \lambda} \sum_{k=2}^{\inf(i, N)} a_k \left(\sum_{j_1 + \ldots + j_k = i, j_p \geqslant 1} h_{j_1} \ldots h_{j_k} \right).$$

Montrer que l'on peut choisir le nombre réel c de la question 2° de façon à avoir pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|h_n| \leqslant v_n.$$

4° Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\Sigma_{n \geqslant 1} h_n z^n$ est strictement positif. On note h la somme. Montrer que la fonction h vérifie au voisinage de l'origine

$$P(h(x)) = h(\lambda x).$$

Le sujet comprend 6 pages numérotées de 1 à 6

⋆ ⋆ ⋆

Soit d un entier valant 1 ou 2. On rappelle qu'une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs complexes est un élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{(t,s)\mapsto t^k s^\ell \,:\, k,\ell\in\mathbb{N}\}$.

Une fonction $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ est dite *bornée* s'il existe une constante positive M pour laquelle l'inégalité $|g(x)|\leqslant M$ est vraie pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$.

Une fonction $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ est dite à *décroissance rapide* si pour toute fonction polynômiale $P:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, la fonction gP est bornée sur $\mathbb{R}^d$. L'ensemble des fonctions continues à décroissance rapide est noté $\mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Une fonction $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ est dite à *croissance lente* s'il existe une fonction polynômiale $P:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^*$ pour laquelle h/P est bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ et tout multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}^2$ on pose

$$\partial^\alpha f=\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}f.$$

Par un abus de notation, si $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $n\in\mathbb{N}$, on notera $\partial^n f$ la fonction $f^{(n)}$ dans les deux lignes qui suivent. On introduit les ensembles suivants :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})=\Big\{f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,:\,\forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha f \text{ est à décroissance rapide }\Big\},$$
$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})=\Big\{h\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,:\,\forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha h \text{ est à croissance lente }\Big\}.$$

Pour $k\in\{1,2\}$ on considère les endomorphismes suivants de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$:

$$\partial_k : f\longmapsto \partial_k f,\qquad \mathrm{M}_k : f\longmapsto\{(x_1,x_2)\mapsto x_k f(x_1,x_2)\},$$

et les endomorphismes suivants de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$:

$$\mathrm{D} : f\longmapsto f',\qquad \mathrm{M} : f\longmapsto\{t\mapsto tf(t)\}.$$

Pour tout élément g de $\mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, la fonction $(t,s)\mapsto g(t,s)(1+t^2)(1+s^2)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. En particulier, par le théorème de convergence dominée, les deux fonctions

$$t\mapsto\int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}s,\qquad s\mapsto\int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}t$$

sont bien définies, continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On admet dans tout le sujet le Théorème de Fubini sur $\mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ qui exprime l'égalité suivante pour les éléments g de cet espace :

$$\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}\left\{\int_{\mathbb{R}} g(t,s)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s.$$

On notera dorénavant le nombre complexe précédent

$$\int_{\mathbb{R}^2} g,$$

et on pourra utiliser sans la justifier l'inégalité

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} g\right|\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}|g|.$$

Le but de ce sujet est de démontrer un résultat fondamental établi en 1974 et par la suite considérablement généralisé dans le cadre de l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La partie **III** utilise des résultats de la partie **II**. La partie **IV** utilise ceux des parties **II** et **III**. La partie **V** dépend de toutes les précédentes.

I. Convergence faible

Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace préhilbertien réel. On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge *faiblement* vers $v \in H$ si, pour tout $z \in H$, $\langle v_n, z\rangle$ converge vers $\langle v, z\rangle$; ce mode de convergence sera dorénavant noté $v_n \rightharpoonup v$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *fortement* vers v lorsque $\|v - v_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$; ce mode de convergence est classiquement noté $v_n \to v$.

(I.1) Démontrer que la limite faible, lorsqu'elle existe, est unique.

(I.2) Démontrer que la convergence forte implique la convergence faible.

(I.3) Démontrer que si $v_n \rightharpoonup v$ et si $\|v_n\|$ converge vers $\|v\|$, alors $v_n \to v$.

(I.4) Démontrer que si H est de dimension finie, alors la convergence faible équivaut à la convergence forte.

(I.5) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Démontrer que si $v_n \rightharpoonup v$ et $w_n \to w$, alors $\langle v_n, w_n\rangle \to \langle v, w\rangle$.

(I.6) Soit $H = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire suivant pour $f, g \in H$

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(I.6.a) En notant $c_n : t \mapsto \cos(nt)$, montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H et que $c_n \rightharpoonup 0$.
Indication : On pourra utiliser une intégration par parties.

(I.6.b) Montrer cependant que $(\langle c_n, c_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Le reste du sujet se consacre à l'élaboration d'un cadre préhilbertien précis que l'on exploitera dans la partie **V** pour assurer le passage à la limite dans un produit $\langle v_n, w_n\rangle$ sans qu'aucune des deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge fortement.

II. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$

Dans cette section nous allons établir quelques propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui nous seront utiles pour la suite.

On admet dans tout le sujet que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ stables par les opérateurs ∂_k et M_k lorsque $d = 2$ et par les opérateurs D *et* M *lorsque $d = 1$.*

(II.1) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Montrer qu'en fixant l'une ou l'autre de ses variables, la fonction d'une variable obtenue est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(II.2) Exhiber un élément $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ qui ne s'annule en aucun point.

(II.3) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, alors la fonction

$$\begin{aligned} f \otimes g : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto f(x_1)g(x_2) \end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(II.4) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ ne contenant que des fonctions bornées. On suppose que V est stable par les opérateurs ∂_k et M_k pour $k \in \{1,2\}$. Démontrer que $V \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(II.5) Montrer que si $(h,f) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, alors $hf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.
Indication : On peut traiter cette question en utilisant la précédente.

(II.6) À l'aide du théorème de convergence dominée sur $\mathbb{R}$, établir la version bidimensionnelle suivante : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et s'il existe un élément $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ telle que $|f_n| \leqslant |g|$ pour tout n, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

III. Endomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec les opérateurs ∂_k et M_k

Dans cette section nous allons montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec les opérateurs ∂_k et M_k est nécessairement une homothétie. Nous commençons par le cas d'une seule variable, où les opérateurs précédents sont simplement remplacés par D et M.

(III.1) Soit L un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ commutant avec M.

(III.1.a) En utilisant une formule de Taylor, montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors f s'écrit $f(s) = (s-a)g(s)$ où $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(III.1.b) Démontrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ s'annule en $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{L}(f)$ également.

(III.1.c) Soient $g, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(a)\mathrm{L}(g)(a) = g(a)\mathrm{L}(f)(a)$.

(III.1.d) En déduire l'existence d'une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{L}(f) = \psi f$.

(III.1.e) Montrer que si L commute en plus avec D, alors L est une homothétie, *i.e.* qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on ait $\mathrm{L}(f) = \alpha f$.

(III.2) Soit T un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutant avec tous les opérateurs ∂_k et M_k, pour $k = 1, 2$.

(III.2.a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \mu_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \{t \mapsto f(t,a)\}. \end{aligned}$$

Démontrer que μ_a est une surjection linéaire.

On admet l'égalité $\operatorname{Ker}\mu_a = \operatorname{Im}\nu_a$*, où* ν_a *désigne l'endomorphisme* $\mathrm{M}_2 - a\,\mathrm{I}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ *avec* I *l'endomorphisme identité sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$*. La preuve de cette égalité est analogue à celle développée pour la question* **(III.1.a)**.

(III.2.b) Montrer que pour $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, l'application $\mu_a \circ \mathrm{T}$ est constante sur l'ensemble $\mu_a^{-1}(h)$.

La valeur que prend $\mu_a \circ \mathrm{T}$ *sur* $\mu_a^{-1}(h)$ *sera par la suite notée* $\mathrm{L}_a(h)$ *; c'est un élément de* $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(III.2.c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'application L_a est un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ commutant avec D et M.

(III.2.d) En déduire l'existence d'une fonction $\beta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ telle que pour tout couple (t,a) de $\mathbb{R}^2$, on ait $\mathrm{T}(f)(t,a) = \beta(a)f(t,a)$. Conclure.

IV. La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^2$, on note e_ξ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par la formule $e_\xi(x) = e^{-i(x|\xi)}$, où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$.

(IV.1) Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ on pose

$$\begin{aligned}\Gamma(f) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (z,t) &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-isz} f(t,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(IV.1.a) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\Gamma(f)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

(IV.1.b) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\Gamma(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ en exprimant $\partial_1\Gamma(f)$ et $\partial_2\Gamma(f)$.

(IV.1.c) Démontrer que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\partial^\alpha\Gamma(f)$ est bien définie et qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ telle que $\partial^\alpha\Gamma(f) = \Gamma(g)$. En déduire le caractère $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ de $\Gamma(f)$.

(IV.2) En utilisant **(II.4)**, montrer que $\Gamma(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

(IV.3) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, $e_\xi f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$*, on introduit sa* transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\widehat{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \xi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} e_\xi f.\end{aligned}$$

(IV.4) Que vaut $\Gamma \circ \Gamma(f)$? En déduire que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$.

De la même manière qu'en **(II.6)** *nous avons établi un théorème de convergence dominée bidimensionnel, il est possible de démontrer un théorème de dérivation sous l'intégrale et une formule d'intégration par parties sur* $\mathbb{R}^2$*. Avec l'aide de tels résultats on peut démontrer les formules suivantes pour* $k = 1, 2$*, que l'on admet jusqu'à la fin de l'énoncé :*

$$\partial_k \widehat{f} = -i\,\widehat{\mathrm{M}_k f},$$
$$\mathrm{M}_k \widehat{f} = -i\,\widehat{\partial_k f}.$$

(IV.5) Montrer l'existence d'une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que pour tout élément $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, $\widehat{\widehat{f}} = \alpha \check{f}$, où $\check{f}$ est définie par $\check{f}(x) = f(-x)$.

(IV.6) On considère sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ l'endomorphisme $h \mapsto h^\star$ défini par $h^\star(x_1,x_2) = h(x_2,x_1)$.

(IV.6.a) Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\Gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(g^\star)^\star f.$$

(IV.6.b) En déduire

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{g} f.$$

Indication : Démontrer que les endomorphismes $g \mapsto g^\star$ et $g \mapsto \widehat{g}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ commutent.

(IV.7) En déduire que, pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}\,\widehat{\overline{g}} = \alpha \int_{\mathbb{R}^2} f\overline{g},$$

où $g \mapsto \overline{g}$ désigne la conjugaison complexe et α le nombre complexe de la question **(IV.5)**, dont on démontrera qu'il est réel et strictement positif.

V. Structure préhilbertienne sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$

Pour deux éléments $h_1, h_2 \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ on définit

$$\langle h_1, h_2\rangle = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} \overline{h_1} h_2.$$

On admet par la suite que l'expression $\|h\|_2 = \sqrt{\langle h, h\rangle}$ définit une norme sur $\mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ et que l'on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante (cas complexe) :

$$\forall h_1, h_2 \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}), \qquad \left|\int_{\mathbb{R}^2} h_1 h_2\right| \leqslant \|h_1\|_2 \|h_2\|_2.$$

Le sous-espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ à valeurs réelles muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un espace préhilbertien ; c'est dans ce cadre que nous allons reprendre la notion de convergence faible introduite dans la partie **I**.

Une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ sera dite *bornée* si la suite $(\|h_n\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que pour tout élément $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$, on a défini dans la partie **IV** sa transformée de Fourier, laquelle est notée $\widehat{h}$.

Pour tout entier naturel $N \geqslant 1$ on pourra utiliser sans preuve le résultat suivant : il existe une fonction paire $\theta_N \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0,1]$, identiquement égale à 1 sur le carré $[-N,N]^2$, identiquement nulle en dehors du carré $[-3N,3N]^2$ et telle que $|\partial_k\theta_N| \leqslant 1$ pour $k = 1, 2$.

(V.1) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **bornées** de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ convergeant faiblement vers 0 dans cet espace (voir partie **I**).

(V.1.a) Montrer que pour toute fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, les suites $(\widehat{\theta\, g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\theta\, f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta g_n}(\xi)| < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\theta f_n}(\xi)| < \infty.$$

(V.1.b) On suppose l'existence d'un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ en dehors duquel toutes les fonctions g_n sont identiquement nulles. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\langle f_n, g_n\rangle = \langle \varphi_n, \psi_n\rangle$, où $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telles que $(\widehat{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{\psi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\varphi_n}(\xi)| < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N},\,\xi\in\mathbb{R}^2} |\widehat{\psi_n}(\xi)| < \infty,$$

ainsi que

$$\|\partial_1\varphi_n\|_2 \leqslant \|f_n\|_2 + \|\partial_1 f_n\|_2,$$
$$\|\partial_2\psi_n\|_2 \leqslant \|g_n\|_2 + \|\partial_2 g_n\|_2.$$

(V.1.c) En déduire (toujours en supposant l'existence de K) que si $(\partial_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2 g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors $\langle f_n, g_n\rangle \to 0$.
Indication : On pourra montrer que $|1 - \theta_N(x_1,x_2)| \leqslant (|x_1| + |x_2|)/N$.

(V.2) Montrer le Théorème de Rellich : soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ identiquement nulle en dehors de K et convergeant faiblement. Si $(\partial_1 h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\partial_2 h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont également bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement.

(V.3) Pour cette dernière question étant donnés deux éléments $F = (f_1, f_2)$ et $G = (g_1, g_2)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ on pose

$$\langle\langle F, G\rangle\rangle = \langle f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle.$$

On admet que $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ et on y considère $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées convergeant faiblement vers F et G. On suppose l'existence d'un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ en dehors duquel les éléments de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiquement nuls. Démontrer que si $(\mathrm{div}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{rot}(G_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, alors

$$\langle\langle F_n, G_n\rangle\rangle \longrightarrow \langle\langle F, G\rangle\rangle,$$

où la divergence et le rotationnel d'une application $H = (h_1, h_2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})^2$ sont définis par

$$\mathrm{div}(H) = \partial_1 h_1 + \partial_2 h_2,$$
$$\mathrm{rot}(H) = \partial_2 h_1 - \partial_1 h_2.$$

Fin de l'épreuve

$\star \quad \star$

$\star$

SUJET 10

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2013 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – B – (X)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction continue

N désigne l'ensemble des entiers naturels et **R** celui des nombres réels.

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[0,1]$ et à valeurs dans **R**. Cet espace est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $f \in \mathcal{C}$, par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On note $\mathcal{C}_0$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$.

$\log_2$ est la fonction définie pour $t \in]0,+\infty[$, par $\log_2 t = \dfrac{\ln t}{\ln 2}$, où ln est le logarithme népérien.

Première partie : définition de l'exposant de Hölder ponctuel

Soit $x_0 \in [0,1]$. Pour tout $s \in [0,1[$, on désigne par $\Gamma^s(x_0)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé par les fonctions f qui vérifient :

$$\sup_{x\in[0,1]\setminus\{x_0\}} \frac{\big|f(x) - f(x_0)\big|}{|x - x_0|^s} < +\infty \ .$$

1a. Montrer que $\Gamma^s(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, puis que, pour tous réels s_1 et s_2 vérifiant $0 \leq s_1 \leq s_2 < 1$, l'on a $\Gamma^{s_2}(x_0) \subset \Gamma^{s_1}(x_0)$. Enfin, déterminer $\Gamma^0(x_0)$.

1b. Soit $f \in \mathcal{C}$. Si f est dérivable en x_0, montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$ pour tout $s \in [0,1[$.

1c. Montrer que pour tout $x_0 \in]0,1[$, il existe $f \in \mathcal{C}$ non dérivable en x_0 tel que pour tout $s \in [0,1[$, $f \in \Gamma^s(x_0)$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $x_0 \in [0,1]$, on pose

$$\alpha_f(x_0) = \sup\{s \in [0,1[\,|\, f \in \Gamma^s(x_0)\} \ .$$

Le réel $\alpha_f(x_0)$ est appelé *exposant de Hölder ponctuel de f en x_0* ; il permet de mesurer finement la régularité locale de f au voisinage du point x_0.

2. Soit $p : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{|1-4x^2|}$. Déterminer l'exposant de Hölder ponctuel de p en $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on définit la fonction $\omega_f : [0,1] \to \mathbf{R}_+$ par

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x)-f(y)| \,|\, x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq h\} \ .$$

3a. Montrer que ω_f est croissante, et continue en 0.

3b. Montrer que pour tous $h, h' \in [0,1]$ tels que $h \leq h'$, ω_f vérifie

$$\omega_f(h') \leq \omega_f(h) + \omega_f(h'-h) \ .$$

3c. En déduire que ω_f est continue sur $[0,1]$.

4a. Soit $s \in [0,1[$. On suppose que la fonction $h \mapsto \dfrac{\omega_f(h)}{h^s}$ est bornée sur $]0,1]$. Pour tout $x_0 \in [0,1]$, montrer que $f \in \Gamma^s(x_0)$.

4b. Soit $q : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{cases} q(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) \text{ pour } x > 0 \ , \\ q(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\alpha_q(x_0) = 1$, mais que $\dfrac{\omega_q(h)}{\sqrt{h}}$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0.

Deuxième partie : le système de Schauder

On note $\mathcal{I} = \left\{(j,k) \in \mathbf{N}^2 \,|\, j \in \mathbf{N} \text{ et } 0 \leq k < 2^j\right\}$; pour $j \in \mathbf{N}$, on désigne par $\mathcal{T}_j$ l'ensemble

$$\mathcal{T}_j = \left\{k \in \mathbf{N} \,|\, 0 \leq k < 2^j\right\} \ .$$

Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, soit $\theta_{j,k} : [0,1] \to [0,1]$ la fonction de $\mathcal{C}_0$, définie pour tout $x \in [0,1]$ par

$$\theta_{j,k}(x) = \begin{cases} 1 - |2^{j+1}x - 2k - 1| & \text{si } x \in [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \ , \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La famille des fonctions $(\theta_{j,k})_{(j,k)\in\mathcal{I}}$ est appelée *le système de Schauder.*

On note $\widetilde{k}_j(x)$ la partie entière du réel $2^j x$, c'est donc l'unique entier tel que

$$\widetilde{k}_j(x) \leq 2^j x < \widetilde{k}_j(x) + 1 \ .$$

5a. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$ et tout $k \in \mathcal{T}_{j+1}$, il existe un unique entier $k' \in \mathcal{T}_j$ tel que

$$[k2^{-j-1}, (k+1)2^{-j-1}] \subset [k'2^{-j}, (k'+1)2^{-j}] \ .$$

On précisera le lien entre k et k'.

5b. Calculer $\theta_{j,k}(\ell 2^{-j-1})$ pour tous $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathcal{T}_j$, $\ell \in \mathcal{T}_{j+1}$.

5c. Montrer que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, la fonction $\theta_{j,k}$ est continue, affine sur chaque intervalle de la forme $[\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}]$ où $n > j$ et $\ell \in \mathcal{T}_n$.

5d. Prouver que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$ et $(x,y) \in [0,1]^2$, on a

$$\left|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(y)\right| \leq 2^{j+1}|x-y| \ .$$

Dans le reste de cette partie f est un élément de $\mathcal{C}_0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $S_n f$ la fonction de $\mathcal{C}_0$ définie par

$$S_n f = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} c_{j,k}(f)\, \theta_{j,k} \ ,$$

où, pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on a posé

$$c_{j,k}(f) = f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j}\right) - \frac{f\left(k2^{-j}\right) + f\left((k+1)2^{-j}\right)}{2} \ .$$

6. Montrer que $\lim\limits_{j \to +\infty} \max\limits_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| = 0$.

7a. Pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $(i,\ell) \in \mathcal{I}$, calculer $c_{j,k}(\theta_{i,\ell})$.

7b. Soit $a_{j,k}$ une famille de réels indexée par $(j,k) \in \mathcal{I}$. On note $b_j = \max\limits_{k \in \mathcal{T}_j} |a_{j,k}|$, et on suppose que la série $\sum b_j$ est convergente.

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, soit f_j^a la fonction définie par

$$f_j^a(x) = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} a_{j,k} \theta_{j,k}(x) \ .$$

Montrer que la série $\sum f_j^a$ est uniformément convergente sur [0,1] vers une fonction noté f^a, qui appartient à $\mathcal{C}_0$ et qui vérifie, pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, $c_{j,k}(f^a) = a_{j,k}$.

8a. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M 2^{-j}$.

En déduire que la suite de fonction $S_n f$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ lorsque n tend vers ∞.

8b. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une constante $M' \geq 0$ telle que pour tous $(j,k) \in \mathcal{I}$, $|c_{j,k}(f)| \leq M' 4^{-j}$.

9a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, la fonction $S_n f$ est affine sur l'intervalle $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$.

9b. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_n$, $(S_{n-1}f)(\ell 2^{-n}) = f(\ell 2^{-n})$. Montrer que l'on a aussi que pour tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

On pourra distinguer les cas suivant la parité de ℓ.

9c. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\ell \in \mathcal{T}_{n+1}$, $(S_n f)(\ell 2^{-n-1}) = f(\ell 2^{-n-1})$.

10a. Déduire de la question **9** que pour tout f de $\mathcal{C}_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - S_n f\|_\infty = 0$.

10b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que S_n est un projecteur sur $\mathcal{C}_0$, dont la norme subordonnée (à $\|\cdot\|_\infty$) vaut 1.

11a. Soit $s \in]0,1[$. Montrer que si $a, b \geq 0$, alors $a^s + b^s \leq 2^{1-s}(a+b)^s$.

11b. Montrer que si $f \in \Gamma^s(x_0) \cap \mathcal{C}_0$, alors il existe un réel $c_1 > 0$, tel que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$, on a,

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|\right)^s \ .$$

Troisième partie : minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

L'objectif de cette partie est d'établir une forme de réciproque du résultat de la question **11b**. Dans toute cette partie, on désigne par $f \in \mathcal{C}_0$ une fonction vérifiant la propriété suivante :

($\mathcal{P}_1$) il existe $x_0 \in [0,1]$, $s \in]0,1[$ et $c_1 \in]0,+\infty[$, tels que pour tout $(j,k) \in \mathcal{I}$,

$$|c_{j,k}(f)| \leq c_1 \left(2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|\right)^s \ .$$

Dans tout le reste de cette partie, on fixe les x_0, s et c_1 de la propriété $\mathcal{P}_1$ et $x \in [0,1] \setminus \{x_0\}$.

12. Montrer qu'il existe un unique $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $2^{-n_0-1} < |x - x_0| \leq 2^{-n_0}$.

13. On rappelle que la notation $\widetilde{k}_j(x)$ a été introduite en préambule de la deuxième partie. On pose

$$W_j = \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \left|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)\right| .$$

Montrer que

$$W_j \leq \left(|c_{j,\widetilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\widetilde{k}_j(x_0)}(f)|\right) 2^{j+1}|x - x_0| \ .$$

14a. Montrer que pour $j \leq n_0$ (n_0 est déterminé dans la question **12**), on a

$$W_j \leq 4c_1 2^{(1-s)j} 3^s |x - x_0| \ .$$

14b. En déduire que, en posant $c_2 = 8\big(2^{1-s} - 1\big)^{-1}\big(3/2\big)^s c_1$,

$$\sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in \mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)| \left|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)\right| \leq c_2 |x - x_0|^s \ .$$

15. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$, $|c_{j,\widetilde{k}_j(x_0)}(f)| \leq 2^{s(1-j)}c_1$. En déduire, en posant $c_3 = \left(1-2^{-s}\right)^{-1}2^s c_1$,

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq c_3|x-x_0|^s\ .$$

Dans la suite du problème, on suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et on rappelle que la fonction ω_f a été définie à la question **3**.

16. Montrer qu'il existe un unique $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\omega_f(2^{-n_1-1}) < 2^{-n_0 s} \leq \omega_f(2^{-n_1})$.

17. Montrer que pour tout $n \geq n_1$, où n_1 est déterminé dans la question **16**, on a

$$\|f - S_n f\|_\infty \leq 2^{s+1}|x-x_0|^s\ .$$

On pourra utiliser les résultats des questions **9a** et **9c**.

18a. Montrer que lorsque $n_0 < n_1$, on a,

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_1 3^s (n_1-n_0)|x-x_0|^s\ .$$

On suppose de plus dans la suite que la fonction ω_f vérifie la propriété suivante :

($\mathcal{P}_2$) pour tout entier $N \geq 1$, il existe un réel $c_4(N) > 0$, tel que pour tout $h \in]0,1]$,

$$\omega_f(h) \leq c_4(N)\,(1+|\log_2 h|)^{-N}\ .$$

18b. Pour tout entier $N \geq 1$, on pose $c_5(N) = 3^s c_1\big(c_4(N)\big)^{1/N}$. Montrer que

$$n_1 - n_0 \leq n_1 + 1 \leq \left(\frac{c_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}}$$

et en déduire

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in\mathcal{T}_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x)| \leq c_5(N)|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}\ .$$

19. Déduire de ce qui précède que $\alpha_f(x_0) \geq s$.

On pourra distinguer les cas $n_0 \geq n_1$ et $n_0 < n_1$.

* *
*

Les trois parties sont indépendantes.

Notations

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $P[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $E[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs réelles.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et intégrables, alors

$$E[Y_1 \cdots Y_n] = E[Y_1] \cdots E[Y_n].$$

On note log la fonction logarithme népérien. Par convention, on pose $\log 0 = -\infty$.

Première partie

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel, et soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P[X_k = 1] = P[X_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \log\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right).$$

1. Soit Z une variable aléatoire réelle discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'espérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$P[Z \geqslant t] \leqslant \exp(-\lambda t) E[\exp(\lambda Z)].$$

2. Montrer que $P[S_n \geqslant 0] \geqslant \frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{n} \log P[S_n \geqslant t] \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} \left(\psi(\lambda) - \lambda t\right).$$

Pour chaque $\lambda \geqslant 0$, on pose

$$m(\lambda) = \frac{E[X_1 \exp(\lambda X_1)]}{E[\exp(\lambda X_1)]},$$

ainsi que

$$D_n(\lambda) = \exp\left(\lambda n S_n - n\psi(\lambda)\right).$$

4. Montrer que la fonction m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et que pour tout $t \in [0,1[$, il existe un unique $\lambda \geqslant 0$ tel que $m(\lambda) = t$.

5a. Pour $n \geqslant 2$ et $\lambda \geqslant 0$, montrer que

$$E[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0.$$

5b. En déduire que, pour $n \geqslant 1$ et $\lambda \geqslant 0$,

$$E[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leqslant \frac{4}{n}.$$

Pour tous $n \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$, on note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda,\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que

$$P[|S_n - m(\lambda)| \leqslant \varepsilon] \geqslant E[I_n(\lambda,\varepsilon)\exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)],$$

7. Montrer que

$$E[I_n(\lambda,\varepsilon)D_n(\lambda)] \geqslant 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

8a. En déduire, pour chaque $\lambda \geqslant 0$ et $\varepsilon > 0$, l'existence d'une suite $(u_n(\varepsilon))_{n\geqslant 1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini et telle que

$$\frac{1}{n}\log P[S_n \geqslant m(\lambda) - \varepsilon] \geqslant \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon + u_n(\varepsilon).$$

8b. Conclure que pour tout $t \in [0,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P[S_n \geqslant t] = \inf_{\lambda\geqslant 0} \left(\psi(\lambda) - \lambda t\right).$$

8c. La formule précédente est-elle encore valide pour $t = 1$?

Deuxième partie

On admet l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x^2\right)\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. Appelons (H) l'hypothèse suivante : il existe un unique point $x_0 \in [a,b]$ où f atteint son maximum, on a $a < x_0 < b$, et $f''(x_0) \neq 0$.

9. Montrer que sous l'hypothèse (H), on a $f''(x_0) < 0$.

10. Sous l'hypothèse (H), montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $\delta < \min(x_0 - a, b - x_0)$, on a l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \sim \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x.$$

11. Sous l'hypothèse (H), montrer l'équivalent, quand $t \to +\infty$,

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \sim e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t\,|f''(x_0)|}}.$$

12a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^n\,\mathrm{d}t.$$

12b. En utilisant les résultats précédents, retrouver la formule de Stirling donnant un équivalent asymptotique de $n!$.

Troisième partie

13. Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a |\sin(x^2)|\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

14. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)}.$$

15. Montrer que les limites

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

existent et sont finies.

On admet les identités :

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

16. Montrer qu'il existe des nombres réels $c, c' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{c}{a}\cos(a^2) + \frac{c'}{a^3}\sin(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

On admettra qu'il existe des nombres réels $d, d' \in \mathbb{R}$ tels que, pour $a \to +\infty$, on a

$$\int_0^a \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{d}{a}\sin(a^2) + \frac{d'}{a^3}\cos(a^2) + O\left(\frac{1}{a^5}\right).$$

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de l'énoncé, f désigne une fonction infiniment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un unique point $x_0 \in [0,1[$ où f' s'annule. On suppose également que $f''(x_0) > 0$. On se donne également une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ infiniment dérivable.

17. Montrer qu'on a, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^{1} g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\int_{x_0}^{1}\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Pour tout $x \in [x_0, 1]$, on définit

$$h(x) = \sqrt{|f(x) - f(x_0)|}.$$

18a. Montrer que la fonction h définit une bijection de $[x_0, 1]$ sur $[0, h(1)]$.

18b. Montrer que l'application h est dérivable en x_0 à droite, et que $h'(x_0) = \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$.

On admet que la bijection

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [x_0, 1] & \to & [0, h(1)] \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} \right.$$

admet une application réciproque $h^{-1} : [0, h(1)] \to [x_0, 1]$ qui est infiniment dérivable.

19. Montrer que, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{x_0}^{1}\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = \sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

20. On suppose que $x_0 \in]0, 1[$. Montrer que, pour $t \to +\infty$,

$$\int_{0}^{1} g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\sin\left(tf(x_0) + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{tf''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

SUJET 12 Faire III et IV en admettant les résultats des parties I et II

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2015 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – C – (ULCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices électroniques est interdite.

⋆ ⋆ ⋆

On définit, pour tout le problème, la fonction Gaussienne $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

I

1)
a. Pour $t > 0$ on pose

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx \right)^2 \qquad B(t) = -\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx.$$

A l'aide du changement de variables $x = ty$, montrer que les fonctions A et B ont la même dérivée.

b. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, dx = 1.$$

2) Etant donnée une fonction g bornée continue sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle ordinaire

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = g(x).$$

3) Etant donnée une fonction f bornée continue sur $\mathbb{R}$, et posant $\langle f \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\, dx$, montrer que la fonction donnée par

$$\varphi(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et est solution de l'équation différentielle

$$\varphi'(x) - x\varphi(x) = f(x) - \langle f \rangle.$$

Montrer aussi que

$$\varphi(x) = -e^{x^2/2} \int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f \rangle)\, dy.$$

4) Montrer que pour tous nombres réels x, y, on a

$$e^{-y^2/2} \leqslant e^{-x^2/2} e^{-x(y-x)}.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{C_0 \|f\|_\infty}{1+|x|},$$

avec $C_0 \leqslant \max(4, 2\sqrt{2\pi e})$. Pour ce faire, on distinguera les cas $x \geqslant 1, x \leqslant -1, -1 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire que φ' est bornée sur $\mathbb{R}$.

5) On suppose dans tout le reste de cette partie en outre que f est de classe C^1 avec f' bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que

$$\varphi(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2} e^{-sx} (f(x+s) - \langle f \rangle)\, ds.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+|x|)|\varphi'(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_1 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

6) Justifier que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\varphi''(x)| \leqslant C(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty),$$

où C est une constante indépendante de f. En définissant C_2 comme la meilleure constante possible dans cette inégalité, en proposer une majoration explicite.

II

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles positives continues par morceaux.

1) En utilisant une intégration par parties que l'on justifiera, montrer que pour toute fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que φ et φ' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)(\varphi'(x) - x\varphi(x))\, dx = 0.$$

2) On suppose pour cette question que la suite (g_n) est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\, dx = 1$ et que pour toute fonction h de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que h et h' soient bornées, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx = 0.$$

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour toute fonction f continue bornée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

3) On suppose pour cette question que la suite (g_n) est telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\, dx$ est bornée indépendamment de n et que pour toute fonction f bornée de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

a. Justifier que si h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx = 0.$$

b. On considère une famille $(\chi_R)_{R\in\mathbb{R}_+^*}$ de fonctions bornées indépendamment de R, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que χ_R vaut 1 sur $[-R, R]$ et 0 en dehors de $[-R-1, R+1]$. Montrer que si h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe R tel que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \chi_R(x)) g_n(x)(h'(x) - xh(x))\, dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

c. Montrer que si h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe R tel que

$$\left| \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\chi_R(x)(h'(x) - xh(x))\,dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

d. Montrer que le même résultat est vrai si h est seulement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec toujours h bornée et de dérivée bornée.

e. Déduire des questions précédentes que si h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,dx = 0.$$

III

Dans toute cette partie et la suivante, on suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, sur un espace de probabilité. On suppose que les X_i sont **indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante** M.
On pose, pour tout n, $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. On notera P la probabilité et E l'espérance.

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$, et $\langle f\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx$. Soit φ définie à partir de f comme à la question I. 3).

1) Vérifier que

$$E\left(\varphi'(Z_n) - Z_n\varphi(Z_n)\right) = E(f(Z_n) - \langle f\rangle).$$

2) Pour i entier dans $[1, n]$, on définit $Z_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_n) = Z_n - \frac{1}{\sqrt{n}}X_i$. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que

$$\left| X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i}) \right| \leqslant \frac{C_2}{2}\frac{|X_i|^3}{n}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

3) En déduire que

$$\left| E(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leqslant \frac{C_2 M}{2\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

4) En utilisant le même type d'arguments, montrer que

$$\left| E(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varphi'(Z_{n,i})) \right| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

5) Déduire de toutes les questions précédentes que

$$\left| E(f(Z_n)) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)G(x)\,dx \right| \leqslant \frac{C_2(1 + \frac{1}{2}M)}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

6) Montrer que pour tout nombre réel a, on a

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a) = \int_{-\infty}^{a} G(x)\,dx$$

et montrer que la vitesse de convergence peut se majorer par un $O(n^{-1/4})$. On pourra par exemple encadrer la fonction indicatrice de l'intervalle $]-\infty, a]$ par des fonctions bien choisies.

IV

On garde les mêmes hypothèses qu'à la partie précédente, à savoir que (X_i) forme une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs réelles, indépendantes, d'espérance nulle, de variance 1, et uniformément bornées en valeur absolue par une constante M.

1)
a. En utilisant une propriété de convexité, montrer que pour tout $t \geq 0$ et tout i, on a

$$E(e^{tX_i}) \leqslant \frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}).$$

b. Montrer que pour $t \geqslant 0$ et $M \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}(e^{tM} + e^{-tM}) \leqslant e^{\frac{1}{2}t^2M^2}.$$

2) En déduire que pour tout $\delta > 0$,

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n\delta^2}{2M^2}}.$$

3) Comparer ce résultat à celui de la question III. 6) : quelle est la meilleure estimation quand n tend vers l'infini (discuter selon les cas)?

4)
a. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Montrer que si $|X| \leq M$ on a $f(X) \leqslant f(M)$.

b. En utilisant les hypothèses sur X_i et l'inégalité $1 + x \leqslant e^x$, en déduire que pour tout $t \geqslant 0$ et tout i, on a

$$E(e^{tX_i}) \leqslant exp\left(\frac{1}{M^2}(e^{tM} - 1 - tM)\right).$$

En déduire l'amélioration suivante du résultat précédent:

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{n}{M^2}\Phi(M\delta)},$$

où $\Phi(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x$.

⋆ ⋆
⋆

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le problème comporte deux parties qui sont indépendantes.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1,\dots,n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *point fixe* de σ un élement $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\sigma(i) = i$. On note $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. On appelle *dérangement* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et D_n son cardinal.

Si k est un entier naturel tel que $k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial correspondant au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $\binom{n}{k} = 0$ pour un entier naturel $k > n$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. Si de plus $n \geqslant 0$ est un entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Si $n \geqslant 0$ et $d \geqslant 1$ sont deux entiers naturels, on note $d \mid n$ la relation « d divise n ».

Si x est un réel, on note $E(x)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Si p est un nombre premier et n un entier naturel non nul, on note

$$\nu_p(n) = \max\{\nu \in \mathbb{N} \,:\, p^\nu \mid n\}.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour tout ensemble E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

On note $\ln_2$ la fonction de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\ln_2(x) = \ln(\ln(x))$.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres réels, on note, pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = \sum_{n=1}^{E(x)} a_n, \qquad \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_p = \sum_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p, \qquad \prod_{\substack{p\leqslant x \\ p \text{ premier}}} a_p = \prod_{\substack{p=1 \\ p \text{ premier}}}^{E(x)} a_p$$

avec la convention que la somme indexée par l'ensemble vide vaut 0 et le produit indexé par l'ensemble vide vaut 1.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'il existe un réel γ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Première partie

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$. Pour tout nombre réel x, on considère la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$M_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

1a. Montrer que la matrice $-M_0$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

1b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)} = (x-1)^{n-1}(x+n-1).$$

2. Calculer

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma), \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$

3. Établir que

$$\mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = 1\} = \mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = -1\}$$

et en déduire la probabilité qu'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément au hasard soit de signature prescrite.

4. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, préciser à quelle condition sur $\nu(\sigma)$, on a $\sigma \in \mathfrak{D}_n$. En déduire que

$$\mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = 1\} = \mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = -1\} + (-1)^{n-1}(n-1).$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{m-1}{0} & & & & \binom{m-1}{m-1} & 0 \\ \binom{m}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{R}).$$

5a. Justifier que les familles $(1, X, \ldots, X^m)$ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ sont des bases de $\mathbb{R}_m[X]$.

5b. Montrer que la transposée de M est la matrice de l'application linéaire identité

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_m[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_m[X] \\ P & \longmapsto & P \end{array}$$

dans les bases $(1, X, \ldots, X^m)$ au départ et $(1, (X-1), \ldots, (X-1)^m)$ à l'arrivée.

5c. Établir que M est inversible et expliciter son inverse.

5d. En déduire que pour tous $(u_0, \ldots, u_m), (v_0, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\text{si} \quad \forall k \leqslant m, \quad u_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} v_\ell, \quad \text{alors} \quad \forall k \leqslant m, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

6. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{D}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{D}_n))$ muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Y_n par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

7a. Expliciter la loi de Y_n.

7b. Calculer, pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = \varepsilon)$.

Pour n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{S}_n))$ muni de la probabilité uniforme. On définit une variable aléatoire Z_n par $Z_n(\sigma) = \nu(\sigma)$.

8a. Expliciter la loi de Z_n.

8b. Calculer, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)$.

8c. Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on rappelle qu'il existe, à l'ordre près, une unique décomposition $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{\omega(\sigma)}$, où $\omega(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ où $c_1, \ldots, c_{\omega(\sigma)}$ sont des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_{\omega(\sigma)}$ et $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{\omega(\sigma)} = n$. En particulier, on prendra garde au fait que l'on prend ici en compte les cycles c_i de longueur 1, qui correspondent aux points fixes de σ, auquel cas c_i est l'identité.
Par exemple, si σ est la permutation identité de $\{1, \ldots, n\}$, on a $\omega(\sigma) = n$ et $\ell_{\omega(\sigma)} = 1$. Et si σ est la permutation $(1, 2)$ de $\{1, 2, 3\}$, on a $\sigma = c_1 \circ c_2$ où c_1 est l'identité et $c_2 = (1, 2)$ de sorte que $\omega(\sigma) = 2$.
On obtient ainsi une application $\omega : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$. On se propose de montrer qu'en moyenne, $\omega(\sigma)$ est de l'ordre de $\ln(n)$ dans un sens que l'on précisera.
Pour un entier k inférieur ou égal à n, on note $s(n, k)$ le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ telles que $\omega(\sigma) = k$. On considère alors, sur l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathscr{P}(\mathfrak{S}_n))$ muni de la probabilité uniforme, la variable aléatoire X_n définie par $X_n(\sigma) = \omega(\sigma)$.

9. Calculer, pour $n \in \{2,3,4\}$, la quantité $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)$.

10. Préciser $s(n,n)$ et $s(n,1)$ puis montrer que, pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k).$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pourra distinguer les cas $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(1) \neq 1$.

11. Établir que, pour tout réel x, $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(x+i) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k$.

12. Démontrer que $\mathbb{E}[X_n] \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

13a. Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)s(n,k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

13b. En déduire que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k^2 s(n,k) = \mathbb{E}[X_n] + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{ij} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right).$$

14a. Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\omega(\sigma)^2 \underset{n\to+\infty}{=} (2\gamma+1)\ln(n) + c + \ln(n)^2 + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

pour un réel c à préciser.

14b. Montrer que

$$\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(\omega(\sigma)-\ln(n))^2 \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + c + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

15. Justifier qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \ln(n)| > \varepsilon\ln(n)\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2\ln(n)}.$$

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\omega(n) = \mathrm{Card}\{p \text{ premier} \,:\, p \mid n\} = \sum_{\substack{p\mid n\\ p \text{ premier}}} 1.$$

Par exemple, $\omega(6) = \omega(12) = 2$.