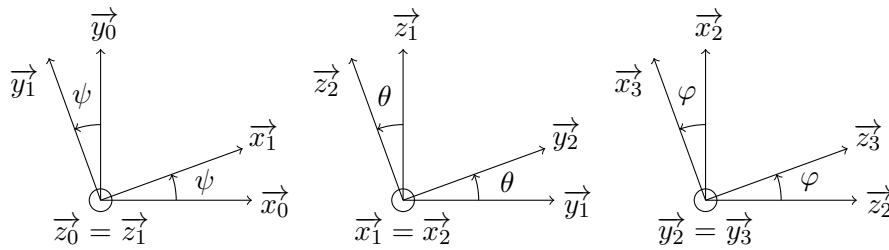


CORRIGÉ - TD7 – Centrifugeuse humaine

I Étude dynamique de la centrifugeuse

Q1. Tracer les figures géométrales de changement de bases.



Q2. En tenant compte des données du problème, définir la forme simplifiée de la matrice d'inertie du sous-ensemble 1 en G_1 dans la base b_1 .

Les plans $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ sont des plans de symétrie pour le solide 1, donc la matrice d'inertie en G_1 est diagonale.

$$\bar{\bar{I}}_{(G_1,1)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Q3. Déterminer le torseur cinétique du sous-ensemble 1 en mouvement par rapport à 0 au point O .

$$\{C_{1/0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{P}_{1/0} \\ \vec{\sigma}_{O,1/0} \end{pmatrix} \right\}_O = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \cdot \vec{V}_{G_1,1/0} \\ \vec{\sigma}_{O,1/0} \end{pmatrix} \right\}_O$$

Calcul de $\vec{P}_{1/0}$:

$$\vec{P}_{1/0} = m_1 \cdot \vec{V}_{G_1,1/0} = m_1 \cdot \left(\underbrace{\vec{V}_{O,1/0}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OG_1} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \right)$$

$$\vec{P}_{1/0} = m_1 \cdot (-a \vec{y}_1) \wedge (\dot{\psi} \vec{z}_1) = -m_1 \cdot a \cdot \dot{\psi} \vec{x}_1$$

Calcul de $\vec{\sigma}_{O,1/0}$:

$$\vec{\sigma}_{G_1,1/0} = \bar{\bar{I}}_{(G_1,1)} \cdot \vec{\Omega}_{1/0} = C_1 \cdot \dot{\psi} \vec{z}_1$$

On déplace ensuite le moment cinétique en O :

$$\vec{\sigma}_{O,1/0} = \vec{\sigma}_{G_1,1/0} + \overrightarrow{OG_1} \wedge \vec{P}_{1/0} = C_1 \cdot \dot{\psi} \vec{z}_1 + (a \vec{y}_1) \wedge (-m_1 \cdot a \cdot \dot{\psi} \vec{x}_1) = (C_1 \cdot \dot{\psi} + m_1 \cdot a^2 \dot{\psi}) \vec{z}_1$$

On a donc :

$$\{\mathcal{C}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1.a.\dot{\psi}\vec{x}_1 \\ (C_1.\dot{\psi} + m_1.a^2\dot{\psi})\vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$

Q4. En tenant compte des données du problème, définir la forme simplifiée de la matrice d'inertie de l'anneau 2 en I dans la base b_2 .

Les plans $(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ et $(I, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ sont des plans de symétrie pour le solide 2, donc la matrice d'inertie en I est diagonale.

$$\bar{\bar{I}}_{(I,2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q5. Déterminer le torseur cinétique de l'anneau 2 en mouvement par rapport à 0 au point I .

$$\{\mathcal{C}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}_{2/0} \\ \vec{\sigma}_{I,2/0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} m_2.\vec{V}_{I,2/0} \\ \vec{\sigma}_{I,2/0} \end{array} \right\}_I$$

Calcul de $\vec{P}_{2/0}$:

$$\vec{P}_{2/0} = m_2.\vec{V}_{I,2/0} = m_2.R.\dot{\psi}\vec{x}_1$$

Calcul de $\vec{\sigma}_{I,2/0}$:

$$\vec{\sigma}_{I,2/0} = \bar{\bar{I}}_{(I,2)}.\vec{\Omega}_{2/0}$$

Avec :

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\vec{z}_1$$

Dans la base 2 :

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2$$

On obtient alors :

$$\vec{\sigma}_{I,2/0} = A_2.\dot{\theta}\vec{x}_2 + B_2.\dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + C_2.\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2$$

On a donc :

$$\{\mathcal{C}_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_2.R.\dot{\psi}\vec{x}_1 \\ A_2.\dot{\theta}\vec{x}_2 + B_2.\dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2 + C_2.\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_2 \end{array} \right\}_I$$

Q6. Déterminer le torseur cinétique de 3 en mouvement par rapport à 0 au point I .

$$\{\mathcal{C}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}_{3/0} \\ \vec{\sigma}_{I,3/0} \end{array} \right\}_I = \left\{ \begin{array}{c} m_3.\vec{V}_{I,3/0} \\ \vec{\sigma}_{I,3/0} \end{array} \right\}_I$$

Calcul de $\vec{P}_{3/0}$:

$$\vec{P}_{3/0} = m_3.\vec{V}_{I,3/0} = m_3.R.\dot{\psi}\vec{x}_1$$

Calcul de $\vec{\sigma}_{I,3/0}$:

$$\vec{\sigma}_{I,3/0} = \bar{\bar{I}}_{(I,3)}.\vec{\Omega}_{3/0}$$

Avec :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\psi} \vec{z}_1$$

Dans la base 2 :

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta} \vec{x}_2 + (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}) \vec{y}_2 + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2$$

On obtient alors :

$$\vec{\sigma}_{I,3/0} = A_3 \cdot \dot{\theta} \vec{x}_2 + B_3 \cdot (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}) \vec{y}_2 + C_3 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2$$

On a donc :

$$\{\mathcal{C}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_3 \cdot R \cdot \dot{\psi} \vec{x}_1 \\ A_3 \cdot \dot{\theta} \vec{x}_2 + B_3 \cdot (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}) \vec{y}_2 + C_3 \cdot \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2 \end{array} \right\}_I$$

Q7. En déduire le torseur cinétique de l'ensemble $E_1 = \{2+3\}$ en mouvement par rapport à 0 au point I .

$$\{\mathcal{C}_{E_1/0}\} = \{\mathcal{C}_{3/0}\} + \{\mathcal{C}_{2/0}\}$$

Les 2 torseurs cinétiques sont déjà exprimés au point I , donc :

$$\{\mathcal{C}_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} (m_2 + m_3) \cdot R \cdot \dot{\psi} \vec{x}_1 \\ (A_2 + A_3) \cdot \dot{\theta} \vec{x}_2 + [(B_2 + B_3) \cdot \dot{\psi} \sin \theta + B_3 \dot{\varphi}] \vec{y}_2 + (C_2 + C_3) \cdot \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2 \end{array} \right\}_I$$

Q8. Déterminer le torseur dynamique de 1 en mouvement par rapport à 0 au point O .

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{d,1/0} \\ \vec{\delta}_{O,1/0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \cdot \vec{\Gamma}_{G_1,1/0} \\ \vec{\delta}_{O,1/0} \end{array} \right\}_O$$

Calcul de $\vec{R}_{d,1/0}$:

$$\vec{R}_{d,1/0} = \left. \frac{\vec{P}_{1/0}}{dt} \right|_{R_0} = -m_1 \cdot a \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{x}_1 - m_1 \cdot a \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \vec{y}_1$$

Calcul de $\vec{\delta}_{O,1/0}$:

$$\vec{\delta}_{O,1/0} = \left. \frac{\vec{\sigma}_{O,1/0}}{dt} \right|_{R_0} = (C_1 + m_1 \cdot a^2) \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{z}_1$$

Donc :

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 \cdot a \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{x}_1 - m_1 \cdot a \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \vec{y}_1 \\ (C_1 + m_1 \cdot a^2) \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{z}_1 \end{array} \right\}_O$$

Q9. À partir des données du problème, proposer les différentes étapes de calculs afin de déterminer le moment dynamique au point O de l'ensemble $E_2 = \{1+2+3\}$, dans son mouvement par rapport à 0, noté $\vec{\delta}_{O,E_2/0}$.

$$\{\mathcal{D}_{E_2/0}\} = \{\mathcal{D}_{1/0}\} + \{\mathcal{D}_{2/0}\} + \{\mathcal{D}_{3/0}\}$$

Il faut amener tous les torseurs au point O avec la formule de Varignon, et calculer les moments dynamiques en O des solides 2 et 3.

Les liaisons pivots entre le bâti 0 et le sous-ensemble 1, entre le sous-ensemble 1 et l'anneau 2 et entre l'anneau 2 et la nacelle 3, sont actionnées par des moteurs à courant continu, notés M_1 , M_2 et M_3 , générant respectivement des couples C_{M1} , C_{M2} et C_{M3} .

Q10. Tracer le graphe de structure du mécanisme étudié.

Trivial

Q11. Quel solide ou ensemble de solides faut-il isoler pour obtenir l'équation de mouvement de la nacelle 3 en mouvement par rapport au bâti 0? Quelle équation du PFD est intéressante? Vous préciserez la projection utile, et si nécessaire le point d'application du PFD et ferez l'inventaire des actions mécaniques extérieures.

On isole 3, et TMD en I en projection sur $\vec{y}_{23}$.

IAME :

- Action de la pesanteur sur 3 en I ;
- Action de 2 sur 3 dans la pivot d'axe $\vec{y}_{23}$;
- Action de 2 sur 3 dans la pivot glissant $\vec{y}_{23}$;
- Action du moteur M_3 autour de $\vec{y}_{23}$.

Q12. Quel solide ou ensemble de solides faut-il isoler pour obtenir l'équation de mouvement de l'anneau 2 en mouvement par rapport au bâti 0? Quelle équation du PFD est intéressante? Vous préciserez la projection utile, et si nécessaire le point d'application du PFD et ferez l'inventaire des actions mécaniques extérieures.

On isole $\{2+3\}$, et TMD en I en projection sur $\vec{x}_{12}$.

IAME :

- Action de la pesanteur sur 2 et 3 en I ;
- Action de 1 sur 2 dans la pivot d'axe $\vec{x}_{12}$;
- Action de 1 sur 2 dans la pivot glissant $\vec{x}_{12}$;
- Action du moteur M_2 autour de $\vec{x}_{12}$.

Q13. Quel solide ou ensemble de solides faut-il isoler pour obtenir l'équation de mouvement du sous-ensemble 1 en mouvement par rapport au bâti 0? Quelle équation du PFD est intéressante? Vous préciserez la projection utile, et si nécessaire le point d'application du PFD et ferez l'inventaire des actions mécaniques extérieures.

On isole $\{1+2+3\}$, et TMD en O en projection sur $\vec{z}_{01}$.

IAME :

- Action de la pesanteur sur 2 et 3 en I ;
- Action de la pesanteur sur 1 en G_1 ;
- Action de 0 sur 1 dans la pivot d'axe $(O, \vec{z}_{01})$;
- Action du moteur M_1 autour de $\vec{z}_{01}$.

II Étude du modèle du mécanisme

On s'intéresse qu'au guidage en rotation de la nacelle 3 par rapport à l'anneau 2, réalisé par l'intermédiaire de 2 liaisons, une liaison pivot et une liaison pivot glissant, de même axe.

Q14. Tracer le graphe de liaisons de la partie du mécanisme étudiée, et déterminer la liaison équivalente entre la nacelle 3 et l'anneau 2. En déduire le graphe de liaison minimal de la partie du mécanisme étudiée.

2 liaisons en parallèle. Liaison pivot d'axe $(I, \vec{y}_{23})$. Une seule liaison pivot entre les 2 CEC.

Q15. Est-il possible de déterminer l'ensemble des inconnues statiques dans ces 2 liaisons ? Justifier votre réponse.

Non, car le modèle de mécanisme proposé est hyperstatique de degré $h = m - I_c + E_c = 1 - (1+2) + 6 = 4$.

Q16. Justifier cette impossibilité vis-à-vis du mécanisme étudié.

On veut que l'ensemble soit bien rigide et solide!!!

Q17. Quelle(s) condition(s) géométrique et/ou dimensionnelle faut-il mettre en place pour s'assurer du montage de la liaison entre l'anneau 2 et la nacelle 3 ?

Coaxialité entre les 2 axes.

Q18. Proposer la modification d'une liaison (ou plus) pour rendre le modèle de mécanisme isostatique.

Impossible de ne modifier qu'une seule liaison. Il faut mettre une sphérique et une sphère-cylindre, pour que le modèle de mécanisme soit isostatique.
