

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2021

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !

Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

Système de stationnement automatique

Corrigé UPSTI

II DETECTION DE L'ENVIRONNEMENT ET PREDICTION DE LA TRAJECTOIRE

II.A Détection et caractérisation d'une place libre

Question 1

Les capteurs à ultrasons pouvant participer au respect de l'exigence 1.4 sont les capteurs à ultrason a, c et b et d.

Tous les capteurs peuvent participer à l'exigence 1.6.1.

Question 2

Entre les instants T_a et T_b , le véhicule a parcouru la distance $V_d(T_a - T_b) = V_d \Delta T_p = L$ qui correspond à la longueur de la place L .

Or l'exigence 1.4 précise : $L > L_v + 2 * 0,5$ d'où

$$\Delta T_p > \frac{1 + L_v}{V_d}$$

Question 3

En T_e l'onde émise par le capteur parcourt $2(D + e)$ à la vitesse de V_s : $2(D + e) = V_s T_e$ d'où $e = \frac{1}{2}(V_s T_e - D)$

D'après l'exigence 1.4 : $e > e_v + 0,15$

D'où $\frac{1}{2}(V_s T_e - D) > e_v + 0,15$

$$T_e > \frac{2(e_v + 0,15 + D)}{V_s}$$

II.B Trajectoire à suivre pour le stationnement

Question 4

Les paramètres propres aux véhicules sont L_f , L_v et e_v

Les paramètres géométriques qui se déduisent directement des informations des capteurs sont : L , L_a , e , D et d_r

Il reste donc à déterminer R pour que la géométrie de la trajectoire de F soit définie.

Question 5

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$x_p = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{x_0} = \frac{1}{2}(L - L_a - L_f)$$

$$y_p = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF_f} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_0F_f} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}(D + e - d_r)$$

Question 6

Dans le triangle O_1PP' rectangle en P' avec P' le projeté de P sur la droite OO_1

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x_p}{R}$$

$$R = \frac{(L - L_a - L_f)}{\sqrt{2}}$$

Question 7

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2F}$$

$$\overrightarrow{O_2F} = R\cos(\theta_2) \cdot \overrightarrow{x_0} + R\sin(\theta_2) \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{OO_2} \cdot \overrightarrow{x_0} = L - L_a - L_f = R\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{OO_2} \cdot \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{y_0} = R - 2R\cos(45^\circ) = R(1 - \sqrt{2})$$

D'où

$$x = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{x_0} = R\cos(\theta_2) + R\sqrt{2}$$

$$y = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{y_0} = R(1 - \sqrt{2}) + R\sin(\theta_2)$$

θ_2 varie entre 90° et $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ (la portion de cercle de C_2 s'arrête au point P)

II.C Direction du véhicule

Question 8

L'exigence 1.5 est vérifiée en position 4 car on a bien :

$$L_a = 0,30 \text{ m} \geq 0,20 \text{ m et } d_r = 0,25 \text{ m} \geq 0,15 \text{ m}$$

L'exigence 1.4 est vérifiée : la longueur de la place vaut 6 m, celle du véhicule 4 m, et la largeur de la place vaut 2,25 m et celle du véhicule 1,70 m et $6 \geq 4 + 2 * 0,5$ et $2,25 \geq 1,70 + 0,15$

La trajectoire peut donc être validée

Question 9

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = \overrightarrow{V(F, V/R_1)} + \overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = R\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} + (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v}$$

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} - L_t\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_v}$$

Autre solution en passant par O_1 :

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = \overrightarrow{V(O_1, V/R_1)} + \overrightarrow{CO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = \vec{0} + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FO_1}) \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v} + R \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v}$$

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} - L_t\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_v}$$

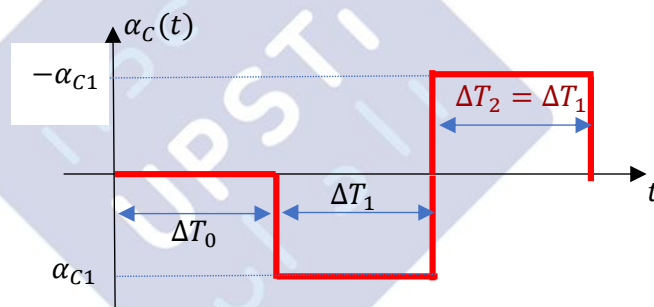
Question 10

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = v \cdot \overrightarrow{x_r} = v \cdot (\cos(\alpha) \cdot \overrightarrow{x_v} + \sin(\alpha) \cdot \overrightarrow{y_v})$$

$$\begin{cases} v \cdot \cos(\alpha) = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \\ v \cdot \sin(\alpha) = -L_t\dot{\theta}_1 \end{cases}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-L_t}{(R - e_t)}$$

Question 11



III MODELISATION DE LA COMMANDE DE DIRECTION ET VALIDATION DES PERFORMANCES

III.A Modélisation de la direction du véhicule radiocommandé

III.A.1 Etude structurelle de la direction du véhicule radiocommandé

Question 12

1 : Hacheur

2 : Moteur à courant continu

3 : Réducteur

4 : Bras de servomoteur + transmission (tige + bielle de direction + bielle de renvoi + bras de direction)

5 : Position angulaire de l'axe de sortie du réducteur à acquérir

6 : potentiomètre

7 : microcontrôleur

III.A.2 Commande angulaire des roues directrices

Question 13

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$$

$$l_1 \vec{x}_1 + b \vec{x}_2 + (a - l_1) \vec{x}_3 - a \vec{x} - b \vec{y} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{x} : l_1 \cdot \cos(\alpha_1) + b \cdot \cos(\alpha_2) + (a - l_1) \cdot \cos(\alpha_3) - a = 0 \\ \text{sur } \vec{y} : l_1 \cdot \sin(\alpha_1) + b \cdot \sin(\alpha_2) + (a - l_1) \cdot \sin(\alpha_3) - b = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = 90^\circ \text{ donc sur } \vec{y} : l_1 \cdot \sin(\alpha_1) + b + (a - l_1) \cdot \sin(\alpha_3) - b = 0$$

$$\sin(\alpha_3) = -\frac{l_1}{(a - l_1)} \sin(\alpha_1) \text{ d'où } k = -\frac{l_1}{(a - l_1)}$$

Question 14

Pour α_3 variant de 0° à 45° , α_3 est une fonction linéaire de α_1 d'après la figure 15

$$\alpha_3 = K_{31} \alpha_1 \text{ avec } K_{31} = \frac{-40 - 0}{30 - 0} = -\frac{4}{3}$$

Question 15

- Puissances extérieures :
 - Couple Moteur : $P_{moteur \rightarrow 1/R} = C_m \omega_m$
 - Pesanteur : $P_{pes \rightarrow \Sigma/R} = 0$ car $\vec{y}$ est perpendiculaire à la vitesse de déplacement du véhicule
 - Frottements visqueux : $P_{frott \rightarrow 1/R} = -f \dot{\alpha}_1^2$
 - Liaison de 0 avec Σ : $P_{0 \rightarrow \Sigma/R} = 0$ car les liaisons avec 0 sont supposées parfaites
- Puissances intérieures :
 - Liaison entre les solides qui composent Σ : $P_{i \leftrightarrow j} = 0$ car les liaisons sont supposées parfaites

Question 16

$$\overrightarrow{V(E, 3/0)} = \overrightarrow{V(D, 3/0)} + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{\Omega(3/0)} = \vec{0} - l_3 \cdot \vec{y}_3 \wedge \dot{\alpha}_3 \vec{z} = -l_3 \dot{\alpha}_3 \cdot \vec{x}_3$$

$$\text{Or } \alpha_3 = K_{31} \alpha_1 \Rightarrow \dot{\alpha}_3 = K_{31} \dot{\alpha}_1 \text{ d'où } \overrightarrow{V(E, 3/0)} = -l_3 K_{31} \dot{\alpha}_1 \cdot \vec{x}_3$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{V(E, 3/0)} = \overrightarrow{V(E, 5/0)} \text{ car } \overrightarrow{V(E, 5/0)} = \vec{0} \text{ car E est un point de l'axe de la liaison pivot entre 5 et 3}$$

$$\overrightarrow{V(E, 3/0)} = -l_3 K_{31} \dot{\alpha}_1 \cdot \vec{x}_3$$

Question 17

Solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport au repère galiléen

- $E_c(\text{moteur}/0) = \frac{1}{2}J_m\dot{\alpha}_1^2$
- $E_c(6/0) = \frac{1}{2}J_6\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}J_6\lambda^2\dot{\alpha}_1^2$ car $\alpha = \lambda \cdot \alpha_1$
- $E_c(6'/0) = \frac{1}{2}J_6\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}J_6\lambda^2\dot{\alpha}_1^2$

Solide en mouvement de translation rectiligne

- $E_c(5/0) = \frac{1}{2}m_5 \left(\overrightarrow{V(E, 5/0)} \right)^2 = \frac{1}{2}m_5(l_3K_{31}\dot{\alpha}_1)^2$

Question 18

$$E_c(\Sigma/0) = E_c(\text{moteur}/0) + E_c(6/0) + E_c(6'/0) + E_c(5/0) = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\alpha}_1^2$$

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}J_m\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_6\lambda^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}J_6\lambda^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}m_5(l_3K_{31}\dot{\alpha}_1)^2 = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\alpha}_1^2$$

$$J_{eq} = J_m + 2J_6\lambda^2 + m_5(l_3K_{31})^2$$

Question 19

- On trace sur la figure 17, l'asymptote correspondant aux grandes valeurs de t . Son équation est alors donnée par

$$f(t) = K_m K_c K_r u_0 (t - \tau_m)$$

On en déduit du tracé la pente : $K_m K_c K_r u_0 = \frac{0,5-0,1}{0,09-0,03} = \frac{20}{3}$

$$K_m = \frac{20}{3} \times \frac{1}{K_c K_r u_0} = \frac{20}{3} \times \frac{120}{1,05 \times 3} = 254 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

- L'asymptote coupe l'axe des abscisses en $t - \tau_m$. On peut simplement lire au point d'intersection :

$$\tau_m = 0,012 \text{ s}$$

Question 20

- $K_m = \frac{1}{K_e} = 0,00394 \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$
- $\tau_m = \frac{RJ_m}{K_e^2}$ d'où $RJ_m = \tau_m K_e^2 = 3,2 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Question 21

Rotor est bloqué donc $\omega_m(t) = 0$ et $e(t) = 0$. Ainsi l'équation électrique du moteur s'écrit

$$LpI(p) + RI(p) = U_m(p)$$

$$\frac{I(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{R + Lp} = \frac{1/R}{1 + \frac{L}{R}p}$$

Question 22

$\frac{I(p)}{U_m(p)}$ est une fonction de transfert du 1^{er} ordre.

- On identifie K en régime permanent : $K = \frac{i(\infty)}{u_0} = \frac{1,35}{3} = \frac{1}{R}$ d'où $R = 2,22 \, \Omega$
- La constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ se lit comme l'abscisse lorsque $i(\tau) = 0,63 \times i(\infty)$

$$\tau = 0,02 \text{ ms d'où } L = R\tau = 2,22 \times 0,02 \cdot 10^{-3} = 44,4 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

III.A.3 Modèle global et performances de la commande sans correction

Question 23

Un système asservit de qualité est lorsque : $\varepsilon(t) = 0$ quand $\alpha(t) = \alpha_c(t)$

$$\varepsilon(p) = U_c(p) - U_{mes}(p) = \frac{K_a}{H_t(p)} \alpha_c(p) - \frac{K_c}{H_t(p)} \alpha(p)$$

$$\varepsilon(p) = 0 \text{ quand } K_a = K_c$$

Question 24

$$H(p) = \frac{A(p)}{A_c(p)} = \frac{1}{H_t(p)} K_a H_t(p) \frac{C(p) H_m(p) K_r H_i(p) \cdot 1/p}{1 + C(p) H_m(p) K_r H_i(p) \cdot K_c \cdot 1/p} = \frac{K_a K_r K_m}{p(1 + \tau_m p) + K_c K_r K_m}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_c K_r K_m} p + \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m} p^2} \quad H(p) \text{ est d'ordre 2}$$

Par identification :

- Gain statique : $K = 1$
- Pulsation propre :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_m}{K_c K_r K_m} \quad \text{d'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_r K_m}{\tau_m}} = \sqrt{\frac{256 \times \frac{1}{120} \times 1,05}{0,03}} = 8,64 \text{ rad/s}$$

- Coefficient d'amortissement :

$$\frac{2z}{\omega_0} = \frac{1}{K_c K_r K_m} \text{ d'où } z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau_m K_c K_r K_m}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{0,03 \times 256 \times \frac{1}{120} \times 1,05}} = 1,93$$

Question 25

- $z=1,93 > 1$ il n'y a pas d'amortissement. Le tableau 1 spécifie qu'aucun amortissement n'est admissible donc la performance de stabilité est respectée
- Le gain statique est égal à 1 donc l'erreur statique est nulle. Le tableau 1 spécifie une erreur nulle pour une entrée échelon donc la performance de précision angulaire est respectée

(on peut utiliser également le fait que la classe de la FTBO est de 1 donc l'erreur statique est nulle ou bien refaire le calcul de l'erreur avec la définition et le théorème de la valeur finale)

Question 26

- La courbe du modèle théorique est quasiment confondue avec celle du modèle expérimental donc le modèle théorique est validé.
- Graphiquement on mesure : $t_{5\%} = 1,13 \text{ s} > 0,4 \text{ s}$

Le tableau 1 exige un temps de réponse inférieur ou égale à 0,4 s donc la performance de rapidité n'est pas respectée.

IV AMELIORATION DES PERFORMANCES – CHOIX D'UNE CORRECTION DE LA COMMANDE

IV.A. Amélioration et correction du modèle de l'asservissement en position des roues

Question 27

$$H(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)} = \frac{K_p K}{K_p K + p(1 + \tau p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_p K} p + \frac{\tau}{K_p K} p^2}$$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_p K}{\tau}}, z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau K K_p}}$$

On souhaite une commande la plus rapide possible sans dépassement $\Rightarrow z = 1$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau K K_p}} = 1 \Rightarrow K_p = \frac{1}{4\tau K} = \frac{1}{4 \times 0,02 \times 2,2} = 3,8 \text{ V/rad}$$

Question 28

- On observe une erreur statique nulle, comme demandé dans le tableau 1 donc la performance de précision angulaire est respectée

- On relève $t_{5\%} = 0,26 \text{ s} < 0,4 \text{ s}$ comme demandé dans le tableau 1 donc la performance de rapidité est respectée
- On n'observe aucun dépassement comme demandé dans le tableau 1, donc la performance de stabilité est respectée

IV.B. Performances dans le domaine réel et amélioration de la correction

Question 29

La courbe $\alpha(t)$ voiture sur le sol présente une erreur statique non nul donc la performance de précision angulaire n'est plus respectée pour le véhicule sur le sol. Cela peut s'expliquer par la présence de frottements secs entre les roues et le sol.

Question 30

Le correcteur intégral a une marge de phase nulle donc il y a risque d'instabilité contrairement au correcteur PI. On choisira donc le correcteur PI

Question 31

- Précision : erreur statique nulle
- Rapidité : $t_{5\%} = 0,3 \text{ s} < 0,4 \text{ s}$
- Amortissement : aucun dépassement

Les 3 critères du tableau 1 sont vérifiées donc toutes les performances du cahier des charges sont respectées

Question 32

Dans la réalité le braquage et le contre-braquage ne sont pas instantanés et pendant que le véhicule est en mouvement. Donc la consigne d'angle $\alpha_c(t)$ en échelon pur et donc le changement de valeur instantanée ne peut être respectée. Cela explique l'écart entre la trajectoire réelle du véhicule et la trajectoire théorique.

Question 33

Il y a un facteur d'échelle de 1/10 entre la voiture miniature RC et le véhicule réel.

- On mesure $d_{r\text{ RC}} = 0,075 \text{ m}$ donc $d_{r\text{ réel}} = 0,75 \text{ m} > 0,15 \text{ m}$ donc le critère de distance latérale est vérifié
- On mesure $L_{a\text{ RC}} = 0,0125 \text{ m}$ donc $L_{a\text{ réel}} = 0,125 \text{ m} < 0,2 \text{ m}$ donc le critère de distance arrière n'est pas vérifié

Conclusion : l'insertion en une seule fois n'est donc pas possible en respectant toutes les exigences dimensionnelles du cahier des charges

L'automatisation de la manœuvre n'est toutefois pas à remettre en cause, il suffit d'ajouter une avancée supplémentaire en ligne droite, une fois que la voiture est entrée dans la place sans rencontrer d'obstacle. Ainsi la distance arrière sera également respectée.