

Ex 1 : 1. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

2. Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{R}_+^* telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Déterminer un équivalent de (u_n) , puis discuter la convergence de $\sum u_n$.

3. a. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle.
- La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit telle que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.

Montrer la transformation d'Abel : $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^N a_n b_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N B_N$.

En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.

b. Application : Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$, avec α dans \mathbb{R}_+^* et θ dans $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Ex 2 : 1. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, u(x))$ est liée pour tout x de E . Montrer que u est une homothétie.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

3. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\text{Ker } f^{k_0} = \text{Ker } f^{k_0+1}$, puis que : $\forall k \geq k_0, \text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k_0}$.

b. On pose $K = \text{Ker}(f^{k_0})$ et $I = \text{Im}(f^{k_0})$. Montrer que $E = K \oplus I$.

Ex 3 : 1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que B est de rang un si et seulement s'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls telles que : $B = VU^T$.

2. Déterminer $C = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer M_n^n .

4. Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que si $AX = 0$ et $X \neq 0$, alors il existe i_0 tel que : $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0 j}|$.

b. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible.

5. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $2n$ et f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = id_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que :
- $$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \text{ et } Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 4 : Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout x de E , on pose $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$.

- a. Montrer que pour tout x de E , I_x est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. On note μ_x le polynôme unitaire tel que $\mu_x \mathbb{K}[X] = I_x$.
- b. Montrer que $\mu_x | \mu_u$.
- c. On suppose que $\mu_u = P^r$, avec P irréductible sur \mathbb{K} . Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$.
- d. Montrer que si μ_x et μ_y sont premiers entre eux, alors $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.
- e. On suppose que la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ de μ_u est $\mu_u = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$.
Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on pose $E_i = \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$. Soit u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i . Montrer que le polynôme minimal de u_i est $P_i^{\alpha_i}$.
- f. En déduire l'existence d'un élément x de E tel que $\pi_u = \mu_x$.

Ex 5 : Soient p un nombre premier impair et $Z = \{\bar{x}^2, \bar{x} \in \mathbb{F}_p\}$. Déterminer $card(Z)$.

Ex 6 : Soient \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{C} , α un nombre complexe non nul, et on pose $\mathbb{K}[\alpha] = \{Q(\alpha), Q \in \mathbb{K}[X]\}$, qui est un \mathbb{K} -espace vectoriel. On pose enfin $I_{\mathbb{K}}(\alpha) = \{Q \in \mathbb{K}[X], Q(\alpha) = 0\}$. Si on a : $I_{\mathbb{K}}(\alpha) \neq \{0\}$, on dit que α est \mathbb{K} -algébrique, ce que l'on suppose dans la suite. Dans le cas contraire, on dit que α est transcendant sur \mathbb{K} .

1. Donner l'exemple d'un nombre irrationnel \mathbb{Q} -algébrique.
2. On suppose que α est algébrique. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I_{\mathbb{K}}(\alpha) = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$. Montrer que P est irréductible.

Ce polynôme P sera noté $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ et appelé polynôme \mathbb{K} -minimal de α .

3. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
4. Montrer que le degré de $P_{\mathbb{K}}(\alpha)$ vaut $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\alpha])$.
5. Montrer que $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.
6. (a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et que α est dans \mathbb{Q} et qu'il est annulé par un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, alors α est dans \mathbb{Z} .
(b) Montrer que $U = X^3 - 3X + 1$ est irréductible sur \mathbb{Q} .
7. On pose $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Déterminer la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\mathbb{Q}[\omega]$.
8. Soit S un polynôme, appartenant à $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geq 2$, irréductible sur \mathbb{Q} .

- (a) Démontrer qu'il existe un entier naturel C_S (différent de 0) tel que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ (le couple (p, q) appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$) il vienne: $|S(r)| \geq \frac{1}{C_S q^n}$.
- (b) Supposons que le réel α soit une racine de S . Déduire du résultat précédent l'existence d'une constante K , strictement positive, telle que pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$ appartenant à l'intervalle $[\alpha - 1, \alpha + 1]$, l'inégalité $|\alpha - r| \geq \frac{K}{q^n}$ ait lieu.
- (c) Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des réels définis par la relation: $t_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}$, $n \geq 0$.
 Démontrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente; soit t sa limite. Établir l'inégalité: $|t - t_n| \leq 2 \cdot 10^{-(n+1)!}$. En déduire que le réel t (nombre de Liouville) est transcendant sur \mathbb{Q} .
9. Soient $\alpha > \beta$ les deux racines de $P = X^2 - X - 1$. On pose $A = \mathbb{Z}[\alpha] = \{x + \alpha y, x, y \in \mathbb{Z}\}$ et $\sigma : x + \alpha y \mapsto x + \beta y$. Soit $N : z \mapsto z\sigma(z)$ défini sur A .
- (a) Montrer que A est un anneau. On notera U l'ensemble des inversible de cet anneau.
- (b) Pour $u \in A$, montrer que l'écriture $u = x + \alpha y$, avec x, y dans \mathbb{Z} est unique.

On peut donc définir $\sigma : x + \alpha y \mapsto x + \beta y$ sur A et $N : z \mapsto z\sigma(z)$.

- (c) Montrer que Id_A et σ sont les seuls automorphismes d'anneaux de A .
- (d) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in U \Leftrightarrow |N(z)| = 1$.
- (e) En déduire que $U \cap \mathbb{R}_+^*$ est engendré par α .
-