

## Ralentissements et freinages

Solution proposée par JR Seigne MP,  
avec la collaboration de M Libourel Sciences Industrielles pour l'Ingénieur MP\*,  
Clemenceau Nantes

### 1 Marées et synchronisation d'oscillateurs

#### 1.1 Étude qualitative

##### 1.1.1 Cas statique

1. La force subie par  $G_1$  est est  $\vec{F}_1 = -\frac{GmM}{(d-b)^2}\vec{e}_x$ . Si l'on effectue un développement limité, on trouve :

$$\vec{F}_1 = -\frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right)\vec{e}_x.$$

2.  $G_1$  subit la force  $\vec{F}_1$  et la force exercée par  $G_2$  qui a pour expression  $\vec{f}_{2\text{sur}1} = \frac{Gm^2}{4b^2}\vec{e}_x$ . La force totale est donc  $\vec{F}_{\text{tot}1} = \vec{e}_x \left[ \frac{Gm^2}{4b^2} - \frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right) \right]$ . Comme  $G_1$  est immobile dans le référentiel  $Oxy$  non galiléen, on a  $\vec{F}_{\text{tot}1} + \vec{f}_{i,\text{ent}} = \vec{0}$  avec  $\vec{f}_{i,\text{ent}} = m\Omega_r^2(d-b)\vec{e}_x$ . En tenant compte de l'expression de  $\Omega_r$ , on obtient la relation suivante pour qu'il y ait dislocation du système :  $\frac{Gm^2}{4b^2} - \frac{GmM}{d^2}\left(1 + 2\frac{b}{d}\right) + \frac{GmM}{d^2}\left(1 - \frac{b}{d}\right) < 0$ . Le bilan des forces précédent est négatif car cela correspond à une accélération négative pour  $G_1$  dans le référentiel  $Oxy$  et donc à un éloignement de  $G_1$  par rapport à  $G_2$ . En développant le calcul et en simplifiant les termes qui doivent l'être, on arrive à la condition :  $\frac{m}{4b^3} < \frac{3M}{d^3}$ . Il existe donc bien une limite en dessous de laquelle le satellite se brise. On trouve :  $d_m = b \left(\frac{12M}{m}\right)^{1/3}$ .

3. Pour le système Terre-Lune, on a  $M = 162m$ , on en déduit que :  $d_m = 8190 \text{ km}$ . Le rayon de la Terre est de 6400 km, on a donc  $d_m > R_T$ . Au moment de son détachement de la Terre le morceau de proto-Lune aurait subi des effets de marée importants. On peut penser que ce morceau de proto-Lune se serait disloqué en de nombreux petits morceaux. L'hypothèse paraît peu plausible.

##### 1.1.2 Déformation de la planète pendant sa révolution

4. La force gravitationnelle subie par  $m'$  est :  $\vec{F}_g = -GMm'\frac{\vec{TP}}{TP^3}$ . On va décomposer le vecteur en passant par  $O$  :  $\vec{F}_g = -GMm' \left( \frac{\vec{TO}}{TP^3} + \frac{\vec{OP}}{TP^3} \right)$ . Il faut effectuer un développement limité de  $TP^3$ . On écrit que  $TP^2 = d^2 + r^2 + 2rd \cos \theta$ . En ne conservant que le terme de premier ordre puisque  $r \ll d$ , on obtient  $TP^3 = d^3(1 + \frac{3r}{d} \cos \theta)$ . On va faire intervenir ce développement limité sur le terme en  $\frac{\vec{TO}}{TP^3}$ . Par contre, sur le terme en  $\frac{\vec{OP}}{TP^3}$ , on va considérer que  $TP^3 \simeq d^3$  à l'ordre 0 puisque le vecteur  $\vec{OP}$  est déjà du premier ordre. La force gravitationnelle est donc  $\vec{F}_g = -\frac{GMm'}{d^2}\left(1 - \frac{3r}{d} \cos \theta\right)\vec{e}_x - \frac{GMm'}{d^3}(r \cos \theta \vec{e}_x + r \sin \theta \vec{e}_y)$ . Le terme de marée est tel que  $\vec{F}_g = -\frac{GMm'}{d^2}\vec{e}_x + \vec{F}$ . On en déduit bien que :  $\vec{F} = \frac{GMm'r}{d^3} [2 \cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y]$ .

5. Sur le schéma de la figure 1. On raisonne tout d'abord pour  $0 < \theta < \pi/2$ , on obtient les forces au point  $P$ . Pour le point  $P'$  symétrique de  $P$ , il faut considérer  $\theta' = \theta + \pi$ . Dans les deux cas, on peut constater que la force de marée est dirigée globalement **vers l'équateur** de la sphère. Il va se former un bourrelet

équatorial. Ce bourrelet tend à donner à la sphère une forme d'ellipsoïde que l'on peut voir représenté à la figure 1 dans deux cas différents de position de la sphère dans sa trajectoire.

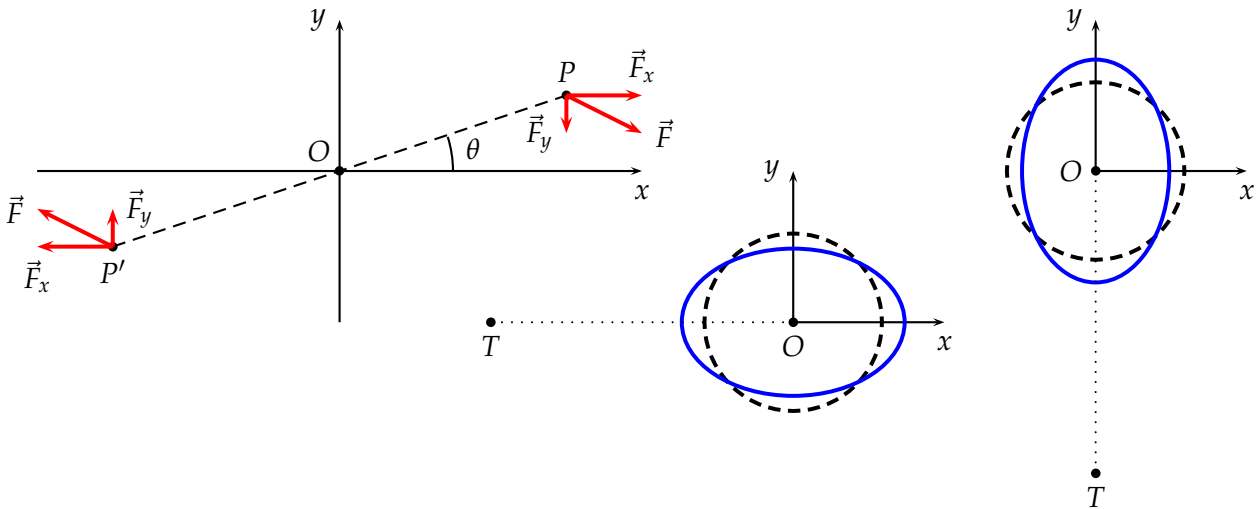


FIGURE 1 – Sens des forces de marées

## 2 Synchronisation

### 2.1 Considérations énergétiques

6. Les directions des axes de rotation de la Terre et de la Lune sont différentes.

7. L'énergie cinétique de révolution correspond à la translation circulaire sur un cercle de rayon  $GO$  pour la Lune et  $GT$  pour la Terre avec une vitesse angulaire  $\Omega(t)$ . On a donc :  $E_{c,rev} = \frac{1}{2}M\Omega^2GT^2 + \frac{1}{2}2m\Omega^2GO^2$ . En tenant compte de l'expression fournie par l'énoncé, expression qui introduit la masse réduite du système  $\mu$ , on peut en conclure que :  $E_{c,rev} = \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2(t)$ .

8. Pour déterminer l'expression de l'énergie cinétique totale, il faut prendre en compte les deux rotations propres des deux astres. Pour celle de la Terre, cela représente  $\frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\omega^2$  alors que pour la Lune, cela va être  $\frac{1}{2}\frac{2}{5}2mR_L^2\Omega^2$ . On obtient alors l'expression suivante :  $E_c = \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2(t) + \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{5}2mR_L^2\Omega^2$ . Comme la masse de la Terre et la masse de la Lune sont telles que  $M = 81(2m)$ , on constate que  $\mu \simeq 2m$ , on se retrouve avec  $E_c = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + (\frac{1}{2}\mu d^2 + \frac{1}{5}2mR_L^2)\Omega^2$ . Comme  $d^2 \gg R_L^2$ , on peut sans peine négliger l'énergie de rotation propre de la Lune pour aboutir à la formule proposée par l'énoncé :  $E_c = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2$ .

9. Le moment cinétique va se décomposer comme pour l'énergie cinétique en des effets liés à la translation circulaire et des effets de la rotation propre qui sont  $J_T\omega$  et  $J_L\Omega$ . Les moments d'inertie ne sont pas fournis mais l'expression fournie de l'énergie cinétique est de la forme  $\frac{1}{2}J'\omega'^2$  avec  $J' = \frac{2}{5}m'r'^2$ . Pour la translation, il faut revenir à la définition du moment cinétique pour un point :  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$  avec ici  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$  ce qui fait que sur l'axe perpendiculaire au plan du mouvement, on a la forme  $L = mr^2\omega$ . On obtient alors  $\sigma_G = MGT^2\Omega + 2mGO^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega + \frac{2}{5}2mR_L^2\Omega$ . On utilise à nouveau la relation introduisant la masse réduite et on fait la même approximation en négligeant la contribution de la rotation propre de la Lune, on obtient finalement  $\sigma_G \simeq \mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega$ . L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique évaluée avant et de l'énergie potentielle gravitationnelle  $-\frac{GM2m}{d}$ . L'énergie mécanique est alors :

$$E_m = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2 - \frac{GM2m}{d}$$

10. La relation de la dynamique appliquée à la Terre dans le référentiel barycentrique du système Terre-Lune considéré comme galiléen est  $-\frac{GM2m}{d^2}\vec{e}_x = -M\Omega^2GT\vec{e}_x$ . La définition du barycentre est telle que  $M\vec{TT} + 2m\vec{T}O = (M + 2m)\vec{T}G$  d'où la relation  $TG = \frac{2m}{M+2m}d$ . En utilisant cette expression dans la relation de la dynamique, on arrive à  $\frac{GM2m}{d^2} = M\Omega^2\frac{2m}{M+2m}d$ . On obtient alors la relation évoquée par l'énoncé :

$$\Omega^2 d^3 = G(M + 2m)$$

même relation qui a bien la forme de la loi de KÉPLER. Si l'on différentie cette relation, en raisonnant en logarithme, on arrive à  $2\frac{\delta\Omega}{\Omega} + 3\frac{\delta d}{d} = 0$  et par conséquent :  $\boxed{\frac{\delta\Omega}{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{\delta d}{d}}$ .

11. Le système est isolé, il y a conservation du moment cinétique donc :  $\mu d^2\Omega + \frac{2}{5}MR^2\omega = \text{Cte}$ . Dans cette relation,  $d$ ,  $\omega$  et  $\Omega$  sont fonction du temps. Si on différentie, il faut bien en tenir compte :  $2d\delta d\Omega\mu + \mu d^2\delta\Omega + \frac{2}{5}MR^2\delta\omega = 0$ . En utilisant la relation établie à la question précédente, on arrive à  $\delta\omega = -\frac{5}{4}\frac{d\Omega\mu}{MR^2}\delta d$  et ensuite à  $\delta\omega = \frac{5}{6}\frac{\mu d^2}{MR^2}\delta\Omega$ . On peut donc établir la relation demandée par l'énoncé :  $\boxed{\frac{\delta\omega}{\delta\Omega} = \frac{5}{6}\frac{2m}{M+2m}\frac{d^2}{R^2}}$ .

12. Il faut maintenant différentier l'énergie mécanique :  $dE_m = \frac{2}{5}MR^2\omega\delta\omega + \frac{1}{2}\mu(2d\delta d\omega^2 + 2\Omega\delta\Omega d^2) + \frac{GM2m}{d^2}\delta d$ . On utilise l'expression  $\frac{GM2m}{d^2} = \frac{M2m}{M+2m}\Omega^2 d$  pour faire progresser la mise en forme du calcul ainsi que la relation donnant  $\delta d$  en fonction de  $\delta\Omega$  et évidemment la relation entre  $\delta\omega$  et  $\delta\Omega$ . Après calculs, on obtient effectivement l'expression proposée dans l'énoncé  $\boxed{dE_m = \frac{2}{5}MR^2(\omega - \Omega)\delta\omega}$ .

### 2.1.1 Stabilité du système Terre-Lune

13. L'énergie mécanique diminue  $dE_m < 0$ . Comme  $\omega > \Omega$ , on en déduit que  $\delta\omega < 0$ . Le coefficient de proportionnalité est positif entre  $\delta\omega$  et  $\delta\Omega$ . On en déduit que  $\delta\Omega < 0$ . Les deux rotations ralentissent. La distance  $d$ , elle, augmente au cours du temps puisque  $\delta d > 0$ . Avec l'indication fournie, on peut constater que la distance augmente de 3,5 m par siècle. On posant  $\Delta t$  pour la durée d'un siècle, on a  $\frac{\delta d}{d\Delta t} = 9,2 \times 10^{-9}$  par siècle. On a donc  $|\delta\Omega| = 1,4 \times 10^{-8}\Omega = \frac{1,4 \times 10^{-8}}{27}\omega = 5,2 \times 10^{-10}\omega$  par siècle. On a donc  $|\delta\omega| = 35,6|\delta\Omega| = 1,85 \times 10^{-8}$  pour un siècle. La durée d'un jour est  $T_{1j} = \frac{2\pi}{\omega}$ . On peut donc écrire que  $|\frac{\delta T_{1j}}{T_{1j}}| = |\frac{\delta\omega}{\omega}|$  d'où  $|\frac{\delta T_{1j}}{T_{1j}}| = 1,85 \times 10^{-8}$  pour un siècle. La durée d'un jour aura augmenté de  $\boxed{1,6 \text{ ms}}$  dans un siècle.

14. Pour 500 millions d'années, on obtiendrait environ 222 heures. Cela ne correspond pas du tout. L'intervalle entre deux lunaisons dépend du rapport des vitesses de rotation. On note  $L_u = \frac{\omega}{\Omega}$ . Par différentiation, on obtient :  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta\Omega}{\Omega}$ . On arrive à  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega}(1 - \frac{\delta\Omega\omega}{\delta\omega\Omega})$ . On a donc :  $\frac{dL_u}{L_u} = \frac{\delta\omega}{\omega}(1 - \frac{27}{35,6})$ . Comme  $\delta\omega < 0$ , on en déduit que  $dL_u < 0$ . On a donc :  $\boxed{|\frac{dL_u}{L_u}| < |\frac{\delta\omega}{\omega}|}$ . La lunaison diminue au fil du temps. En valeur absolue, elle diminue moins que la durée du jour.

15.  $\omega$  diminue plus vite que  $\Omega$ . À un moment donné, on arrivera à  $\boxed{\omega = \Omega}$ . Il n'y aura plus d'énergie dissipée par effet de marée puisque  $dE_m$  est proportionnel à  $(\omega - \Omega)$ . À ce moment-là, on va poser  $\omega = \Omega = \omega_f$ . On note aussi la distance Terre-Lune  $d = d_f$ . Le moment cinétique qui est une constante, est le même à la date  $t = 0$  et à la date où il y a synchronisation des vitesses de rotation. Le moment cinétique s'écrit  $\sigma_G = (\mu d_f^2 + \frac{2}{5}MR^2)\omega_f$ . Ce moment cinétique doit être égal à sa valeur actuelle  $\sigma_G = (\frac{\mu d^2}{27} + \frac{2}{5}MR^2)\omega = 4,9 \times 10^{38} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La relation de forme KÉPLER vérifiée est  $\Omega^2 d^3 = (\frac{\omega}{27})^2 d^3 = \omega_f^2 d_f^3 = 4 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . Dans l'expression du moment cinétique, on va négliger la contribution du terme en  $R^2$  par rapport à celui en  $d_f^2$ . On obtient alors les deux relations suivantes :  $\omega_f d_f^2 = 4 \times 10^{11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_f^2 d_f^3 = 4 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . On trouve alors que  $d_f = 530 \times 10^6 \text{ m}$  et  $\omega_f = 1,6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La valeur de la distance  $d_f$  autorise l'approximation réalisée même si la marge n'est pas très grande. La durée du jour est donc  $T_f = \frac{2\pi}{\omega_f}$ . Cela correspond à  $\boxed{45 \text{ jours}}$  actuels.

16. On passe de  $\omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  d'aujourd'hui à  $\omega_f = 1,6 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse de rotation a perdu environ 98% de sa valeur. Comme  $\frac{\delta\omega}{\omega} \simeq 10^{-8}$  par siècle. Il faudra environ  $10^8$  siècles pour y arriver. Cela représente  $\boxed{10^{10} \text{ ans}}$ . Cela correspond grosso modo à l'âge de l'Univers.

17. La perte d'énergie correspond à la valeur absolue de la variation d'énergie mécanique entre  $E_{m,i} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu d^2(\frac{\omega}{27})^2 - \frac{GM2m}{d} = 2,2 \times 10^{29} \text{ J}$  et l'état final où  $E_{m,f} = \frac{1}{5}MR^2\omega_f^2 + \frac{1}{2}\mu d_f^2\omega_f^2 - \frac{GM2m}{d_f} = -3 \times 10^{28} \text{ J}$ . On a donc  $\boxed{|\Delta E| = 2,5 \times 10^{29} \text{ J}}$ . Pour comparer à l'activité du Soleil, on écrit que  $|\Delta E| = P_S \Delta t$  où  $P_S$  est la puissance rayonnée par le Soleil. On trouve alors que  $\Delta t = 625 \text{ s}$ . Cela fait environ 10 minutes.

### 3 Freinage sur un pont

#### 3.1 Influence des variations de température sur un ouvrage d'art

18. L'analyse de la dimension du coefficient de dilatation linéaire montre bien que sa définition est :  $\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT}$ . On assimilera la dérivée à un taux de variation pour écrire que  $\Delta L = \alpha \Delta T L$ . Les variations de longueurs sont présentées dans le tableau ci-dessous.

	Béton	Acier
Bretagne - Côte d'Azur	0,55 m	0,90 m
Centre Nord - Sud Ouest	0,61 m	0,96 m
Est - Alpes	0,66 m	1,02 m

19. Il est indispensable de **laisser du jeu** et de ne pas faire des structures trop monolithiques pour arriver à répartir ces variations de longueurs sur plusieurs endroits. On constate aussi que le béton se dilate moins que l'acier. Il faut que l'acier puisse glisser dans le béton pour éviter que cela casse.

#### 3.2 Modes propres

20. On a trois ressorts :  $E_p = \frac{1}{2}k_0 X_A^2 + \frac{1}{2}k(X_A - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - X_A)^2$ .

21. Le point A de liaison entre les ressorts peut être assimilé à un point sans masse. En appliquant la relation de la dynamique, on écrira donc  $m_A \vec{\gamma} = \vec{0} = \sum \vec{F}$ . Les trois forces possèdent la direction de l'axe Ox. En projection, on obtient  $-k(X_A - x_1) - k_0 X_A + k(x_2 - X_A) = 0$ . On obtient par conséquent :  $(k_0 + 2k)X_A = k(x_1 + x_2)$ . Avec la définition proposée par l'énoncé, on a donc :  $X_A = \alpha(x_1 + x_2)$ .

22. On développe l'expression de l'énergie potentielle du sous-système étudié avant.  $E_p = \frac{1}{2}(k_0 + 2k)X_A^2 + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - kX_A(x_1 + x_2)$ . On remplace  $X_A$  par l'expression trouvée avant ainsi que  $(k_0 + 2k)$  par  $\frac{k}{\alpha}$ . On arrive à  $E_p = -\frac{1}{2}k\alpha(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)$ . On peut organiser cette expression pour écrire une expression qui isole  $x_1^2$  et  $x_2^2$  et le terme produit  $x_1 x_2$  :  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} \left[ \frac{1-\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \alpha x_1 x_2 \right]$ .

23. Si  $k_0 \rightarrow \infty$  cela signifie que  $\alpha \rightarrow 0$ . On obtient alors  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Par l'expression proposée par l'énoncé, on trouve que  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ . Comme  $k_0 \rightarrow \infty$ , cela signifie que la rigidité est très élevée donc que l'on a affaire à un solide indéformable. Les ressorts de raideur  $k$  sont donc indépendants les uns des autres. Nous n'avons pas le terme en  $x_3^2$  car le sous-système ne contient pas le ressort correspondant. L'expression de l'énoncé est donc **compatible**. D'autre part, pour retrouver l'expression que nous avons calculée il faut faire  $x_3 = 0$  dans celle de l'énoncé. On arrive alors à  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} \left[ (1 - \frac{\alpha}{2})x_1^2 + (1 - \alpha)x_2^2 - \alpha x_1 x_2 \right]$ . Cette expression n'apparaît pas cohérente de prime abord avec celle de notre calcul. Toutefois à notre expression  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} \left[ \frac{1-\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \alpha x_1 x_2 \right]$ , il faut penser à rajouter la contribution du ressort situé à droite du premier tablier, on rajoute la contribution  $\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{x_1^2}{2}$ . Cela permet de compléter par le terme manquant pour  $x_1^2$ . Mais il manque encore un facteur  $\frac{1-\alpha}{2}x_2^2$ . Il faut penser que si l'on réalise  $x_3 = 0$ , cela veut dire que l'on bloque le ressort correspondant. Si on le libère, il va apporter une contribution due à  $x_2$  comme cela a été le cas pour ce qu'il s'est passé entre les ressorts correspondants à  $x_1$  et  $x_2$ . Finalement, on peut encore conclure à la compatibilité de l'expression proposée. On peut encore voir les choses un peu différemment en disant que si  $k_0 \rightarrow \infty$  alors on a 3 masses  $m$  qui oscillent indépendamment sous l'action d'un ressort de raideur  $2k$ , l'énergie potentielle est donc logiquement  $E_p = \frac{1}{2}(2k)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  ce qui correspond bien à la situation  $\alpha = 0$  de la formule générale. Pour expliquer la forme générale de l'énergie potentielle, on peut dire que pour le sous-système  $(x_1, x_2)$  on a vu que  $E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} \left[ \frac{1-\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \alpha x_1 x_2 \right]$  et qu'il suffit d'ajouter le sous-système  $(x_2, x_3)$  avec la même forme que la précédente et de finir en n'oubliant pas d'ajouter les deux ressorts situés à chaque extrémité.

24. La force subie correspond à l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle :  $m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = -\frac{m\omega_0^2}{2} [(2 - \alpha)x_1 - \alpha x_2]$ . On en déduit que  $\ddot{x}_1 = \omega_0^2 [(\frac{\alpha}{2} - 1)x_1 + \frac{\alpha}{2}x_2]$ . On procède de la même façon pour  $x_2$  et  $x_3$  et

on arrive à  $\ddot{x}_2 = \omega_0^2[\frac{\alpha}{2}x_1 + (\alpha - 1)x_2 + \frac{\alpha}{2}x_3]$  et  $\ddot{x}_3 = \omega_0^2[\frac{\alpha}{2}x_2 + (\frac{\alpha}{2} - 1)x_3]$ . On peut mettre cela sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} - 1 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & \alpha - 1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Si on fait l'addition des équations relatives à  $\ddot{x}_1$  et à  $\ddot{x}_3$  en posant  $s = x_1 + x_3$ , on obtient l'équation différentielle  $\ddot{s} = \omega_0^2[(\frac{\alpha}{2} - 1)s + \alpha x_2]$ . Si on effectue la différence  $d = x_1 - x_3$ , on obtient une équation différentielle où il n'y a que  $d$  :  $\ddot{d} + (1 - \frac{\alpha}{2})\omega_0^2 d = 0$ . On note  $\omega_1^2 = \omega_0^2(1 - \frac{\alpha}{2})$  le carré de la pulsation propre de ce mode propre.

25. Pour les deux autres modes propres, on a le système différentiel suivant :  $\ddot{s} = \omega_0^2[(\frac{\alpha}{2} - 1)s + \alpha x_2]$  et  $\ddot{x}_2 = \omega_0^2[\frac{\alpha}{2}s + (\alpha - 1)x_2]$ . On teste dans ce système différentiel couplé les solutions  $s = A \exp ij\omega t$  et  $x_2 = B \exp j\omega t$  où  $A$  et  $B$  sont a priori des complexes. On obtient alors  $-\omega^2 A = \omega_0^2[(\frac{\alpha}{2} - 1)A + \alpha B]$  et  $-\omega^2 B = \omega_0^2[\frac{\alpha}{2}A + (\alpha - 1)B]$ . Pour obtenir une solution  $A$  et  $B$  non nuls, on obtient l'équation bicarrée suivante :  $\omega^4 + (\frac{3}{2}\alpha - 2)\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4(1 - \frac{3}{2}\alpha) = 0$ . On vérifie facilement que  $\omega^2 = \omega_0^2$  est solution. On peut donc factoriser le polynôme selon  $P(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - (1 - \frac{3}{2}\alpha)\omega_0^2) = 0$ . La troisième pulsation propre est donc  $\omega_2^2 = \omega_0^2(1 - \frac{3}{2}\alpha)$ . Les trois pulsations propres du système sont donc :  $\omega_0$ ,  $\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$  et

$$\omega_2 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{2}}.$$

26. On constate que  $x_3 = -x_1$  et  $x_2 = 0$  pour le mode propre proposé.  $\omega_1$  correspond donc au mode propre antisymétrique. Si on utilise comme pulsation  $\omega = \omega_0$  dans le système d'équations, on trouve alors que l'on doit avoir la relation  $A = -2B$  où  $A$  est l'amplitude de  $x_1 + x_3$  et  $B$  celle de  $x_2$ . On peut par exemple, en unités arbitraire, proposer  $-1/2$  pour  $x_1$ ,  $1/2$  pour  $x_2$  et  $-1/2$  pour  $x_3$ . Le second mode propre proposé par l'énoncé correspond donc à la pulsation propre  $\omega_2$ .

### 3.3 Freinage d'un véhicule

27. La quantité de mouvement du véhicule a été transférée au pont ou plus précisément à l'ensemble pont - voiture. À la date  $t = 0^+$ , on va supposer que les tabliers n'ont pas encore bougé puisque le temps de réponse est long, on peut donc dire que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  à la date  $t = 0^+$ . On écrit ensuite, comme évoqué avant, la conservation de la quantité de mouvement pendant le freinage (pas de forces extérieures significatives) à la date  $t = 0^+$  :  $M_0V_0 = (M_0 + m)\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 + m\dot{x}_3$ . Dans ce mode, on a une amplitude du mouvement du premier tablier égale à celle du troisième. Ces deux amplitudes sont la moitié de celle du deuxième tablier. On peut donc écrire que  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3$  et  $\dot{x}_2 = 2\dot{x}_1$ . La conservation de la quantité de mouvement est donc :  $M_0V_0 = (M_0 + 4m)\dot{x}_1$ . On peut négliger  $M_0$  devant la masse  $m$  du pont et a fortiori devant  $4m$ . On a donc à la date  $t = 0^+$  :  $\dot{x}_1 = \frac{M_0V_0}{4m} = \dot{x}_3$  et  $\dot{x}_2 = \frac{M_0V_0}{2m}$ .

28. L'équation différentielle est donc  $\ddot{x}_2 + 2\zeta\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = 0$ . Les racines de l'équation caractéristique sont  $r = -\zeta\omega_2 \pm j\omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}$ . Sans déterminer les deux constantes d'intégration, la forme générale de la solution est :  $x_2 = \exp -\zeta\omega_2 t (A \cos \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t + B \sin \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t)$ .

29. À  $t = 0$ , on a vu que  $x_2 = 0$ . Cela implique que  $A = 0$ . La forme de la solution pour l'abscisse du deuxième tablier évolue et devient :  $x_2 = B \exp -\zeta\omega_2 t \sin \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t$ . On dérive pour obtenir la vitesse est  $\dot{x}_2 = B \exp -\zeta\omega_2 t (-\zeta\omega_2 \sin \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t + \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t)$ . À l'instant initial, on a donc  $\dot{x}_2 = B\omega_2\sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{M_0V_0}{2m}$ . On peut en déduire l'expression de l'abscisse du deuxième tablier :

$$x_2 = \frac{M_0V_0}{2m\omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}} \exp -\zeta\omega_2 t \sin \omega_2\sqrt{1 - \zeta^2}t \text{ avec } \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{2}}.$$

30. Si  $\alpha$  est petit, cela veut dire que  $k_0$  est élevé alors il y a découplage des ressorts. Une masse  $m$  est donc encadrée par deux ressorts de raideur  $k$ . Cela permet d'écrire la relation de la dynamique suivante :  $m\ddot{x}_2 = -2kx_2 - 2\zeta\dot{x}_2$ , la solution revient bien à passer de la pulsation  $\omega_2$  à la pulsation  $\omega_0$ . Cela est cohérent avec le fait que l'expression de  $\omega_2$  tend vers  $\omega_0$  pour  $\alpha$  tendant vers 0. Si on utilise l'expression

approchée de la pulsation  $\omega_2 \simeq \omega_0(1 - \frac{3}{4}\alpha)$  en développement limité à l'ordre 1 de la racine, on peut donner une expression approchée de l'évolution de l'abscisse  $x_2(t)$  qui peut donc s'écrire sous la forme suivante :  $x_2 = \frac{M_0 V_0}{2m\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} (1 + \frac{3}{4}\alpha) \exp[-\xi\omega_0(1 - \frac{3}{4}\alpha)t] \sin[\omega_0(1 - \frac{3}{4}\alpha)\sqrt{1-\xi^2}t]$ . Cette expression de  $x_2(t)$  ne correspond pas à la question posée?... puisqu'il faudrait montrer que  $x_2(t)$  est proportionnelle à  $\alpha$ . Par contre, nous avons vu que  $X_A = \alpha(x_1 + x_2)$ . or, comme on étudie le mode propre de pulsation propre  $\omega_2$ , on a  $x_1 = x_2/2$ , cela permet d'écrire que  $X_A(t) = \alpha\frac{3}{2}x_2(t)$ . On donc dire que l'abscisse  $X_A(t)$  est proportionnelle à  $\alpha$ , la fonction bornée évoquée par l'énoncé serait alors  $F = \frac{3}{2}x_2(t)$ . On peut aussi alors conclure logiquement que si  $k_0 \rightarrow \infty$  alors la rigidité est tellement élevée que le point  $A$  ne peut pas bouger et que cela est compatible avec  $\alpha = 0$ . Toutefois, l'étude proposée est discutable car si  $\alpha \rightarrow 0$ , la rigidité est telle que les points d'appui sur les piles du pont sont immobiles et les ressorts complètement indépendants ce que nous avons déjà dit. Dans ces conditions, si la voiture freine alors qu'elle est sur le premier secteur, seul  $x_1(t)$  évoluera en oscillations amorties et  $x_2(t) = x_3(t) = 0$  et de la même façon si la voiture freine sur second secteur alors seule  $x_2(t)$  évoluera. Il est difficile de pousser le raisonnement en disant  $\alpha \rightarrow 0$  et en même temps que le mode propre de pulsation  $\omega_2$  est celui qui affectera le pont. . .

### 3.4 Discussion de quelques hypothèses

#### 3.4.1 Transfert de charge

31. La relation de la dynamique projetée sur les deux axes donne  $M_0\gamma_G = -(T_1 + T_2)$  et  $N_1 + N_2 - M_0g = 0$ . Comme, on nous indique que l'on se situe à la limite du glissement, on peut écrire  $T_1 = fN_1$  et  $T_2 = fN_2$ . On applique aussi le théorème du moment cinétique à la voiture dans le référentiel barycentrique. Si l'on néglige la contribution de la rotation des roues, il n'y a pas de rotation autour de l'axe  $Gz$ . La somme des moments est donc nulle :  $0 = N_1b - N_2a - h(T_1 + T_2)$ . On peut donc écrire que  $bN_1 - aN_2 = h(T_1 + T_2)$ . En utilisant la relation de COULOMB entre la composante tangentielle et la composante normale, on arrive à  $hf(N_1 + N_2) = N_1b - N_2a$ . On en déduit que  $N_2 = \frac{b-hf}{a+hf}N_1$ . Cette relation montre que  $N_2 < N_1$ . Avec le fait que  $N_1 + N_2 = M_0g$ , on peut déterminer les expressions de la force de contact. On a :  $N_1 = \frac{a+hf}{a+b}M_0g$  et  $T_1 = f\frac{a+hf}{a+b}M_0g$ . Pour l'arrière du véhicule, on a  $N_2 = \frac{b-hf}{a+b}M_0g$  et  $T_2 = f\frac{b-hf}{a+b}M_0g$ . Si le coefficient de frottement est le même aussi bien à l'avant qu'à l'arrière, on a  $T_2 < T_1$ . Le freinage est plus fort à l'avant. Pour répartir un peu mieux le freinage, il faut donc augmenter le coefficient à l'arrière et bien mieux répartir le poids. Ce sont les voitures à moteur central et donc celles qui auront un centre d'inertie situé plutôt au centre qui seront plus aptes à présenter un freinage moins déséquilibré entre l'avant et l'arrière. Il y a sur les voitures un répartiteur de freinage qui permet d'obtenir un couple de freinage supérieur sur les roues avant tout en évitant le glissement des roues par rapport au sol. Sur les véhicules modernes, l'ABS gère cette propriété.

#### 3.4.2 Hypothèse discutée : le freinage est instantané

##### Un modèle frustré : une roue ponctuelle

32. Cela revient à considérer un mobile qui freine uniquement par de la translation et donc glissement. On a  $M_0\gamma_G = -T = -fN$  et sur l'axe du poids  $N - M_0g = 0$ . L'accélération est donc  $\gamma_G = -fg$ . On intègre et on obtient :  $V(t) = V_0 - fgt$ . La durée du freinage est donc :  $t_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{fg}$ . On trouve :  $t_{\text{arrêt}} = 4,6$  s.

##### Un modèle moins frustré : analyse statique et dynamique d'une roue équilibrée

33. Il y a équilibrage statique lorsque le centre d'inertie  $G$  du rotor est sur l'axe de rotation. Ainsi, quelle que soit la position du rotor, il ne tourne pas sous l'effet de son poids. L'équilibrage est dynamique lorsque la rotation s'effectue autour d'un des axes principal d'inertie. Les produits d'inertie qui impliquent la coordonnée  $z$  doivent être nuls :  $D = E = 0$ , le produit d'inertie  $F$  peut être quelconque. Pour la roue proposée, on a, par symétrie des rôles des axes  $Ox$  et  $Oy$ , le même moment d'inertie :  $A = B = J_{Ox} = J_{Oy}$ . Le moment d'inertie correspondant à la rotation normale de la roue est  $C = J_{Oz} = I$ .

34. On a, pour les deux côtés du disque, une force élémentaire :  $d\vec{f} = -2f_1 \frac{2F}{(\theta_2 - \theta_1)(R_2^2 - R_1^2)} r dr d\theta \vec{e}_\theta$ . Le bras de levier pour cette force est  $r$ . Le moment élémentaire de la force est donc  $dC_f = 4f_1 \frac{F}{(\theta_2 - \theta_1)(R_2^2 - R_1^2)} r^2 dr d\theta$ . Le couple total est par conséquent :  $C_f = 4f_1 \frac{F}{(\theta_2 - \theta_1)(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$ . Le couple de freinage exercée sur une roue est donc :  $C_f = \frac{4}{3} f_1 F \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$ .

35. La puissance de frottement est, pour les 4 disques,  $P_f = 4C_f \omega$ . La force tangentielle de freinage au sol est  $fM_0g$ , la vitesse de la voiture est  $v = R_r \omega$ . On en déduit que  $P_{f,\text{sol}} = fM_0gR_r \omega$ .

36. L'énergie cinétique de la voiture est composée de la translation globale représentée par  $\frac{1}{2}M_0v^2$  à laquelle il faut ajouter l'énergie cinétique de rotation des 4 roues qui est  $2I\omega^2$ . On a donc  $E_c = (\frac{1}{2}M_0R_r^2 + 2I)\omega^2$ . On dérive par rapport au temps :  $\frac{dE_c}{dt} = (M_0R_r^2 + 4I)\omega \frac{d\omega}{dt}$ . Cette dérivée est égale à la puissance de toutes les forces non conservatives puisque la seule force conservative le poids ne travaille pas. Par toutes les forces non conservatives, on entend les forces tant intérieures qu'extérieures. On obtient donc  $\frac{dE_c}{dt} = -(4C_f + fM_0gR_r)\omega$ . En égalant les deux expressions de la dérivée de l'énergie cinétique, on obtient :  $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{4C_f + fM_0gR_r}{M_0R_r^2 + 4I}$ . Cette grandeur est une constante pour un effort de freinage  $F$  donné et lorsque que le coefficient  $f_1$  de frottement sur les disques est constant - ce qui n'est pas évident compte tenu de l'élévation de température des disques au cours d'un freinage un peu intense. On pose  $\frac{d\omega}{dt} = -\alpha$ .

37. La loi horaire d'évolution de la vitesse de rotation des roues  $\omega = \omega_0 - \alpha t$  avec  $\omega_0 = \frac{V_0}{R_r}$ . La durée pour obtenir l'arrêt de la voiture est  $t'_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{R_r \alpha}$ . On a alors :  $t'_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{R_r} \frac{M_0R_r^2 + 4I}{4C_f + fM_0gR_r}$ . L'application numérique conduit à  $t'_{\text{arrêt}} = 3,7$  s. On constate que  $t'_{\text{arrêt}} < t_{\text{arrêt}}$  ce qui est plutôt attendu puisque par rapport au modèle frustre, on dissipe de l'énergie dans le véhicule au niveau des disques et des plaquettes de freins. L'énergie dissipée va devenir dans un premier temps de l'énergie interne pour ces parties des freins. Ensuite, la ventilation naturelle va évacuer cette énergie par convection. Il est préférable que cette ventilation soit efficace sous peine d'atteindre des températures de ramollissement ou de fusion des matériaux car alors le coefficient  $f_1$  de frottement entre les plaquettes et le disque chuterait brutalement, enlevant toute efficacité au freinage.