

Partie Physique

Rebonds d'une balle sur une surface en mouvement périodique

Corrigé UPSTI

1. Une modélisation du comportement viscoélastique d'un solide lors d'un choc contre une surface rigide

Question 1 Établir l'expression de la dépendance temporelle $s = s(t)$ du déplacement de l'élément (M) au cours du choc. On indiquera l'intervalle de temps I_c sur lequel cette dépendance doit être considérée. On fera intervenir les constantes ω_0 , α et V_0 .

Un PFD appliqué à (M) donne :

$$m\ddot{s} = -ks - \lambda\dot{s}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{s} + \frac{\lambda}{m}\dot{s} + \frac{k}{m}s = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{s} + 2\alpha\omega_0\dot{s} + \omega_0^2s = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre, avec : $\Delta = 4\omega_0^2(\alpha^2 - 1) < 0$

Dont les racines complexes du polynôme caractéristique sont : $r = -\alpha\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}$

On pose $\omega_p := \omega_0\sqrt{1 - \alpha^2}$ (pseudo-pulsation)

Ainsi, la solution générale est de la forme : $s(t) = e^{-\alpha\omega_0 t} (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t))$

De dérivée : $s'(t) = -\alpha\omega_0 \cdot s(t) + e^{-\alpha\omega_0 t} \cdot \omega_p \cdot (-A \sin(\omega_p t) + B \cos(\omega_p t))$

Les conditions initiales imposent :

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 = A \\ s'(0) &= V_0 = B\omega_p \end{aligned}$$

$$B = \frac{V_0}{\omega_p}$$

Ainsi, l'expression de la dépendance temporelle est :

$$s(t) = \frac{V_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t) e^{-\alpha \omega_0 t}$$

Cette relation reste vraie si $s(t)$ reste positif, soit si $\omega_p t \leq \pi$. Ainsi, l'intervalle de temps à considérer est :

$$I_c = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Question 2 Nous notons $\vec{V}_1 = V_1 \vec{e}_x$ la vitesse du solide après la phase de rebond sur la surface rigide. Établir que le coefficient de restitution en vitesse r , défini par le rapport $r = -V_1/V_0$, s'exprime selon la relation suivante :

$$r = \exp\left(-\frac{\alpha \pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right) \quad (1)$$

Commenter cette expression. Expliquer pourquoi r ne dépend pas de la vitesse initiale V_0 .

On a :

$$s'(t) = \frac{V_0}{\omega_p} e^{-\alpha \omega_0 t} (-\alpha \omega_0 \sin(\omega_p t) + \omega_p \cos(\omega_p t))$$

Puis, par définition :

$$\begin{aligned} V_1 &= s'(t = I_c) \\ &= -V_0 \cdot e^{-\alpha \omega_0 I_c} \\ &= -V_0 e^{-\frac{\alpha \pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}} \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve le coefficient de restitution :

$$r = -\frac{V_1}{V_0} = e^{-\frac{\alpha \pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}$$

On observe que r est constant pour la balle et ne dépend que de son facteur d'amortissement α .

Le modèle retenu étant linéaire, on s'attendait à ce que :

- la réponse et notamment la vitesse $s'(t)$ soit proportionnelle à la vitesse initiale V_0 ;
- le temps de rebonds I_c ne dépend que des paramètres de la balle (m, k, λ).

Ainsi, on trouve logiquement une vitesse V_1 proportionnelle à V_0 et un coefficient de restitution r indépendant de la vitesse initiale V_0 .

Question 3 Exprimer, dans le cadre du modèle adopté (illustré sur la figure (1)), la dépendance de la variable $\ln(\tau_n/\tau_1)$ en fonction du coefficient r et de n .

Ce modèle paraît-il en accord avec les résultats présentés sur la figure (2) (pour la gamme de vitesses d'impact considérée) ?

Estimer, à partir de ce tracé, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r .

D'après la relation (1) :

$$\tau_n = r \cdot \tau_{n-1}$$

On reconnaît une suite géométrique de raison r , ainsi :

$$\tau_n = r^{n-1} \tau_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{\tau_n}{\tau_1}\right) = \ln(r) (n - 1)}$$

Ainsi, $\ln(\tau_n/\tau_1)$ est une fonction affine de n , ce qui est cohérent avec le relevé obtenu à la figure (2).

On relève une pente :

$$\ln(r) = \frac{-1}{12 - 1}$$

Ce qui donne un coefficient de restitution :

$$r = \exp\left(-\frac{1}{11}\right) \approx 1 - \frac{1}{11} \approx \boxed{0,91}$$

La balle perd donc 9 % de sa vitesse à chaque rebond.

2. Synchronisation des rebonds d'une balle sur une surface en mouvement vertical oscillant

Question 4 Établir que la vitesse v^+ de la balle s'exprime selon la relation suivante :

$$v^+ = -rv^- + (1+r)v_s(t_i) \quad (2)$$

où t_i est l'instant de l'impact balle-surface considéré.

Au rebond, c'est la vitesse relative de (B) par rapport à (S), $v - v_s$ qui est atténuée d'un facteur r , ainsi, à l'instant t_i :

$$v^+ - v_s(t_i) = -r(v^- - v_s(t_i))$$

$$\boxed{v^+ = -rv^- + v_s(t_i)(1+r)}$$

2.1 - Condition de synchronisation

Question 5 Exprimer les dépendances suivantes :

- La vitesse v_n^+ en fonction de v_n^- , ϕ_n et des paramètres r , a et ω ;
- L'altitude $z_s(t_{n+1})$ en fonction de $z_s(t_n)$, v_n^+ , τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^- en fonction de v_n^+ , τ_n et g ;
- La vitesse v_{n+1}^+ en fonction de v_n^+ , τ_n , ϕ_{n+1} et des paramètres g , r , a et ω .

Relation 1 : On dérive $z_s(t) = a \sin(\omega t)$: $v_s(t) = a\omega \cos(\omega t)$

On a donc : $v_s(t_n) = a\omega \cos(\phi_n)$

D'après la relation (2), on a alors : $\boxed{v_n^+ = -rv_n^- + (1+r)a\omega \cos(\phi_n)}$

Relation 2 : On applique le PFD à la balle pou $t_n < t < t_{n+1}$: $m\ddot{h}(t) = -mg$

$$\ddot{h}(t) = -g$$

On intègre une première fois : $\dot{h}(t) = v_n^+ - g(t - t_n)$ (condition initiale : $\dot{h}(t_n) = v_n^+$)

Puis une seconde fois : $h(t) = z_s(t_n) + v_n^+(t - t_n) - g \frac{(t-t_n)^2}{2}$ (condition initiale : $h(t_n) = z_s(t_n)$)

Puis, pour $t = t_{n+1}$, on a un contact (avec $h(t_{n+1}) = z_s(t_{n+1})$) et on trouve :

$$h(t_{n+1}) = z_s(t_{n+1}) = z_s(t_n) + v_n^+(t_{n+1} - t_n) - g \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{2}$$

$$\boxed{z_s(t_{n+1}) = z_s(t_n) + v_n^+ \tau_n - g \frac{\tau_n^2}{2}}$$

Relation 3 : On reprend l'expression de $\dot{h}(t)$ trouvée précédemment, avec $t = t_{n+1}$:

$$\dot{h}(t_{n+1}) = v_{n+1}^- = v_n^+ - g(t_{n+1} - t_n)$$

$$\boxed{v_{n+1}^- = v_n^+ - g\tau_n}$$

Relation 4 : On reprend la première expression avec $n + 1$: $v_{n+1}^+ = -rv_{n+1}^- + (1+r)a\omega \sin(\phi_{n+1})$

Et on lui injecte la relation 3 : $\boxed{v_{n+1}^+ = -r(v_n^+ - g\tau_n) + (1+r)a\omega \cos(\phi_{n+1})}$

Question 6 Établir alors que le cosinus de la phase ϕ_n des impacts vérifie l'égalité suivante :

$$\cos \phi_n = \frac{1-r}{1+r} \times \frac{\pi}{\Gamma} \quad (3)$$

Donner l'expression correspondante de la vitesse v_n^+ en fonction des constantes g et ω .

Etant synchronisé, on a : $\tau_n = T = \frac{2\pi}{\omega}$

Le système est donc en régime permanent, il en découle :

$$\tau_n = \tau$$

$$v_{n+1}^+ = v_n^+ = v^+$$

$$v_{n+1}^- = v_n^- = v^-$$

$$z_s(t_{n+1}) = z_s(t_n)$$

La relation 2 donne alors : $v^+ \tau = g \frac{\tau^2}{2} \Leftrightarrow v^+ = g \frac{\tau}{2}$

Et la relation 4 donne : $v^+ = -r(v^+ - g\tau) + (1+r)a\omega \cos(\phi_n)$

$$\Leftrightarrow v^+ = \frac{rg\tau}{1+r} + a\omega \cos(\phi_n)$$

L'égalité de ces expressions donne :

$$g \frac{\tau}{2} = \frac{rg\tau}{1+r} + a\omega \cos(\phi_n)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\phi_n) = \frac{g\tau}{a\omega} \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{1+r} \right)$$

$$= \frac{g\tau}{a\omega} \cdot \frac{1-r}{2(1+r)}$$

Sachant que $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, on obtient enfin l'expression cherchée :

$$\cos(\phi_n) = \frac{g\pi}{a\omega^2} \cdot \frac{1-r}{1+r}$$

$$\boxed{\cos(\phi_n) = \frac{\pi}{\Gamma} \cdot \frac{1-r}{1+r}}$$

En partant de l'expression $v^+ = g \frac{\tau}{2}$, on obtient aussi la relation :

$$\boxed{v^+ = \frac{g\pi}{\omega}}$$

Question 7 Analyser la relation (3). On envisagera, en particulier, la situation limite pour laquelle $r \rightarrow 1^-$.

$\cos(\phi_n)$ peut au maximum valoir 1, ainsi, la balle ne peut être synchronisée et continuer de rebondir que si :

$$\frac{\pi}{\Gamma} \cdot \frac{1-r}{1+r} \leq 1$$

$$\Gamma \geq \pi \cdot \frac{1-r}{1+r}$$

On observe que plus r est faible, plus Γ doit être élevé pour assurer une synchronicité. Cette augmentation de Γ est obtenue en augmentant l'amplitude a et/ou la pulsation ω .

Par ailleurs, pour un Γ donné, plus r est faible, plus ϕ_n s'approche de 0, les points de contact A_n s'approchent de l'origine O .

Pour $r \rightarrow 1^-$, on a $\cos(\phi_n) = 0$ et $\phi_n = \pm \frac{\pi}{2}$: la balle est assurée de rebondir. Elle rebondit alors lorsque la surface (S) est soit tout en bas ou tout en haut ($z_s(t_n) = \pm a$).

Question 8 Estimer, à partir de ces données, la valeur du coefficient de restitution en vitesse r . Afin de faciliter les calculs numériques, on tirera parti des indications suivantes : la valeur de r est proche de l'unité et celle de ϕ_n proche de $\pi/4$.

Pour r proche de 1 :

$$\cos(\phi_n) \approx \frac{\pi}{2\Gamma} \cdot (1-r)$$

$$\Leftrightarrow r \approx 1 - \frac{2\Gamma}{\pi} \cos(\phi_n)$$

$$\approx 1 - \frac{2a\omega^2}{g\pi} \cos(\phi_n)$$

AN :

$$r \approx 1 - \frac{2 \times 10^{-4} \times 160^2}{10 \times 3} 0,7$$

$$\begin{aligned} &\approx 1 - \frac{2 \cdot 10^{-4} \times 256 \cdot 10^2}{30} 0,7 \\ &\approx 1 - \frac{5}{30} 0,7 \\ &\approx 1 - 0,12 \\ &\boxed{r \approx 0,88} \end{aligned}$$

Note : avec une formule exacte et une calculatrice, on obtient :

$$r = \frac{\frac{\pi}{\Gamma} - \cos(\phi_n)}{\frac{\pi}{\Gamma} + \cos(\phi_n)} = 0,893$$

2.2 - Condition de stabilité

Question 9 Nous considérons le rebond n de la balle entre les impacts A'_n et A'_{n+1} . Établir la relation liant les phases $\phi'_{n+1} = \omega t'_{n+1}$ et $\phi'_n = \omega t'_n$. Cette relation fait intervenir la vitesse $v_n^{+'}$ et les constantes g , a et ω .

La relation 2, en remplaçant l'expression de z_s puis $\tau'_n = \frac{\phi'_{n+1} - \phi'_n}{\omega}$ donne :

$$\begin{aligned} a \sin(\omega t'_{n+1}) &= a \sin(\omega t'_n) + v_n^{+'} \tau'_n - g \frac{\tau_n'^2}{2} \\ \boxed{a \sin(\phi'_{n+1})} &= a \sin(\phi'_n) + \frac{v_n^{+'}}{\omega} (\phi'_{n+1} - \phi'_n) - \frac{g}{2\omega^2} (\phi'_{n+1} - \phi'_n)^2 \end{aligned}$$

Question 10 Pour le rebond n , exprimer la vitesse $v_{n+1}^{+'}$ en fonction de $v_n^{+'}$, ϕ'_{n+1} , ϕ'_n et des paramètres r , g , a et ω .

On reprend la relation 4 et on substitue τ_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{+'} &= -r(v_n^{+'} - g\tau'_n) + (1+r)a\omega \cos(\phi'_{n+1}) \\ \boxed{v_{n+1}^{+'}} &= -rv_n^{+'} + \frac{rg}{\omega} (\phi'_{n+1} - \phi'_n) + (1+r)a\omega \cos(\phi'_{n+1}) \end{aligned}$$

Question 11 Former la relation de récurrence ne portant que sur des termes de la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$, liant $\underline{\varepsilon}_{n+2}$, $\underline{\varepsilon}_{n+1}$ et $\underline{\varepsilon}_n$. On conservera les paramètres A , B , C et D sans expliciter leur dépendance vis-à-vis des paramètres r et $\tan \phi_n$.

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{n+2} &= A\underline{\varepsilon}_{n+1} + B\underline{\eta}_{n+1} \\ &= A\underline{\varepsilon}_{n+1} + BC\underline{\varepsilon}_n + BD\underline{\eta}_n \\ &= A\underline{\varepsilon}_{n+1} + BC\underline{\varepsilon}_n + D(\underline{\varepsilon}_{n+1} - A\underline{\varepsilon}_n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\varepsilon}_{n+2} = (A + D)\underline{\varepsilon}_{n+1} + (BC - AD)\underline{\varepsilon}_n}$$

Question 12 Indiquer à quelle condition générale, portant sur la raison μ , la suite $(\underline{\varepsilon}_n)$, converge vers zéro.

La suite $(\underline{\varepsilon}_n)$ converge vers 0 ssi $|\mu| < 1$

Question 13 Établir que la raison μ vérifie l'équation algébrique suivante :

$$\mu^2 - 2Qr\mu + r^2 = 0 \quad (9)$$

On exprimera le produit $2Qr$ en fonction des constantes r et $\tan \phi_n$.

L'expression trouvée à la question 11 devient :

$$K\mu^{n+2} = (A + D)K\mu^{n+1} + (BC - AD)K\mu^n$$

$$\mu^2 - (A + D)\mu + AD - BC = 0$$

$$\begin{aligned} \text{où } AD - BC &= r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n + \frac{1 + r}{2} 2\pi(1 - r) \tan \phi_n \\ &= r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n + \pi(1 - r^2) \tan \phi_n \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mu^2 - (1 + r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n)\mu + r^2 = 0}$$

Par identification, on trouve : $\boxed{2Qr = 1 + r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n}$

Question 14 Nous nous plaçons dans le cas où $Q \in \mathcal{D}_1 = [-1, +1]$. Exprimer, en fonction de r et Q , les solutions μ_- et μ_+ de l'équation (9). Analyser le comportement correspondant de la suite (ε_n) . Préciser quelle en est la conséquence sur la stabilité de la situation de synchronisation des rebonds, dans ce cas.

L'équation (9) est un polynôme d'ordre 2, de discriminant $\Delta = 4r^2(Q^2 - 1)$.

Etant donné que $Q \in \mathcal{D}_1$, on a ici $\Delta \leq 0$

Ses solutions sont alors :

$$\boxed{\mu_+ = Qr + jr\sqrt{1 - Q^2}}$$

$$\boxed{\mu_- = \overline{\mu_+} = Qr - jr\sqrt{1 - Q^2}}$$

La suite (ε_n) converge vers 0 si $|\mu_+| < 1$, avec :

$$\begin{aligned} |\mu_+| &= \sqrt{(Qr)^2 + r^2(1 - Q^2)} \\ \boxed{|\mu_+|} &= r \end{aligned}$$

Or, on a toujours $r < 1$, donc la suite (ε_n) converge toujours vers 0 (si $Q \in \mathcal{D}_1$).

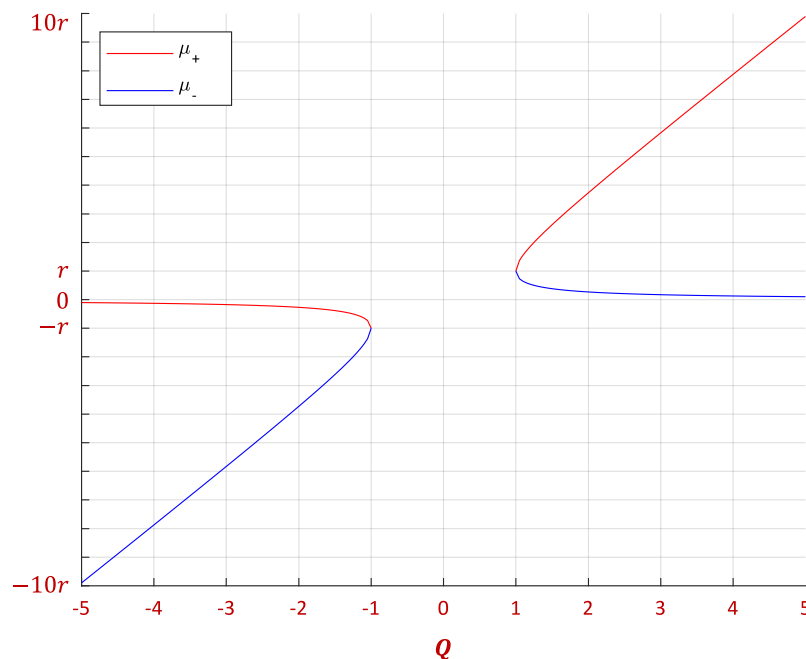
Ainsi, si $Q \in \mathcal{D}_1$ alors les rebonds finissent toujours par se synchroniser.

Question 15 Exprimer, en fonction de r et Q , les solutions μ_- et μ_+ de l'équation (9). Représenter l'allure graphique de la dépendance de chacune d'elles vis-à-vis du paramètre Q .

Le discriminant est maintenant positif, ainsi :

$$\boxed{\mu_+ = rQ + r\sqrt{Q^2 - 1}}$$

$$\boxed{\mu_- = rQ - r\sqrt{Q^2 - 1}}$$



Question 16 En s'appuyant sur l'allure des représentations graphiques des dépendances $\mu_+ = \mu_+(Q)$ et $\mu_- = \mu_-(Q)$, déterminer la condition de stabilité des rebonds synchronisés, sur le domaine \mathcal{D}_2 . On fera porter cette condition sur le produit $2Qr$.

Par symétrie du problème, on peut simplement analyser le cas où $Q > 1$.

On note d'abord qu'on a toujours $\mu_- < r < 1$. Ensuite, on doit vérifier $\mu_+ < 1$ et donc :

$$\begin{aligned} rQ + \sqrt{(rQ)^2 - r^2} &< 1 \\ (rQ)^2 - r^2 &< (1 - rQ)^2 \\ (rQ)^2 - r^2 &< 1 - 2rQ + (rQ)^2 \\ 2rQ &< 1 + r^2 \end{aligned}$$

Ainsi, la condition générale pour avoir une raison inférieure à 1, et donc des rebonds synchronisés stables est :

$$\boxed{|2rQ| < 1 + r^2}$$

Question 17 Établir que la condition de stabilité de la situation pour laquelle les rebonds sont synchronisés, sur la réunion des deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , prend la forme suivante :

$$0 < \tan \phi_n < F(r) \quad \text{où} \quad F(r) = \frac{2(1 + r^2)}{\pi(1 - r^2)} \quad (0 \leq r < 1) \quad (10)$$

Interpréter ce résultat. On s'interrogera, en particulier, sur la signification attribuable à l'inégalité de gauche, puis à celle de droite au vu de la dépendance de la fonction F vis-à-vis du coefficient r .

Si $Q \in \mathcal{D}_1$, alors il vérifie automatiquement $|2rQ| < 1 + r^2$. Ainsi, la condition $|2rQ| < 1 + r^2$ regroupe l'ensemble des cas où les rebonds synchronisés sont stables des deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

On réécrit cette condition : $-(1 + r^2) < 2rQ < 1 + r^2$

On substitue $2Qr$: $-(1 + r^2) < 1 + r^2 - \pi(1 - r^2) \tan \phi_n < 1 + r^2$

$$-2(1+r^2) < -\pi(1-r^2) \tan \phi_n < 0$$

$$\boxed{\frac{2(1+r^2)}{\pi(1-r^2)} > \tan \phi_n > 0}$$

$$F(r) > \tan \phi_n > 0$$

La condition $\tan \phi_n > 0$ est équivalente à $\phi_n \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$

Ainsi, les angles complémentaires $\phi_n \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$ sont systématiquement des points d'équilibre instables.

$F(r)$ est une monotone croissante pour $0 \leq r < 1$, où $F(0) = \frac{2}{\pi}$ et $\lim_{r \rightarrow 1} F(r) = +\infty$.

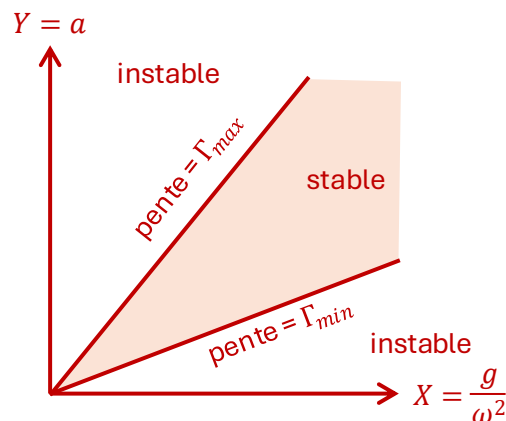
On en déduit plusieurs observations sur la condition $\tan \phi_n < F(r)$:

- quel que soit r , les angles $\phi_n \in]-\pi, -\pi + \text{atan}(\frac{2}{\pi})[\cup]0, \text{atan}(\frac{2}{\pi})[$ sont systématiquement des points d'équilibre stables pour rester synchrones.
- Plus r s'approche de 1, plus ces plages s'élargissent.
- Lorsque $r \rightarrow 1$, ces plages tendent vers $\phi_n \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$.

Question 18 Représenter, dans le plan $(X = g/\omega^2, Y = a)$, le domaine de stabilité correspondant. Interpréter (qualitativement) l'existence d'un encadrement du paramètre Γ .

$$\Gamma = \frac{a\omega^2}{g} \Leftrightarrow a = \Gamma \frac{g}{\omega^2} \Leftrightarrow Y = \Gamma X$$

Ainsi, dans le plan défini par l'énoncé, les limites sont des fonctions linéaires et le domaine de stabilité est :



Γ est proportionnel à $a\omega^2$, l'accélération maximale atteinte par la surface (S). Ainsi, l'encadrement de Γ revient à encadrer cette accélération, qui ne doit ni être trop faible, ni trop élevée afin de garder stable la synchronicité de la balle.

Note : le sujet a choisi de n'étudier qu'une pure synchronicité, cependant il aurait pu être envisagé que la période de la balle soit un multiple de la période de (S), autrement dit $\tau = p \frac{2\pi}{\omega}$ où p serait un entier naturel, avec $p \geq 1$. Cela aurait permis, in fine, de relâcher la contrainte imposée par Γ_{max} .

Partie Sciences de l'Ingénieur

Le Delthaptic, un dispositif haptique parallèle à six degrés de liberté actifs

Corrigé UPSTI

1. Introduction

Objectif : L'objectif du travail proposé est de déterminer les relations entre, d'une part les déplacements et les efforts de la poignée du robot, d'autre part les déplacements et les couples exercés par les actionneurs.

2. Analyse d'un robot Delta

2.1 - Modélisation d'un robot

Question 1 Montrer que les plans $(C_1C_2C_3)$ et $(A_1A_2A_3)$ sont parallèles et justifier que la base associée au solide 3 est la même que celle associée à la base 0.

On observe que :

- pour tout $i \in [1,2,3]$, le vecteur \vec{v}_i est parallèle à $\overrightarrow{B'_iB_i}$ ainsi qu'à $\overrightarrow{C'_iC_i}$ ($B'_iB_iC_iC'_i$ forme un parallélogramme) ;
- les vecteurs \vec{v}_i sont orthogonaux à \vec{z}_0 ;
- le plan $(A_1A_2A_3)$ est orthogonal à \vec{z}_0 .

Il en découle que le plan $(C_1C_2C_3)$ est lui aussi orthogonal à \vec{z}_0 . Ainsi, les plans $(C_1C_2C_3)$ et $(A_1A_2A_3)$ sont parallèles. On en déduit que le solide 3 est en translation par rapport à 0.

La base 3 $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ n'est pas définie précisément dans le sujet, sinon qu'elle est associée au solide 3, on ne peut donc pas « justifier » qu'elle est la même que celle de la base 0.

Cependant, comme les solides 3 et 0 sont en translation l'un par rapport à l'autre, il est parfaitement possible de définir la base 3 comme étant la même que la base 0 : $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) := (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Question 2 Préciser les degrés de liberté que possède la plateforme 3 et indiquer le type de mouvement qu'elle peut faire.

La plateforme 3 possède trois degrés de liberté : elle peut translater selon les trois directions.

2.2 - Analyse des configurations du robot Delta

Question 3 Montrer, à partir du paramétrage proposé, que l'on obtient 3 équations de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + A_ix + B_iy + C_iz = D_i \quad (1)$$

On précisera les expressions des termes A_i, B_i, C_i et D_i en fonction des angles α_i et θ_i et des constantes géométriques L_0, L_1, L_2, L_3 .

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{C_iC} &= \overrightarrow{OC} \\ \Leftrightarrow L_0\vec{u}_i + L_1\vec{x}_{1i} + L_2\vec{z}_{2i} - L_3\vec{u}_i &= x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 \end{aligned}$$

On isole $L_2\vec{z}_{2i}$:

$$L_2\vec{z}_{2i} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 + (L_3 - L_0)\vec{u}_i - L_1\vec{x}_{1i}$$

Puis on projette dans la base 0 : $L_2\vec{z}_{2i} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 + (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)\vec{u}_i + L_1 \sin \theta_i \vec{z}_0$

$$\begin{aligned} L_2\vec{z}_{2i} &= x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0 + (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)(\cos \alpha_i \vec{x}_0 + \sin \alpha_i \vec{y}_0) + L_1 \sin \theta_i \vec{z}_0 \\ L_2\vec{z}_{2i} &= \begin{pmatrix} x + (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i \\ y + (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i \\ z + L_1 \sin \theta_i \end{pmatrix}_{b_0} \end{aligned}$$

On exprime la norme au carré de ces vecteurs :

$$\begin{aligned} L_2^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)^2 + (L_1 \sin \theta_i)^2 + 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)x \cos \alpha_i \\ &\quad + 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)y \sin \alpha_i + 2zL_1 \sin \theta_i \end{aligned}$$

Enfin, on écrit l'expression sous la forme demandée :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i x}_{A_i} + \underbrace{2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i y}_{B_i} + \underbrace{2L_1 \sin \theta_i z}_{C_i} \\ = \underbrace{L_2^2 - (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)^2 - (L_1 \sin \theta_i)^2}_{D_i} \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve par identification :

$$A_i = 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i$$

$$B_i = 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i$$

$$C_i = 2L_1 \sin \theta_i$$

$$\begin{aligned} D_i &= L_2^2 - (L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i)^2 - (L_1 \sin \theta_i)^2 \\ &= L_2^2 - (L_3 - L_0)^2 - L_1^2 + 2(L_3 - L_0)L_1 \cos \theta_i \end{aligned}$$

Question 4 En combinant les relations (1), montrer que x, y, z vérifient les équations linéaires prenant la forme suivante :

$$\begin{cases} A_{1,2} \cdot x + B_{1,2} \cdot y + C_{1,2} \cdot z = D_{1,2} \\ A_{2,3} \cdot x + B_{2,3} \cdot y + C_{2,3} \cdot z = D_{2,3} \\ A_{3,1} \cdot x + B_{3,1} \cdot y + C_{3,1} \cdot z = D_{3,1} \end{cases} \quad (2)$$

Préciser les expressions des termes $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}$ en fonction des A_i, B_i, C_i, D_i , puis en fonction des angles θ_i, α_i et des paramètres géométriques L_0, L_1, L_2 et L_3 .

Pour tout $(i, j) \in \{1,2,3\}^2$, en soustrayant les équations $(1)_i - (1)_j$, on obtient :

$$(A_i - A_j)x + (B_i - B_j)y + (C_i - C_j)z = D_i - D_j$$

Par identification, on a ainsi :

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= A_i - A_j \\ &= 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i - 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_j) \cos \alpha_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= B_i - B_j \\ &= 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i - 2(L_3 - L_0 - L_1 \cos \theta_j) \sin \alpha_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= C_i - C_j \\ &= 2L_1(\sin \theta_i - \sin \theta_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{i,j} &= D_i - D_j \\ &= 2(L_3 - L_0)L_1(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \end{aligned}$$

Question 5 On s'intéresse ici aux configurations du robot Delta où les 3 angles pilotés θ_i sont égaux, soit : $\forall i \in \{1,2,3\}, \theta_i = \theta$. Dans cette question, on pourra, si besoin, utiliser les valeurs des angles α_i . On a : $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$ et $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$.

a) En utilisant les relations (2), montrer que ces configurations conduisent toutes à $x = y = 0$. En déduire la nature du mouvement du point C de la plateforme lorsqu'on fait varier θ .

b) Montrer que les points O, A_i, B_i, C_i et C sont situés dans un même plan. Quelle forme particulière présente le parallélogramme $B'_i B''_i C'_i C''_i$?

c) Justifier que les configurations du robot Delta étudiées ici sont invariantes par une rotation d'axe et d'angle à préciser, et qu'elles possèdent aussi plusieurs plans de symétrie que l'on précisera.

a) Les 3 angles pilotés θ_i sont égaux, ce qui impose $C_{i,j} = 0$ et $D_{i,j} = 0$. La seule solution au système (2) est alors $x = y = 0$. Ainsi, le point C ne se déplace que verticalement, sur l'axe (O, \vec{z}_0) , lorsqu'on fait varier θ .

b) Les points O, A_i, B_i font toujours parti du plan $(O, \vec{u}_i, \vec{z}_0)$. Par ailleurs, dans cette configuration, le point C étant sur l'axe (O, \vec{z}_0) , il fait lui aussi parti de ce plan. Enfin, comme le point C_i est repéré par $\vec{C}_i \vec{C} = -L_3 \vec{u}_i$, il fait lui aussi parti de ce même plan.

$B'_i B''_i C'_i C''_i$ forme alors un rectangle.

c) Les résultats obtenus ici restent vrais quel que soit les angles α_i choisis, à condition que ceux-ci restent différents les uns des autres (modulo 2π).

Plus spécifiquement, on note qu'une rotation du robot autour de l'axe (O, \vec{z}_0) ne change pas les configurations du robot... On pourrait paramétrer cela en définissant un angle α_0 quelconque, puis en posant $\alpha_1 = \alpha_0, \alpha_2 = \alpha_0 + \frac{2\pi}{3}$ et $\alpha_3 = \alpha_0 + \frac{4\pi}{3}$.

Par ailleurs, on note que le robot possède trois plan de symétries : les plans défini par O, A_i, B_i, C_i et C , avec $i \in \{1,2,3\}$

Question 6 En se limitant aux configurations du robot Delta possédant les symétries identifiées précédemment pour lesquelles $x = y = 0$, déterminer les expressions des valeurs minimale z_{min} et maximale z_{max} de z , compte tenu du débattement angulaire des bras br_i .

En déduire l'expression du débattement linéaire Δz selon \vec{z}_0 .

Calculer ce débattement Δz en prenant $L_0 = 80 \text{ mm}, L_1 = 200 \text{ mm}, L_2 = 250 \text{ mm}$ et $L_3 = 100 \text{ mm}$.

Commenter la valeur obtenue par rapport au cahier des charges.

Pour $x = y = 0$, l'équation (1) devient : $z^2 + Cz = D$

avec : $C = 2L_1 \sin \theta$ $D = L_2^2 - (L_3 - L_0)^2 - L_1^2 + 2(L_3 - L_0)L_1 \cos \theta$

On reconnaît une polynôme du second ordre, de solutions :

$$z = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4D}}{2}$$

On retient la solution avec un « + » correspondant à la configuration où le point C est situé au-dessus de O (comme sur la figure 2) :

$$z(\theta) = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4D}}{2}$$

On a alors $z_{\min} = z(\theta = 60^\circ)$ et $z_{\max} = z(\theta = -60^\circ)$.

Puis, $\Delta z = z_{\max} - z_{\min}$.

On note que $D(60^\circ) = D(-60^\circ)$ et $C^2(60^\circ) = C^2(-60^\circ)$, ce qui permet de simplifier l'expression :

$$\Delta z = 2L_1 \sin 60^\circ = \sqrt{3}L_1$$

AN : $\Delta z = 346 \text{ mm}$

Le cahier des charges demande un débattement de 200 mm. Pour $x = y = 0$, le cahier des charges est donc largement rempli.

Note : bien sûr, ce débattement de 200 mm doit rester vrai $\forall (x, y) \in [-100, 100] \text{ mm}$ ce qui reste à vérifier à ce stade.

Question 7 Dans ces configurations, le robot Delta présente-t-il des symétries particulières. Si oui, lesquelles ?

Quel mouvement obtient-on en faisant varier les angles θ_1 et θ en conservant $\theta_2 = \theta_3 = \theta$ au cours du mouvement ?

Ces deux questions sont intimement liées. Pour y répondre, on pourra s'aider du modèle cinématique du robot Delta et, si nécessaire, des relations (1) ou (2).

Le robot possède un plan de symétrie défini par les points O, A_1, B_1, C_1 et C , soit le plan $(O, \vec{u}_1, \vec{z}_0)$

Dans cette configuration, la plateforme 3 peut translateur selon deux directions, \vec{u}_1 et \vec{z}_0 . Le point C évolue ainsi dans le plan $(O, \vec{u}_1, \vec{z}_0)$. Autrement dit, on aura $y = 0$ et x, z variables.

Par analyse des équations : On observe que pour $\theta_2 = \theta_3 = \theta$ on a $A_{2,3} = C_{2,3} = D_{2,3} = 0$. Ainsi, l'équation (2) impose $y = 0$.

Question 8 Indiquer l'ordre selon lequel sont effectués les trois mouvements imposés, en précisant l'intervalle de temps correspondant à chaque mouvement.

La plage de temps T_1 correspond aux translations suivant \vec{z}_0 (où $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, cf q5,6).

La plage de temps T_2 correspond aux translations suivant \vec{x}_0 (où $\theta_2 = \theta_3$, cf q7).

La plage de temps T_3 correspond aux translations suivant \vec{y}_0 (par élimination des autres possibilités).

2.3 - Analyse des efforts

Question 9 Donner, en la justifiant, la direction des résultantes $\overrightarrow{R_{B'_i}}, \overrightarrow{R_{C'_i}}$ appliquées à la biellette b'_i en précisant le théorème utilisé et les arguments qui permettent de l'utiliser. Le résultat obtenu est similaire pour la biellette b''_i .

La biellette b'_i n'est soumise qu'à 2 résultantes $\overrightarrow{R_{B'_i}}$ et $\overrightarrow{R_{C'_i}}$. Par ailleurs, son torseur dynamique est nul car l'effet de son inertie est négligée. Ainsi, appliquer le PFS permet de montrer que :

- $\overrightarrow{R_{B'_i}} = -\overrightarrow{R_{C'_i}}$
- Les résultantes $\overrightarrow{R_{B'_i}}, \overrightarrow{R_{C'_i}}$ sont portées par la droite $\overline{B'_i C'_i}$, autrement dit, elles sont de direction \vec{z}_{2i} .

Question 10 Donner, sans développer les calculs de produits scalaires ou produits vectoriels, les 6 équations permettant de relier les forces F_x, F_y, F_z et les couples C_{mi} aux variables x, y, z, θ_i et à leurs dérivées temporelles. Préciser clairement les ensembles isolés et les théorèmes utilisés.

Etape 1 : On isole l'ensemble $E_i = \{\text{bras } i + \text{rotor } i\}$ et on cherche à appliquer le TMD en A_i selon \vec{v}_i .

Moment dynamique : $\overline{\delta_{A_i, E_i/0}} = J_i \ddot{\theta}_i \vec{v}_i$

$$\text{BAME : } \quad \{T_{\text{moteur } i}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{mi} \vec{v}_i \end{Bmatrix} \quad \{T_{0 \rightarrow br_i}\} = \begin{Bmatrix} X_{0i} & L_{0i} \\ Y_{0i} & 0 \\ Z_{0i} & N_{0i} \end{Bmatrix}_{A_i, (\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{z}_0)}$$

$$\{T_{b'_i \rightarrow br_i}\} = \begin{Bmatrix} -R_{B'_i} \cdot \vec{z}_{2i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B'_i} \quad \{T_{b''_i \rightarrow br_i}\} = \begin{Bmatrix} -R_{B''_i} \cdot \vec{z}_{2i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{B''_i}$$

Calcul des moments :

$$\vec{M}_{A_i, b'_i \rightarrow br_i} \cdot \vec{v}_i = \left[\overline{A_i B'_i} \wedge (-R_{B'_i} \cdot \vec{z}_{2i}) \right] \cdot \vec{v}_i = \left[(L_1 \vec{x}_{1i} - e \vec{v}_i) \wedge (-R_{B'_i} \cdot \vec{z}_{2i}) \right] \cdot \vec{v}_i = -L_1 R_{B'_i} (\vec{x}_{1i} \wedge \vec{z}_{2i}) \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{M}_{A_i, b''_i \rightarrow br_i} \cdot \vec{v}_i = \left[\overline{A_i B''_i} \wedge (-R_{B''_i} \cdot \vec{z}_{2i}) \right] \cdot \vec{v}_i = \left[(L_1 \vec{x}_{1i} + e \vec{v}_i) \wedge (-R_{B''_i} \cdot \vec{z}_{2i}) \right] \cdot \vec{v}_i = -L_1 R_{B''_i} (\vec{x}_{1i} \wedge \vec{z}_{2i}) \cdot \vec{v}_i$$

Le TMD en A_i projeté sur \vec{v}_i donne alors une relation entre $C_{mi}, R_{B'_i} + R_{B''_i}$ et les paramètres géométriques :

$$J_i \ddot{\theta}_i = C_{mi} + \vec{M}_{A_i, b'_i \rightarrow br_i} \cdot \vec{v}_i + \vec{M}_{A_i, b''_i \rightarrow br_i} \cdot \vec{v}_i$$

$$\boxed{J_i \ddot{\theta}_i = C_{mi} - L_1 (R_{B'_i} + R_{B''_i}) (\vec{x}_{1i} \wedge \vec{z}_{2i}) \cdot \vec{v}_i} \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3\}$$

On obtient ainsi 3 équations indépendantes.

Etape 2 : On isole la plateforme 3 et on cherche à appliquer le TRD.

Résultante dynamique : $\overline{R_{D,3/0}} = m\ddot{x}_0 \vec{x}_0 + m\ddot{y}_0 \vec{y}_0 + m\ddot{z}_0 \vec{z}_0$

BAME : les actions des 6 biellettes et l'action mécanique extérieure :

$$\{T_{b'_i \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -R_{C'_i} \cdot \vec{z}_{2i} = R_{B'_i} \cdot \vec{z}_{2i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C'_i} \quad \{T_{b''_i \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -R_{C''_i} \cdot \vec{z}_{2i} = R_{B''_i} \cdot \vec{z}_{2i} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{C''_i} \quad \{T_{ext \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} F_x \vec{x}_0 + F_y \vec{y}_0 + F_z \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Le TRD donne alors 3 équations indépendantes supplémentaires :

$$m\ddot{x}_0 \vec{x}_0 + m\ddot{y}_0 \vec{y}_0 + m\ddot{z}_0 \vec{z}_0 = F_x \vec{x}_0 + F_y \vec{y}_0 + F_z \vec{z}_0 + \sum_{i=1}^3 (R_{B'_i} + R_{B''_i}) \vec{z}_{2i}$$

Bilan : On obtient ainsi 6 équations (3 des TMD + 3 du TRD), pour 6 inconnues (les trois couples moteurs C_{mi} et les 3 paires de résultants de biellettes $(R_{B'_i} + R_{B''_i})$). Le système peut donc a priori être résolu.

On peut alors substituer les 3 paires de résultantes des biellettes, on se retrouve alors avec 3 équations reliant les 3 couples C_{mi} aux forces extérieures F_x, F_y, F_z et les paramètres géométriques.

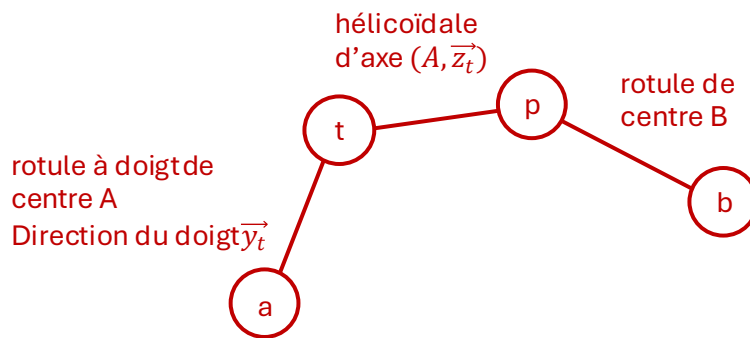
$$R_{B'_i} + R_{B''_i} = \frac{C_{mi} - J_i \ddot{\theta}_i}{L_1 (\vec{x}_{1i} \wedge \vec{z}_{2i}) \cdot \vec{v}_i}$$

$$\ddot{x}_0 \vec{x}_0 + \ddot{y}_0 \vec{y}_0 + \ddot{z}_0 \vec{z}_0 = F_x \vec{x}_0 + F_y \vec{y}_0 + F_z \vec{z}_0 + \frac{1}{L_1} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{C_{mi} - J_i \ddot{\theta}_i}{(\vec{x}_{1i} \wedge \vec{z}_{2i}) \cdot \vec{v}_i} \right) \vec{z}_{2i}$$

3. Analyse de la structure mécanique du Delthaptic

3.1 - Conception du Delthaptic

Question 11 Représenter le graphe des liaisons associé au modèle décrit par le schéma cinématique de la figure (4).



Question 12 Justifier le modèle de liaison équivalente utilisé sur le schéma cinématique entre la plateforme et la tige t.

La plateforme a, le cardan extérieur et le cardan intérieur (=tige t) forment d'une chaîne de solide en série, donc leurs mobilités se cumulent.

La liaison entre la plateforme a et le cardan extérieur est une pivot d'axe (A, \vec{x}_0) .

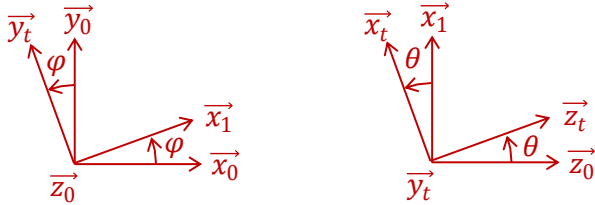
La liaison entre le cardan extérieur et le cardan intérieur est une pivot d'axe (A, \vec{y}_1) .

La liaison équivalente possède donc deux degrés de liberté : les rotations d'axes (A, \vec{x}_0) et (A, \vec{y}_1) . Il s'agit donc bien d'une rotule à doigt de centre A.

3.2 - Étude des mouvements

Question 13 Après avoir tracé deux figures de calcul représentant les angles φ et θ , déterminer trois relations donnant Δx , Δy , Δz , en fonction de λ , φ et θ .

Inverser ces trois relations, de façon à déterminer λ , φ et θ en fonction de Δx , Δy , Δz .



$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{z_t} = \Delta x \cdot \overrightarrow{x_0} + \Delta y \cdot \overrightarrow{y_0} + \Delta z \cdot \overrightarrow{z_0}$, on trouve donc les résultats demandé par projection :

$$\begin{aligned} \Delta x &= \lambda \overrightarrow{z_t} \cdot \overrightarrow{x_0} \\ &= \lambda (\cos \theta \overrightarrow{z_0} + \sin \theta \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{x_0} \\ &= \lambda \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \lambda \overrightarrow{z_t} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ &= \lambda (\cos \theta \overrightarrow{z_0} + \sin \theta \overrightarrow{x_1}) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ &= \lambda \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= \lambda \overrightarrow{z_t} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &= \lambda \cos \theta \end{aligned}$$

Pour inverser les angles, plusieurs solutions sont possibles, on retiendra la solution où on garde $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\lambda = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}\right)$$

$$\varphi = \arg(\Delta x + j\Delta y)$$

Note : l'utilisation de la fonction argument permet d'éviter les problèmes de domaine de définition rencontrés avec la fonction arctan. Ici, la formule permet bien de calculer un angle φ variant de $-\pi$ à π .

Question 14 Donner l'expression du torseur cinématique associé à la liaison entre la tige t et la plateforme a : $\{V_{t/a}\}_A$, en exprimant le vecteur vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}_{t/a}$ en fonction des paramètres définis précédemment.

$$\{V_{t/a}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}_{t/a} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{où } \overrightarrow{\Omega}_{t/a} = \dot{\varphi} \overrightarrow{z_0} + \dot{\theta} \overrightarrow{y_t}$$

Question 15 a) Exprimer le torseur cinématique associé à la liaison entre p et t , $\{V_{p/t}\}_B$ en fonction de $\dot{\lambda}$ et $\dot{\psi}$, en précisant la relation signée entre ces deux grandeurs.

b) Donner, sans calcul, les torseurs cinématiques $\{V_{a/o}\}_A$ et $\{V_{b/o}\}_B$, en fonction des composantes des vitesses de A et de B dans le référentiel $R_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

$$a) \{V_{p/t}\}_B = \begin{Bmatrix} \psi \vec{z}_t \\ \lambda \vec{z}_t \end{Bmatrix}_B$$

$$\text{où } \lambda = \pm \frac{pas}{2\pi} \psi$$

$$b) \{V_{a/0}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_A \vec{x}_0 + \dot{y}_A \vec{y}_0 + \dot{z}_A \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{V_{b/0}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_B \vec{x}_0 + \dot{y}_B \vec{y}_0 + \dot{z}_B \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B$$

Question 16 Montrer que l'on peut exprimer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(p/0)$ et la vitesse linéaire $\vec{V}(G, p/0)$ en fonction des paramètres définis ou déterminés précédemment. Il est demandé de poser les calculs de produits vectoriels mais de ne pas les effectuer. Il n'est pas nécessaire, dans cette question, d'exprimer ces vecteurs dans la base B_0 .

$$\vec{\Omega}(p/0) = \vec{\Omega}(p/t) + \vec{\Omega}(t/a) + \vec{\Omega}(a/0) \\ = \psi \vec{z}_t + \phi \vec{z}_0 + \theta \vec{y}_t$$

$$\vec{V}(G, p/0) = \vec{V}(B, p/0) + \vec{GB} \wedge \vec{\Omega}(p/0)$$

$$\text{où } \vec{V}(B, p/0) = \underbrace{\vec{V}(B, p/b)}_{=\vec{0}} + \vec{V}(B, b/0)$$

$$\vec{V}(G, p/0) = \dot{x}_B \vec{x}_0 + \dot{y}_B \vec{y}_0 + \dot{z}_B \vec{z}_0 - H \vec{z}_t \wedge (\phi \vec{z}_0 + \theta \vec{y}_t)$$

Question 17 Recopier le tableau ci-dessous. À l'aide du schéma cinématique, compléter ses cases par les valeurs 0, V ou -V pour indiquer quelle vitesse imposer à chacun des degrés de liberté de chacune des deux plateformes, en vue d'obtenir les mouvements et sens souhaités.

Mouvement et sens souhaités	\dot{x}_A	\dot{y}_A	\dot{z}_A	\dot{x}_B	\dot{y}_B	\dot{z}_B
Translation selon $+\vec{y}_0 : T_{y_0}$	0	V	0	0	V	0
Translation selon $+\vec{z}_0 : T_{z_0}$	0	0	V	0	0	V
Rotation selon (G, \vec{x}_0) , sens direct : R_{x_0}	0	V	V	0	-V	-V
Rotation selon (G, \vec{z}_0) , sens direct : R_{z_0}	0	0	-V	0	0	V

3.3 - Action ressentie sur la poignée

Question 18 Compte tenu de la forme de la poignée, visible sur la figure (5), proposer une simplification pour la matrice d'inertie $I_p(G)$. Calculer ensuite le moment cinétique en G de $p/0 : \vec{\sigma}(G, p/0)$ en le décomposant dans la base $B_t = (\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)$ et en exprimant ses coordonnées en fonction des angles ϕ, θ, ψ (et de leurs dérivées temporelles) et des éléments pertinents de la matrice d'inertie $I_p(G)$.

La poignée semble avoir une symétrie de révolution d'axe (A, \vec{z}_t) . Ainsi, la matrice peut se simplifier :

$$I_p(G) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_t)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)}$$

Calcul du moment cinétique : $\vec{\sigma}(G, p/0) = I_p(G) \cdot \vec{\Omega}(p/0)$ où, d'après la question 16 :

$$\vec{\Omega}(p/0) = \psi \vec{z}_t + \phi \vec{z}_0 + \theta \vec{y}_t \\ = \psi \vec{z}_t + \phi (\cos \theta \vec{z}_t - \sin \theta \vec{x}_t) + \theta \vec{y}_t$$

$$= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)}$$

Ainsi, $\vec{\sigma}(G, p/0) = \begin{pmatrix} -A\dot{\phi} \sin \theta \\ A\dot{\theta} \\ C\dot{\psi} + C\dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)}$

Question 19 Déterminer les relations vectorielles entre \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F} , \vec{M} en fonction des paramètres géométriques et cinétiques. Préciser le(s) théorème(s) ou principe(s) utilisé(s) et le système isolé.

On ne développera pas les calculs de produits vectoriels ou de dérivées.

On isole $E = \{p + t\}$ et on applique le PFD au point G .

Le TRD donne : $m_p \vec{\Gamma}(G, p/0) = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B$

$$m_p \left. \frac{d\vec{V}(G, p/0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B \quad (\text{où } \vec{V}(G, p/0) \text{ a déjà été exprimée à la question 16})$$

Le TMD en G donne : $\vec{\delta}(G, p/0) = \vec{M} + \vec{M}_{G, a \rightarrow t} + \vec{M}_{G, b \rightarrow p}$

$$\left. \frac{d\vec{\delta}(G, p/0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{M} + \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B$$

$$\left. \frac{d\vec{\delta}(G, p/0)}{dt} \right|_{R_0} = \vec{M} + (H - \lambda) \cdot \vec{z}_t \wedge \vec{F}_A + H \cdot \vec{z}_t \wedge \vec{F}_B$$