

- Ex 1 :**
1. Montrer que  $f : x \mapsto xe^x$  admet une fonction réciproque sur  $[-1 + \infty[$ , que l'on notera  $W$  (fonction de Lambert). On précisera son ensemble de définition  $I$ . Montrer que  $W$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overset{\circ}{I}$ .
  2. Trouver une équation différentielle vérifiée par  $W$ .
  3. Déterminer  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{W(-e^{-1} + h) - W(-e^{-1})}{h}$ .
  4. Montrer que  $W$  admet un  $DL_3(0)$  que l'on donnera.
  5. Donner un développement asymptotique à deux termes de  $W$  en  $+\infty$  et en  $-e^{-1}$ .

**Ex 2 :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que :  
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ .

**Ex 3 :** Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ . On pose  $M = \max\left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|, 1\right)$ . Soit  $z$  une racine de  $P$ . Montrer que :  $|z| \leq M$ .

**Ex 4 :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim(E) = n$  et  $u$  diagonalisable. On pose  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ , avec les valeurs propres de  $u$  sans répétitions et  $n_i = \dim(E_{\lambda_i})$ , pour  $1 \leq i \leq p$ . On note  $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), uv = vu\}$ . Déterminer  $\dim(\mathcal{C}(u))$ .

**Ex 5 :** On désigne par  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$ . Soit une partie  $\mathcal{F}$  de l'ensemble  $\mathcal{L}(V)$  constituée d'endomorphismes diagonalisables. On suppose de plus que quels que soient  $u \in \mathcal{F}$  et  $v \in \mathcal{F}$ , on a :  $u \circ v = v \circ u$ .  
 Montrer que l'on peut trouver une base de  $V$  dans laquelle la matrice de tout élément de  $\mathcal{F}$  est diagonale.

**Ex 6 :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang 1. CNS pour que  $A$  soit diagonalisable.

**Ex 7 :** Soit  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$ , avec  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  et  $n \geq 2$ .

1. Montrer que  $\chi_C(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $C$  soit diagonalisable.

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{C}$ , on pose :  $T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$ , que l'on

appelle matrice circulante et  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable

sur  $\mathbb{C}$ , puis que  $T$  l'est aussi, en précisant le spectre et ses vecteurs propres.

**Ex 8 :** Montrer qu'il existe un unique couple  $(d, n)$  dans  $(\mathcal{L}(E))^2$  tel que  $dn = nd$ ,  $u = d + n$ , avec  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotente.

Pour l'existence, on s'intéressera, pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , à l'endomorphisme  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_i = \text{Ker}((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$ .

Pour l'unicité, si  $(d', n')$  est un autre couple, on montrera que  $d'$  laisse stable les  $F_i$ , pour  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$  et que  $d - d'$  est diagonalisable.

**Ex 9 :** Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices unipotentes (c'est-à-dire les matrices qui s'écrivent  $I_n + N$ , avec  $N$  nilpotente).

**Ex 10 :** Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

1. On suppose que  $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$ . Montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

On rappelle que vous avez montré en sup qu'une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle rencontre tout intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

2. On suppose que :  $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$ . Montrer que :  $G = a\mathbb{Z}$ .

**Ex 11 :** Sur  $\mathbb{C}[X]$ , on définit une norme en posant,  $\|P\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ , pour  $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Étudier la continuité la forme linéaire  $\varphi_z : \begin{cases} \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C} \\ P \mapsto P(z) \end{cases}$ . Dans les cas de continuité, déterminer  $\|\varphi_z\|$ .

**Ex 12 :** Montrer que  $GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert dense de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

---

**Ex 13 :** 1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : x \mapsto \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$ . Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  sur un domaine à préciser.

2. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ , puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

---

**Ex 14 :** 1. Pour  $x$  dans  $]1, +\infty[$ , on pose  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ . Montrer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

2. Soit  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ . Montrer que  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

---

**Ex 15 :** Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$ .

1. Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Montrer que :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$ .

3. En déduire un équivalent de  $S$  en  $0^+$ .

---