<u>Ex 1</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si chaque valeur propre de A est de partie réelle strictement négative, alors toute solution de $(S) : X' = AX$ tend vers 0 en $+\infty$.

<u>Ex 2</u> : Montrer que la fonction det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est différentiable et déterminer sa différentielle.

<u>Ex 3</u> : <u>Équation de d'Alembert sur la propagation d'une onde :</u>
déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, avec $c > 0$. On posera le changement de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$.

<u>Ex 4</u> : Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ et $u \in E$. Soit g définie sur E par
$g : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que g admet un minimum global.

<u>Ex 5</u> : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que toutes les dérivées de f sont positives.
On pose $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux)du$, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0, a[$.

1. Soient x et y tels que l'on ait $0 \leq x < y < a$. Montrer que l'on a : $R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0; a[$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

<u>Ex 6</u> : (Matrice de Gram) Soit $x_1, ..., x_p$ sont p vecteurs de E euclidien. On pose la matrice $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1 \leq i,j \leq p}$ et on pose $\Gamma(x_1, ..., x_p) = \det(G(x_1, ..., x_p))$. Soit $x \in E$.

1. Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p) = [a_{ij}]_{\substack{\leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Montrer que $G(x_1, ..., x_p) = A^T A$.
2. Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, ..., x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, ..., x_p)$.
3. Si x est dans $F^\perp$, exprimer $\Gamma(e_1, ..., e_n, x)$ à l'aide de x et de $\Gamma(e_1, ..., e_n)$.
4. On revient au cas général pour x. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
   Montrer que $\Gamma(e_1, ..., e_n, x + \lambda e_i) = \Gamma(e_1, ..., e_n, x)$.
5. Montrer que : $d^2(x, F) = \dfrac{\Gamma(e_1, ..., e_n, x)}{\Gamma(e_1, ..., e_n)}$.

Ex 7 : Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $\omega \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n\omega(t)$ soit intégrable sur $]a,b[$. On pose $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R}),\ \int_a^b f^2\omega < +\infty \right\}$.

On munit E du produit scalaire : $\forall f,g \in E,\ (f,g) = \int_a^b fg\omega$.

Polynômes orthogonaux :

1. Montrer que l'on définit bien un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires (coefficient dominant qui vaut un) tels que $\deg P_k = k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ vect(P_0, ..., P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ (P_n|Q) = 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)$, où $\beta_1, ..., \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_n dans $]a,b[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n = 1$.
   (a) Montrer que P_nQ_n est de signe constant sur $]a,b[$.
   (b) Montrer que si on a $d^\circ Q_n < n$, alors on a $P_nQ_n = 0$ et donc une contradiction.
   (c) En déduire que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples et dans $]a;b[$.
5. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$XP_{n+1} = P_{n+2} + b_nP_{n+1} + a_nP_n \text{ avec } a_n = \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n = \frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}.$$

   (On commencera par écrire $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$ et on cherchera à calculer les c_k.)

Ex 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^\perp$, puis que $\mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^*) = E$.

Ex 9 :

(Racine carrée d'une matrice) Nous rappelons un résultat vu dans le chapitre 6 : soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables tels que : $uv = vu$. Alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

1. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.
2. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et $\mu_1, ..., \mu_p$ les valeurs propres de A sans répétitions.
   i) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$.
   ii) En déduire que $(Q(A))^2 = A$.
3. Montrer que B est unique.
4. Applications de la racine carrée :
   (a) (Décomposition polaire) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exists (A,\Omega) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}),\ M = \Omega A$.
   (b) Même question avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 10 : 1. Déterminer le domaine de définition de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta} d\theta$.

2. Déterminer F sur son ensemble de définition.

3. En déduire les valeurs $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta} d\theta$ et de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

Ex 11 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2} du \ ; \ H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2) du\right)^2.$$

1. Montrer que G et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées G' et H'. En déduire que la fonction $G + H$ est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\pi/4$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du$.

Ex 12 : Soient $p \in]0,1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, avec pour tout m de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi $\mathcal{B}(m, p)$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Le nombre de clients venant dans un magasin pour acheter des poivrons suivent une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client achète au hasard un poivron rouge ou vert. On note R le nombre de client choisissant un poivron rouge et V le nombre de clients choisissant un poivron vert.
   i) Déterminer les lois de R et V.
   ii) Sont-elles indépendantes?

Ex 13 : Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$. On note $q = 1 - p$.
Montrer que : $\displaystyle -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \beta_n \leq -\frac{1}{\ln(q)} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + 1$.

Ex 14 : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$.
On pose : $\displaystyle B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).
On considère S_n qui est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n, x)$.
On rappelle que dans un exemple du cours, on a montré grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev que : $\displaystyle P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

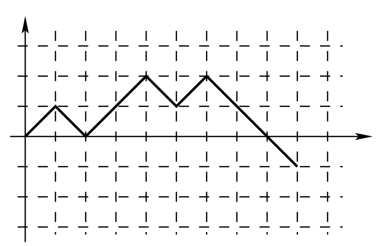
1. Montrer que $\mathtt{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$.

2. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe α dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que :
   $\forall a, b \in [0,1],\ |a-b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$.
   Majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout k de $[\![0, n]\!]$ vérifiant $|k/n - x| \leq \alpha$.
3. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{|k/n-x|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
4. Montrer qu'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$.
5. En déduire que tout fonction f de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.

<u>Ex 15</u> : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1.
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in S_n$.
On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P éventuellement confondues.

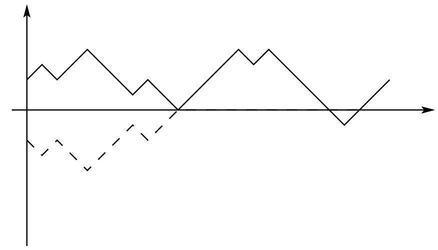
1. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant \binom{n}{k}$.
   Que peut-on dire de S_n?
2. On rappelle que P est le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.
   Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall i \in [\![1, n]\!],\ Q_p(z_i^p) = 0$.
3. Conclure que les racines non nulles de P sont de module 1.

<u>Ex 16</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormal. Un chemin est une ligne brisée qui relie des points $\{(k,\ S_k),\ 0 \leq k \leq n\}$ de telle sorte que $S_{k+1} = S_k + 1$ ou $S_{k+1} = S_k - 1$, pour $0 \leq k \leq n-1$, comme le montre le schéma ci-dessous.



Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $N_n(a, b)$ le nombre de chemins distincts allant de $(0, a)$ à (n, b) et on note $C_n(a, b)$ l'ensemble de ces chemins et $N_n^0(a, b)$ le nombre de chemins allant de $(0, a)$ à (n, b) et passant au moins une fois par 0 : de tels chemins contiennent $(k, 0)$ pour un k tel que $0 \leq k \leq n$ et on note $C_n^0(a, b)$ l'ensemble de ces chemins.

1. Déterminer $N_n(a, b)$.
2. Montrer que si $a,\ b > 0$, alors $N_n^0(a, b) = N_n(-a, b)$. On appliquera le principe de réflexion, qui consiste à associer à tout chemin de $(0, -a)$ à (n, b) passant pour la première fois en 0 à l'instant k le chemin de $(0, a)$ à (n, b) obtenu en changeant en leur opposé tous les points avant k. Voici un dessin où l'axe des x représente le temps et l'axe des y la position S_n. La réflexion se fait par rapport à l'axe Ox :



3. Montrer que si $b > 0$ et de même parité que n, alors le nombre de chemins de $(0,0)$ à (n,b) qui ne repassent pas par 0 est égal à $\dfrac{b}{n} N_n(0,b)$.

Ex 17 : Montrer que $f : x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Ex 18 : Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}$, avec p dans $\mathbb{N}$, est décomposable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.

Ex 19 : Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, pour $x > 0$.

Ex 20 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}$. Étude de la convergence simple de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Ex 21 : Soit $r \in [0,1[$. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ln|1 - re^{i\theta}| = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} r^n$.

Ex 22 : Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme $\|.\|$. On suppose que : $\forall u, v \in A,\ \|u.v\| \leq \|u\|.\|v\|$.

1. On suppose que : $\|u\| < 1$. Démontrer que $(e-u)$ est inversible et $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Montrer que l'ensemble des inversible $\mathcal{U}(A)$ de A est un ouvert de A.

Ex 23 : On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de de la norme $\|.\|_\infty$ et on note N_∞ la norme subordonnée associée. On peut montrer que : $N_\infty(A) = \displaystyle\max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$, pour $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in Sp(A)\}$.

1. Montrer que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.
2. Soient $T = [t_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ est triangulaire supérieure et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Déterminer la limite de la suite $(Q_q^{-1}TQ_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ où $Q_q = Diag(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$.
   (b) En déduire qu'il existe une norme d'algèbre N_1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_1(T) < \rho(T) + \varepsilon$.
3. En déduire qu'il existe une norme d'algèbre N_ε sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$.
4. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

<u>Ex 24</u> : 1. Montrer que la famille $\left((X+1)^k(X-1)^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & (1-X^2)P' + nXP \end{array}\right.$. Montrer que φ est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres.

<u>Ex 25</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pose $f_A : \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}\right.$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si f_A l'est.

<u>Ex 26</u> : Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué que de matrices diagonalisables. On déterminera d'abord $F \cap T_n^{++}(\mathbb{R})$, avec $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des zéros sur la diagonale.

<u>Ex 27</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

<u>Ex 28</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ tr(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.

<u>Ex 29</u> : Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que : $\varphi\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)dt\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \varphi(g(t))dt$.

<u>Ex 30</u> : Étude de la CV de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x^\alpha|\ln(x)|^\beta}$, avec α, β dans $\mathbb{R}$.

<u>Ex 31</u> : Montrer (après avoir montré la CV des intégrales) que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt$.

Ex 32 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit d un diviseur de n. Dans $\mathbb{U}_n$, montrer que tout élément d'ordre d est inclus dans $\mathbb{U}_d$ et en déduire qu'il y exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
2. Montrer que $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$.

Ex 33 :

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$. Déterminer le noyau et l'image de φ.
2. Déterminer φ^k, pour k dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\Delta^p) = \{(P(n))_{n\in\mathbb{N}},\ P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose $\Delta_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - \lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$, $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$
et $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\lambda^n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que $\psi^{-1} \circ T \circ \psi = \lambda T$.
   (b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathrm{Ker}\,(\Delta_\lambda^k) = \left\{(\lambda^n P(n))_{n\in\mathbb{N}},\ P \in \mathbb{C}_{k-1}[X]\right\}$.
   (c) Soient $a_0, ..., a_{p-1} \in \mathbb{C}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \neq 0$.
   On pose $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + ... + a_{p-1} u_{n+p-1}\}$. Déterminer E.

Ex 34 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ D(P) = P'$. Soit F un sous-espace stable de D non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer qu'il existe $m \in [\![0, n]\!]$ tel que $F = \mathbb{K}_m[X]$.
2. En déduire les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$, stables par l'endomorphisme de dérivation que l'on note encore D.

Ex 35 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $G = \{g_1, ..., g_q\}$ un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. On pose $p = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_i$. Montrer que p est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\,(g_i - Id_E)$.

Ex 36 : Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ que l'on appelle matrice de Vandermonde.

Montrer que V est inversible et déterminer son inverse. *On pourra interpréter V comme la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

Ex 37 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $tr(M) = 0$.

1. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur sa diagonale.
2. Montrer qu'il existe $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = RS - SR$.

Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 38 : Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer $D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$, ce déterminant étant de taille $n \times n$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Ex 39 : Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$.

1. Nature la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$.
2. Nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Ex 40 : Nature de $\sum u_n$, avec $u_n = \text{ Arccos } \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) - \dfrac{\pi}{6}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
