
Ex 1 : On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Pour z dans $\mathbb{C}$, avec $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Soit r tel que : $0 < r < R$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ip\theta}d\theta$.

Ex 2 : Monter que $h : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Ex 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ et, lorsque c'est possible, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n.
3. Calculer f sur son intervalle ouvert de convergence.

Ex 4 : Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de réels positifs. Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, ont un rayon de convergence qui vaut 1 et on note f et g leurs sommes respectives lorsqu'elles existent. On suppose enfin qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

On suppose que la série $\sum_n b_n$ est divergente.

1. Montrer que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Ex 5 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans points fixes (les $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(k) \neq k$). On pose $D_0 = 1$. Montrer que : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$, puis en déduire D_n.

Ex 6 : *1.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ converge. Pour tout entier naturel m, on pose $C_m = \bigcup_{i\geq m} A_i$. Montrer que $P\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_m\right) = 0$, puis interpréter ce résultat.

2. On se donne $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. Soit $B = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)$. On suppose que $\sum P(A_n)$ diverge. Montrer que $P(B) = 1$.

Ex 7 : On effectue une série de lancers d'une pièce, avec une probabilité p d'avoir Pile. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires afin d'obtenir exactement r Pile, avec $r \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X, sa série génératrice et son espérance.

Ex 8 : Soient $p \in]0,1[$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X, Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ et que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, avec pour tout m de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi $\mathcal{B}(m, p)$. Déterminer la loi de X.

Ex 9 : On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé.

La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que l'on a défini des variables aléatoires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k) P(S_{n-k} = 0_d)$.

Ex 10 : Un ascenseur amène m personnes à n étages, chaque personne s'arrêtant à un étage de façon équiprobable. Quel est le nombre moyen d'arrêts?

Ex 11 : Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose : $\forall \omega \in \Omega,\ S_p(\omega) = \sum_{k=1}^{p} X_k(\omega)$ et $S_0 = 0$. On considère une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sur le même espace probabilisé, indépendante des variables X_k. On définit une variable aléatoire Y par : $Y = S_N$.Déterminer G_Y en fonction de G_N et G_X avec $X = X_1$.

Ex 12 : Soient $X, Y, (X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles, discrètes et bornées, définies sur le même espace probabilisé. On suppose que les X_i sont indépendantes.

1. Soit $\lambda > 0$. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq e^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(e^{\lambda Y}\big)$.
2. En déduire que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(|Y| \geq a) \leq e^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(e^{\lambda Y}\big) + e^{-\lambda a}\mathbb{E}\big(e^{-\lambda Y}\big)$.
3. Soient $\lambda \geq 0$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que :
$\exp(\lambda x) \leq \operatorname{ch}(\lambda) + x\operatorname{sh}(\lambda) \leq \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right) + x\operatorname{sh}(\lambda)$.
4. Démontrer que si la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et est centrée, alors on a pour tout $\lambda \geq 0$, on a : $\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) \leq \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$ et $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X}\right) \leq \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2}\right)$.
5. Montrer que si les variables aléatoires indépendantes X_i prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$ et sont centrées, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(\left|n^{-1/2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \geq a\right) \leq 2\exp\left(-\dfrac{a^2}{2}\right)$.

Ex 13 : Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer son expression. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$, après avoir montré la convergence et la non absolue convergence de cette dernière intégrale.

Ex 14 : Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. En déduire un équivalent de Γ en 0^+.

Ex 15 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on pose $g : t \mapsto tf(t)$. On suppose que f' et g sont dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Montrer que : $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tf^2(t)$ existe et est réelle. Montrer ensuite que celle-ci est nulle.
3. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} (f')^2}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2}$. Étudier le cas d'égalité.
