

Planche 1 :

1. (ccinp 5) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  pour  $n \geq 2$ .

1. Si  $\alpha \leq 0$ , montrer par une minoration très simple que  $\sum u_n$  diverge.

2. Étudier la nature de la série de  $\sum u_n$ , pour  $\alpha > 0$ . **Indication :** on pourra utiliser la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ .

3. Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(e - (1 + \frac{1}{n})^n) e^{1/n}}{(\ln(n^2 + n))^2}$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(a) Montrer que si  $w$  est une valeur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{w}$  l'est aussi.

(b) i. Montrer que  $X^3 - 3X - 4$  possède une unique racine réelle.

ii. On suppose dans cette question de  $A^3 - 3A - 4I_n = 0$ . Montrer que  $\det(A)$  est positif.

(c) On suppose dans cette question de  $A^2 + A + I_n = 0$ . Montrer que  $n$  est pair.

(d) On suppose dans cette question de  $A^3 + A^2 + A = 0$ .

i. Montrer que  $\text{rg}(A)$  est pair.

ii. Montrer que  $\text{tr}(A)$  est dans  $\mathbb{Z}^-$ .

1. (ccinp 4)

**1.** Énoncer le théorème des accroissements finis.

**2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .

Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

**3.**  $f$  dérivable en  $x_0$  n'implique pas que  $f'$  a une limite finie en  $x_0$ . On pourra utiliser  $g : x \mapsto$

$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

2. (a) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = 0$  et  $A \neq 0$ .

i. Montrer que  $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$ .

ii. Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(b) Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on considère l'équation  $M^2 + M = A$ , d'inconnue  $M$ , avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

i. Si  $M$  est solution, montrer que  $M$  est diagonalisable.

ii. Résoudre l'équation.

Planche 3 :

1. (ccinp 63) Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(. | .)$ .

On pose :  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $u^*$  son adjoint.

**1.** Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant :  $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$  est-il forcément nul ?

**2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

ii.  $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .

iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

2. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ .

Soit  $g : x \mapsto \begin{cases} f(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

(a) Montrer que  $g$  est continue sur  $I$ , puis dérivable sur  $I$  si  $n \geq 2$ .

(b) Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I \setminus \{0\}$  et que :  $\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}$ .

(c) Montrer que :  $\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$ , grâce à une formule de Taylor avec reste intégrale.

Planche 4 :

1. (ccinp 16) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$  définie sur  $[0, 1]$ . On pose  $S(x) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \text{ lorsque la série converge.}$$

1. Montrer que  $S$  est définie sur  $[0, 1]$ .

2. Soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par  $v_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

En utilisant  $S(1)$ , montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge.

En déduire un équivalent simple de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et calculer  $S'(1)$ .

2. Soit  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $u$  un vecteur unitaire de  $E$  et pour  $a$  dans  $\mathbb{R}$  on pose  $f_a : x \mapsto x + a \langle x, u \rangle u$ .

(a) Montrer que  $f_a$  est un endomorphisme de  $E$ .

(b) i. Montrer qu'il existe un unique  $a'$  dans  $\mathbb{R}^*$  tel que :  $\forall x \in E, \|f_{a'}(x)\| = \|x\|$ .

ii. Montrer que  $\text{Ker}(f_{a'} + Id_E)$  et  $\text{Im}(f_{a'} + Id_E)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

(c) On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de  $f_a$ .

Planche 5 :

1. (ccinp 7) Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles telles que  $(v_n)_{n \geq 0}$  est non nulle à partir d'un certain rang.

**1.** Montrer que si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.

**2.** On suppose dans cette question  $(v_n)$  positive. Montrer que si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

**3.** Nature de la série  $\sum \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$ .

2. Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $a^2 + b^2 \neq 0$  et  $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $MM^T$ . En déduire  $\det(M)$ .

(b) Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ , donner le rang de  $M$ . Si  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ , donner le rang de  $M$ .

(c) On pose  $w \in \mathbb{C}$  tel que :  $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$ . Quelles sont les valeurs propres de  $M$ ? En déduire que si  $w \neq 0$ , alors  $M$  est diagonalisable.

1. (ccinp 34)

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

**1.** Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.

**2.** Démontrer que :  $x$  est dans  $\overline{A}$  si et seulement si il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  telle que :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $\lim x_n = x$ .

**3.** Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\overline{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**4.** Soient  $B$  une autre partie non vide de  $E$ . Montrer que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ .

2. Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

(a) Montrer que si  $u$  est nilpotent, alors  $u^n = 0$ .

(b) Soit  $n \geq 2$  tel que  $u^n = 0$  et  $u^{n-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer les matrices  $X$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $X^2 = A$ .

Planche 7 :

1. (ccinp 108) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

On suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  vérifie :  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}$ .

1. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$ .
  2. **a.** Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .  
**b.** Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .
  3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont elles indépendantes ?
  4. Calculer  $P(X = Y)$ .
2. Soit  $P = X^n - X + 1$ , avec  $n \geq 2$ .

(a) Montrer que  $P$  admet  $n$  racines  $z_1, \dots, z_n$  distinctes sur  $\mathbb{C}$ .

(b) Soit la matrice  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$  telle que  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} 1 + z_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Calculer  $\det(A)$ .

1. (ccinp 77) Soit  $E$  un espace euclidien.

**1.** Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .

**2.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**a.** Montrer que :  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .

**b.** Montrer que :  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

2. (a) Montrer que pour  $n \geq 3$ , on a :  $\int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$ .

(b) Montrer que  $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ .

(c) On pose  $u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2} (\ln^2(n) - \ln^2(n-1))$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} =$

$$\frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

1. (ccinp 69) Soit  $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer le rang de  $A$ .

2. Pour quelles valeurs de  $a$ , la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ .

(a) i. Montrer que  $I_n$  est bien définie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

ii. Montrer que la suite  $(I_n)$  converge et calculer sa limite.

(b) i. Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+1}$ .

ii. En déduire une autre méthode pour calculer la limite de  $(I_n)$ .

Planche 10 :

1. (ccinp 78) Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

**1.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

**a.** Démontrer que :  $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .

**b.** Démontrer que  $u$  est bijectif.

**2.** Démontrer que  $O(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.

**3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Prouver que  $u$  est dans  $O(E)$  si et seulement si  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

2. On pose  $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$ .

(a) Donner le domaine de définition et le sens de variation de  $\zeta$ .

(b) Étudier la continuité de  $\zeta$  sur son domaine de définition.

(c) Quelle est la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$  ?

(d) Montrer que  $\zeta(t) \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{t-1}$ . On pourra s'aider  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^t}$ .

(e) Montrer que  $\zeta$  est convexe.

1. (ccinp 15) Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Rappeler la définition de la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $X$ , puis celle de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $X$ .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  normalement convergente sur  $X$  est uniformément convergente sur  $X$ .

3. La série de fonction  $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$  est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R \in \mathbb{R}_+^*$  ?

2. (a) Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  et  $T_n^+(\mathbb{R})$  (l'ensemble des matrices triangulaires supérieures donc tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs) sont des sous-groupes de  $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$ .

(b) Montrer que  $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$ .

(c) Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  la base constituée des vecteurs colonnes de  $A$ . Soit  $\mathcal{B}_{GS} = (v_1, \dots, v_n)$  la base orthonormée obtenue à partir de  $\mathcal{B}$  grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. À l'aide de ces bases, montrer qu'il existe  $O \in O_n(\mathbb{R})$  et  $T \in T_n^+(\mathbb{R})$  telles que :  $A = OT$ .

Planche 12 :

1. (ccinp 72) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$  où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

**1.** Donner le rang de  $f$ .

**2.**  $f$  est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur  $u$ )

2. Soit  $(E) : (x^2 - 2)y' + xy = -2$ .

(a) Résoudre  $(E)$  sur  $I = ] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ .

(b) On considère la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$ . Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

(c) On note  $f$  la somme de la série entière précédente, trouver une équation différentielle dont  $f$  est solution.

(d) Déterminer une expression simple de  $f$ .

1. (ccinp 84)

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Donner, en justifiant, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(z + i)^n = (z - i)^n$  et démontrer que ce sont des nombres réels.

2. Soit  $r \in ]-1, 1[$ . On définit  $f_n : x \mapsto r^n \cos(nx)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Montrer que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Déterminer la fonction  $S$  définie par  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ .

(c) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(x)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

(d) Soit  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ . Calculer  $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx$ .

(e) En déduire, pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , l'expression de  $I_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{1 + r^2 - 2r \cos(x)} dx$ .

1. (ccinp 27) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ .
  1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
  2. Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?
  3. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?
  4. Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. (ex 32) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$  l'ensemble des matrices antisymétriques. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire :  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \text{tr}(A^T B)$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - (b) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ .
  - (c) On note  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer la distance de  $M$  à  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .
  - (d) Soit  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un espace vectoriel de dimension à déterminer.
  - (e) Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de  $J$  à  $H$ .

Planche 15 :

1. (ccinp 6) Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs et  $\ell$  un réel dans  $[0, 1[$ .

**1.** Démontrer que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , alors  $\sum u_n$  converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ , puis majorer, pour  $n$  assez grand,  $u_n$  par le terme général d'une suite géométrique.

**2.** Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$  ?

2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^* = -f$ .

(a) Montrer que si  $f$  est injectif, alors  $n$  est pair.

(b) Montrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont supplémentaires orthogonaux.

(c) En déduire que le rang de  $f$  est pair.

(d) Montrer que la seule valeur propre réelle de  $f$  est 0.

1. (ccinp 79) Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ .

1. Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer que :  $\int_a^b h(x)dx = 0 \Rightarrow h = 0$ .

2. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose :  $\forall f, g \in E$ ,

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

3. Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. On note  $n$  et  $p$  deux entiers naturels avec  $n$  non nul et  $p \leq n$ . On note  $N(n, p)$  le nombre de permutation de  $\mathfrak{S}_n$  avec  $p$  points fixes et on introduit  $D(n) = N(n, 0)$  et  $D(0) = 1$ . On considère  $f(x)$  la somme de la série entière de terme général  $\frac{D_n}{n!}x^n$ .

(a) Par dénombrement montrer que  $N(n, p) = \binom{n}{p}D(n-p)$  et que  $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$ .

(b) Montrer que la fonction  $f$  est définie sur  $] -1, 1[$  et que  $f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$ .

(c) En déduire  $N(n, p)$ .

(d) Trouver la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $\frac{N(n, p)}{n!}$  en fonction de  $p$ . Interpréter.

1. (ccinp 12)

**1.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x_0$ , avec  $x_0 \in [a, b]$ .

Démontrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .

**2.** On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$ .

La suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?

2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ .

(a) Soit  $a \in \mathbb{C}$  racine de  $P$ .

i. Montrer que  $a = 0$  ou  $|a| = 1$ .

ii. Montrer que  $a = -1$  ou  $|a + 1| = 1$ .

(b) En déduire tous les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  qui vérifient  $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$ .

1. (ccinp 11)

**1.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .

On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

**2.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .

**b.** Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $]0, +\infty[$ .

2. Soient  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ,  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ , on note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ .

(a) Déterminer le rang de  $M$ .

(b) Donner les valeurs propres de  $M$  et leurs sous espaces propres associés.

(c) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{Im } f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Planche 19 :

1. (ccinp 82) Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ . On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

**1.** Montrer que  $(\cdot|\cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**2.** Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

2. Soit une suite  $(a_n)$  décroissante positive et qui converge vers 0. Pour  $x \in [0, 1]$ , on note  $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$ .

(a) Justifier que  $(a_n)$  est bornée.

(b) Étudier la convergence simple de la série  $\sum (u_n)$  sur  $[0, 1]$

(c) Étudier la convergence uniforme de la série (on peut calculer le reste  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$ ).

(d) Calculer la limite de  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(e) Étudier la convergence normale de la série (on peut calculer la norme infinie de  $u_n$ )

Planche 20 :

1. (ccinp 17) Soient  $A \subset \mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .
  1. Montrer que si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $A$ .
  2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ . Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ . A-t-on convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$ ? Justifier.
2. Soit  $U$  et  $V$  deux vecteurs non nuls de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , la matrice  $A = UV^\top$  et le complexe  $a = \text{Trace}(A)$ .
  - (a) Quel est le rang de la matrice  $A$ ?
  - (b) Calculer  $U^\top V$ .
  - (c) Calculer  $A^2$ .
  - (d) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
  - (e) Dans le cas où  $a \neq 0$ , déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .

1. (ccinp 30)

**1.** Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

**2.** Soit  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ . Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**3. a.** Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 vérifiée par  $F$ .

**b.** Résoudre  $(E)$ .

2. Soit  $E$  un espace euclidien et  $u$  une isométrie vectorielle de  $E$ . On pose  $v = \text{Id}_E - u$ .

(a) Montrer que  $\text{Im}(v)$  et  $\text{Ker}(v)$  sont supplémentaires orthogonaux.

(b) On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ . Soit  $x \in E$ .

i. Soit  $z \in \text{Im}(v)$  et  $y \in \text{Ker}(v)$  tel que  $x = z + y$ . Montrer que :  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) + y$ .

ii. En déduire que  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\text{Ker}(v)$ .

1. (ccinp 63) Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(. | .)$ .

On pose :  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ . Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $u^*$  son adjoint.

**1.** Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant :  $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$  est-il forcément nul ?

**2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .

ii.  $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .

iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

2. On considère la fonction d'une variable réelle :  $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$ .

(a) Déterminer le domaine  $D$  de définition de  $F$ .

(b) La fonction  $F$  est-elle continue sur  $D$  ?

(c) Montrer que  $F$  est monotone sur  $D$ .

(d) Déterminer le domaine image  $F(D)$ .

Planche 23 :

1. (ccinp 29) On pose :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$ .

**1.** Démontrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[,$  la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ .

**2.** Pour tout  $x \in ]0, +\infty[,$  exprimer  $\Gamma(x + 1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ .

**3.** Démontrer que  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.

2. (a) Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ . Montrer que  $A$  est inversible.

(b) Soit  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $B$ . Montrer qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|\lambda - b_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|$ .

1. (ccinp 9)

**1.** Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . Donner la définition de la convergence uniforme sur  $X$  de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .

**2.** On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

**b.** La suite de fonctions  $(f_n)$  convergence-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

**c.** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  convergence-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$  ?

**d.** La suite de fonctions  $(f_n)$  convergence-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

**2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire :  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \text{tr}(A^T B)$ .

(a) Montrer que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(b) Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$ , avec  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

(c) On note  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer la distance de  $M$  à  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .

(d) Soit  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ . Montrer que  $H$  est un espace vectoriel de dimension à déterminer.

(e) Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de  $J$  à  $H$ .

1. (ccinp 22)

**1.** Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

**2.** Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$ .

La série obtenue converge-t-elle pour  $x = 1/4$ ?  $x = 1/2$ ?  $x = -1/2$ ?

En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(a) Justifier que  $A$  est diagonalisable.

(b) Déterminer le rang de  $A$ .

(c) Déterminer le polynôme minimal de  $A$ , le spectre de  $A$  et le polynôme caractéristique de  $A$ .

$$1. \text{ (ccinp 33) Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases}$$

**1.** Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**2.** Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

**3.**  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

$$2. \text{ Soit } (a, b) \in \mathbb{C}^2 \text{ et la matrice : } A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer  $\det(A)$ . On exprimera le résultat sous une forme factorisée.

(b) Déterminer le rang de la matrice  $A$ .

(c) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable? Préciser la valeurs propres de  $A$  ainsi que leur multiplicité. Déterminer le polynôme minimal  $\pi_A$  de  $A$ .

1. (ccinp 105)

**1.** Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

**2.** On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $1/2$ .

**a.** On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

**b.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?

**c.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

2. Soit  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n}$ .

(a) Montrer que  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

(b) Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et calculer  $S'$ .

1. (ccinp 71) Soient  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$  et  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y/2 = z/3\}$ .

**1.** Montrer que  $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ .

**2.** Soit  $p$  la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$ . Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $p(u)$ . Quelle est la matrice de  $p$  dans la base canonique ?

**3.** Déterminer une base dans laquelle  $p$  est diagonale.

2. (a) Montrer que l'intégrale  $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$  est convergente pour tout  $a \in ]0, 1[$ .

(b) Montrer que  $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$

(c) Montrer alors que  $\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$  est convergente et en déduire sa valeur.

1. (ccinp 66)

**1.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  est dans  $S_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si :  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ .

**2.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^2$  est dans  $S_n^+(\mathbb{R})$

**3.** Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $B$  dans  $S_n^+(\mathbb{R})$  tel que  $B^2 = A$ .

2. (a) Déterminer le développement en série entière de la fonction  $\text{Arcsin}$ .

(b) Justifier que la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$  admet un développement en série entière.

(c) Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ .

(d) En déduire le développement en série entière de  $f$ .

1. (ccinp 66)

**1.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A$  est dans  $S_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si :  $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ .

**2.** Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^2$  est dans  $S_n^+(\mathbb{R})$

**3.** Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $B$  dans  $S_n^+(\mathbb{R})$  tel que  $B^2 = A$ .

2. Pour tout  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . Soit  $X$  une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : P(X = n) = \frac{\lambda}{n^s}$$

(a) Calculer  $\lambda$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $X$  admette une espérance. Puis une variance.

(b) Soit  $A_n : \ll n \text{ divise } X \gg$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Calculer  $P(A_n)$ . Étudier l'indépendance de  $A_n$  et  $A_m$  quand  $n \wedge m = 1$ .

(c) Montrer qu'en notant  $P$  l'ensemble des nombres premiers,  $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ .

1. (ccinp 94)

**1.** En raisonnant par l'absurde, montrer que le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 5[6] \\ x \equiv 4[8] \end{cases}$  n'a pas de solution  $x \in \mathbb{Z}$ .

**2. a.** Énoncer le théorème de Bézout dans  $\mathbb{Z}$ .

**b.** Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux. Soit  $c \in \mathbb{N}$ . Prouver que :  $(a|c \text{ et } b|c) \Leftrightarrow ab|c$ .

**3.** On considère le système  $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 5 & [16] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$  dans lequel l'inconnue  $x$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .

**a.** Déterminer une solution particulière  $x_0$  de  $(S)$  dans  $\mathbb{Z}$ .

**b.** Dédire des questions précédentes les solutions dans  $\mathbb{Z}$  de  $(S)$  en fonction de la solution particulière  $x_0$ .

2. On pose :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1).x^2}}{t^2+1} dt$ .

(a) Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$ .

(b) Exprimer  $g$  en fonction de  $h : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ .

(c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

1. (ccinp 47) Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$$

2. 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}.$$

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  de rang un.

- (a) Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :  $f^2 = \lambda f$ .
- (b) A-t-on :  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$  ?
- (c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - i. Il existe un scalaire  $c$  non nul tel que  $cf$  soit un projecteur ;
  - ii.  $f \circ f \neq 0$  ;
  - iii.  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ .

1. (ccinp 81) On définit sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  définie par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ . On admet que cela définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Donner une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .

3. Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .

4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

2. Soit  $n \geq 2$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . On pose :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad f((x_1, \dots, x_n)) =$

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} & \text{si } \prod_{i=1}^n x_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et : } \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad g((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{et } \Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \prod_{i=1}^n x_i \neq 0\}$$

(a) Montrer que  $f$  admet un maximum  $\mu$  sur  $\Gamma$ , en particulier sur  $\Gamma \cap ]0, +\infty[^n$ .

(b) Déterminer  $\mu$  et  $A \in \Gamma \cap ]0, +\infty[^n$  tel que  $f(A) = \mu$ .

(c) En déduire que :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ .

1. (ccinp 54) Soient  $E$  l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

**1.** Prouver que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

**2.** On pose :  $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ ,  $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ .

**a.** Prouver que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .

**b.** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ . Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$  converge.

**c.** Soit  $f$  l'application définie sur  $E$  par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $E$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On définit :  $u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & -X + \text{tr}(X)A \end{cases}$  .

(a) Montrer que  $u$  est linéaire.

(b) Montrer que  $u$  est injective si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 1$ .

(c) En déduire une condition pour que  $u$  ne soit pas bijective.

(d) Discuter selon  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de l'existence de solutions de l'équation  $u(X) = B$ .

1. (ccinp 59) Soit  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ . Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose :  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ .

**1.** Montrer que  $f$  est bijective de deux manières :

**a.** sans utiliser la matrice de  $f$ .

**b.** en utilisant la matrice de  $f$ .

**2.** Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P \in E$  tel que  $f(P) = Q$ .

Indication : si  $P$  est dans  $E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?

**3.**  $f$  est-elle diagonalisable ?

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)}$ .

(a) Donner le rayon de convergence  $R$  de  $\sum a_n x^{2n+1}$ .

(b) Résoudre sur  $] -R, R[$  l'équation différentielle  $(E)$ :  $(2 - x^2)y' - xy = 2$ .

(c) Montrer que la somme  $f$  de  $\sum a_n x^{2n+1}$  est solution de  $(E)$  sur  $] -R, R[$ .

(d) Étudier la convergence aux bords de l'intervalle de convergence de cette série entière.

Planche 36 :

1. (ccinp 7) Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles telles que  $(v_n)_{n \geq 0}$  est non nulle à partir d'un certain rang.
  1. Montrer que si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.
  2. On suppose dans cette question  $(v_n)$  positive. Montrer que si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.
  3. Nature de la série  $\sum \frac{((-1)^n + i) \ln(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3} - 1}$ .
2. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non colinéaire à  $I_n$  tel que  $(A + I_n)^3 = 0$ .
  - (a) Montrer que  $A$  est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
  - (b)  $A$  est-elle diagonalisable ?
  - (c) Soit  $p$  un entier naturel, exprimer  $A^p$  en fonction de  $A^2$ , de  $A$  et de  $I_n$ .

1. (ccinp 82) Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ . On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

1. Montrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

2. On note  $I = ]0, +\infty[$  et on fixe une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que : 
$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \phi = \ln(f) \text{ est convexe.} \end{cases} .$$

(a) Tracer l'allure du graphe d'une fonction convexe et y placer trois points  $A, B$  et  $C$  d'abscisses croissantes. Classer alors, sans justification, les pentes des droites  $(AB), (BC)$  et  $(AC)$ .

(b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, 1], \ln(n) \leq \frac{\phi(n+1+x) - \phi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$ .

(c) Montrer que :  $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1], 0 \leq \phi(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

(d) Montrer alors que  $f$  est unique, puis vérifier que  $f$  coïncide avec la fonction  $\Gamma : x > 0 \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  d'Euler.

1. (ccinp 91) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

**1.** Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.

**2.** La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

**3.** Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de  $A$ .

**4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X - 1)^2$  et en déduire la valeur de  $A^n$ .

2. On définit  $g: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1} dt$ .

(a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et trouver une équation différentielle simple vérifiée par  $g$ .

(c) En déduire une autre expression (intégrale) de  $g$  et un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ .

1. (ccinp 84)

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Donner, en justifiant, les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$  et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(z + i)^n = (z - i)^n$  et démontrer que ce sont des nombres réels.

2. Soit  $k > 0$  et  $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 t^k \sin(xt) dt$ .

- (a) Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , puis prouver que  $f$  vérifie la relation :  
 $\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + (k + 1)f(x) = \sin(x)$ .
- (c) Déterminer le développement en série entière de  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :  
 $\forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) + (k + 1)y(x) = \sin(x)$ . Donner, ensuite, le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction  $y$ .

1. (ccinp 56) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ .
  1.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Si oui, les déterminer.
  2.  $f$  admet-elle des extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.
  3. Soit  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ . Justifier, oralement, que  $f$  admet un maximum global sur  $K$ , puis le déterminer.
  
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On considère  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 = u$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable et discuter de son nombre de valeurs propres  $p$ .

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $u$  et  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$  les sous espaces propres associés.
  - (b) Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ . Prouver que  $F$  stable par  $u$  si et seulement si  $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  avec pour tout  $i$  de  $\llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $F_i$  est un sous espace vectoriel de  $E_{\lambda_i}$ .

1. (ccinp 75) Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**1.** Montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable.

**2.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  canoniquement associé à  $A$ . Trouver une base  $(v_1, v_2)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ . On donnera explicitement les valeurs de  $a, b, c$ .

**3.** En déduire la résolution du système  $\begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$ .

2. On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ .

(a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

(b) Rappeler la définition de  $\lim_{x \rightarrow 0} |f'(x)| = +\infty$ .

Montrer que :  $\forall A > 0 \quad \forall x > 0 \quad |f'(x)| \geq \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} (1 - xt^2) dt$ .

(c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ .

1. (ccinp 4)

**1.** Énoncer le théorème des accroissements finis.

**2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ . On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .

Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

**3.**  $f$  dérivable en  $x_0$  n'implique pas que  $f'$  a une limite finie en  $x_0$ . On pourra utiliser  $g : x \mapsto$

$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $[A]_{ij} = \sin(i+j)$ , soit  $A =$

$$\begin{pmatrix} \sin(2) & \sin(3) & \sin(4) & \cdots & \sin(n+1) \\ \sin(3) & \sin(4) & \sin(5) & \cdots & \sin(n+2) \\ \sin(4) & \sin(5) & \ddots & \cdots & \sin(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n+1) & \sin(n+2) & \sin(n+3) & \cdots & \sin(2n) \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le rang de  $A$

(b) Trouver  $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$  telles que  $A = BC$  et  $CB$  soit inversible.

(c) Montrer que  $\text{Sp}(CB) \subset \text{Sp}(A)$ .

(d) Trouver les valeurs propres de  $A$  et les sous-espaces propres associés.

1. (ccinp 41) oit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2.$$

Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$ .

**1.** Justifier que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $C$ .

**2.** Soit  $(u, v) \in C$  un point où  $f$  atteint un de ses extremums.

**a.** Justifier qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que le système  $(S)$  suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$

**b.** Montrer que  $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$ . En déduire les valeurs possibles de  $\lambda$ .

**3.** Déterminer les valeurs possibles de  $(u, v)$ , puis donner le maximum et le minimum de  $f$  sur  $C$ .

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  avec  $2 \leq n$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que  $E$  est le seul espace non nul stable par  $u$ .

(a) Que peut-on dire du spectre de  $u$  ?

(b) Montrer que  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .

(c) On fixe  $x \in E$ . Donner la matrice de  $u$  dans cette base et montrer qu'elle ne dépend pas de  $x$ .

1. (ccinp 78) Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $(x|y)$  le produit scalaire de  $x$  et  $y$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.
  - 1.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
    - a.** Démontrer que :  $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
    - b.** Démontrer que  $u$  est bijectif.
  - 2.** Démontrer que  $O(E)$  l'ensemble des isométries vectorielles de  $E$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
  - 3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Prouver que  $u$  est dans  $O(E)$  si et seulement si  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit une fonction  $f_n$  définie sur  $[0; 1]^n$  telle que :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in [0; 1]^n, f_n(x_1, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - x_i^2} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $f_n$  admet un minimum  $m_n$  et un maximum  $M_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (b) Calculer  $m_n$ .
  - (c)
    - i. Montrer que  $f_n$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega = ]0; 1[^n$ , et montrer qu'il existe un unique point critique  $A \in \Omega$ .
    - ii. Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in [0; 1]^n$ . Montrer que :  $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \sqrt{1 - x_j^2} + x_j \sqrt{1 - x_i^2} \leq 1$ .
    - iii. Montrer que  $M_n = f_n(A)$ .

1. (ccinp 61) Pour  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose  $\|A\| = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ .

1. Prouver que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Montrer que pour tout  $A, B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :  $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$ , puis que :  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^p\| \leq n^{p-1}(\|A\|)^p$ .

3. Démontrer que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la série  $\sum \frac{A^p}{p!}$  est absolument convergente.

Est-elle convergente ?

2. Soit  $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$ .

1. Montrer que  $u_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}$ .

2. Par comparaison série-intégrale montrer que  $u_{2n} \sim \frac{\sqrt{2n}}{2}$ .

3. Trouver un équivalent de  $u_n$ .

4. On pose  $v_n = u_{n+1} + u_n$ . Nature de  $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ . Montrer que  $(v_n)$  converge vers  $l < 0$ .

5. Nature de  $\sum \frac{1}{u_n}$ .

Planche 46 :

1. (ccinp 72) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On suppose que  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$  où  $v$  est un vecteur donné de  $E$ .

**1.** Donner le rang de  $f$ .

**2.**  $f$  est-il diagonalisable? (discuter en fonction du vecteur  $u$ )

2. Soit  $(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$   
et  $(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$ .

On étudie les solutions de  $(E)$  et  $(H)$  sur  $]0, +\infty[$ .

**1.** Montrer qu'il existe une unique solution DSE, qui vérifie  $(E)$  et la déterminer.

**2.** Montrer que  $g : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  est solution de  $(E)$ .

**3.** On admet que  $h : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$  est solution de  $(H)$ .

Déterminer toutes les solutions de  $(H)$ .

1. (ccinp 99)

**1.** Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**2.** Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et dans

$L^2$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Prouver que :  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$ .

**3. Application :** Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages peut-on garantir à 95% que la proportion de boules rouges tirées est dans l'intervalle  $]0,35; 0,45[$ .

**Indication :** considérer la suite  $(Y_i)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i$ -ème tirage.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n : x \mapsto nx^n(1-x)$  et  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  quand c'est défini.

**1. a.** Etudier les convergences simples, uniformes et normales de  $\sum f_n$ .

**b.** Montrer que  $S$  est définie sur  $[0, 1]$  et continue sur  $[0, 1[$ .

**2. a.** Expliciter  $S(x)$ .

**b.** Montrer que  $S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$ .

**c.**  $S$  est-elle continue en 1 ? Justifiez.

1. (ccinp 37) On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E$ ,  $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

**1. a.** Démontrer que  $N_1$  et  $N_\infty$  sont deux normes sur  $E$ .

**b.** Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$ .

**c.** Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .

**2.** Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $f : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto u \circ v \end{cases}$ .

**1.** Montrer que toute valeur propre de  $f$  est également valeur propre de  $u$ .

**2.** Soit  $\lambda \in Sp(u)$  et  $v$  un projecteur sur  $E_\lambda(u)$ .

**a.** Montrer que  $v$  est un vecteur propre de  $f$ .

**b.** En déduire que  $u$  et  $f$  ont le même spectre.

**3.** Pour  $\lambda \in Sp(u)$ , on suppose que  $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$ .

Montrer que  $f$  est diagonalisable ssi  $u$  est diagonalisable.

**4.** Montrer que  $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$ .

1. (ccinp 73) Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

**1.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ .

**2.** Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ . En déduire que l'ensemble  $C(A)$  des matrices qui commutent avec  $A$  est  $\text{vect}(I_2, A)$ .

2. Soit  $u_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$ .

**1.** Donner le développement en série entière de  $\ln(1 + t)$ .

**2.** Montrer, avec le théorème d'intégration terme à terme, que  $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk + 1)}$ .

**3.** Soit  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k + x)}$ .

**a.** Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**b.** Déterminer  $u_n$  en fonction de  $f$ .

**c.** On admet  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Montrer que  $u_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$ .

**4.** Montrer que :  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\lambda}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**5.** Trouver  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  en fonction de  $\lambda$  tels que  $\int_0^1 \frac{t^n}{1 + t^n} dt = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

1. (ccinp 111) On admet que pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$  converge pour  $x \in ]-1, 1[$  et que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la probabilité du couple  $(X, Y)$  est donnée par :  $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P((X = k) \cap (Y =$

$$n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité pour le couple  $(X, Y)$ .
  2. **a.** Déterminer la loi de  $Y$ .
    - b.** Montrer que  $1 + Y$  suit une loi géométrique.
    - c.** Déterminer l'espérance de  $Y$ .
  3. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
1. Déterminer les valeurs propres de  $A$ . Montrer qu'il existe un unique  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $B = A + \lambda I_2$  soit nilpotente.
  2. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $e^{tA}$  et  $e^{tB}$ .
  3. Résoudre le système d'équation différentiel  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

1. (ccinp 95) Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

**1.** On effectue cinq tirages successifs avec remise. Chaque boule blanche tirée rapporte 2 points et chaque boule noire tirée fait perdre 3 points. On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et  $Y$  le nombre de points obtenus.

**a.** Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

**b.** Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

**2.** Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

**a.** Déterminer la loi de  $X$ .

**b.** Déterminer la loi de  $Y$ .

2. Pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,

$$\text{on pose } \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

**1.** Montrer que l'intégrale est bien définie et qu'il s'agit d'un produit scalaire.

**2.** Soit  $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta(P) = P'$ . On note  $\delta^*$  l'adjoint de  $\delta$ . Montrer que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta^*(P) = XP - P'$ .

**3.** On pose  $H_0 = 1$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, H_{k+1} = \delta^*(H_k)$ . Calculer  $H_1, H_2$  et  $H_3$ .

**4.** Montrer que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, \langle H_k, P \rangle = \langle H_0, P^{(k)} \rangle$ .

**5.** Montrer que  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$ .

1. (ccinp 39) On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$  converge.

**1. a.** Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ . Montrer que la série  $\sum x_n y_n$  converge.

**b.**  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

$\ell^2$  est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire (admis) :  $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ ,

pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ .

**2.** Soit  $p \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , on pose  $\varphi(x) = x_p$ . Montrer que  $\varphi$  est une forme linéaire et continue de  $\ell^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

**3.** Soit  $F$  l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini. Déterminer  $F^\perp$ , puis comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

2. On a deux urnes opaques. L'urne  $U$  contient  $n$  boules numéroté de 1 à  $n$ . L'urne  $V$  contient des boules blanches en proportion  $p$ .

On tire une boule dans l'urne  $U$  et on note  $X$  la variable aléatoire associée au numéro  $k$  de cette boule .

On tire  $k$  boules dans l'urne  $V$  et on note  $Y$  la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.

**1.** Reconnaitre la loi de  $X$ . Donnez son espérance et sa variance.

**2.** Calculez la loi de  $Y$ . Donnez son espérance

**3.** Calculez  $E(Y(Y - 1))$ , en déduire la variance de  $Y$ .

1. (ccinp 81) On définit sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  définie par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ . On admet que cela définit un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Donner une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .

3. Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .

4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

2. Soit  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$ .

1. Déterminer l'ensemble  $E$  de définition de  $f$ .

2.  $f$  est-elle continue sur  $E$  ?

3.  $f$  est-elle dérivable sur  $]0, +\infty[$  ?

4.  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  ?

1. (ccinp 11)

**1.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .

On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

**2.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$ .

**a.** Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .

**b.** Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $]0, +\infty[$ .

**2.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  avec  $\phi_A(M) = AM$ .

**1. a.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $\phi_{P(A)} = P(\phi_A)$ .

**b.** Montrer que  $A$  est diagonalisable ssi  $\phi_A$  est diagonalisable.

**c.** Si  $A$  diagonalisable et  $\lambda \in Sp(A)$  de multiplicité  $m$ . Alors montrer que  $\lambda \in Sp(\phi_A)$  et sa multiplicité est  $mn$ .

**2.** Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\phi_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  telle que  $\phi_{A,B}(M) = AMB$ .

**a.** Si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  et  $Y$  un vecteur propre de  $B^T$ , montrer que  $XY^T$  est un vecteur propre de  $\phi_{A,B}$ .

**b.** Montrer que si  $A$  et  $B$  diagonalisable alors  $\phi_{A,B}$  est diagonalisable. La réciproque est-elle vraie ?

1. (ccinp 45) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ .

**1. a.** Donner la caractérisation séquentielle de  $\overline{A}$ .

**b.** Montrer que si  $A$  est convexe, alors  $\overline{A}$  aussi.

**2.** On pose :  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

**a.** Soit  $x \in E$ . Montrer que :  $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$ .

**b.** On suppose que  $A$  est fermée et que :  $\forall x, y \in E, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$ . Montrer que  $A$  est convexe.

2. Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

**1.** Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$   $M$  est-elle diagonalisable ?

**2.** Soient  $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$  telles que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes. Quelle est la probabilité que  $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$  soit diagonalisable ?

**3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .  $\text{tr}(A^N)$  admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.