Bienvenue en classe de MP*. L'année de spé étant très courte (les concours débutent mi-avril), il faut être mobilisé dès le debut de l'année et être prêt à démarrer sur un rythme soutenu. Il est donc nécessaire d'avoir dès la rentrée des connaissances solides.
Afin de vous guider dans un programme de révision, voici ce document.

Tout d'abord il une première partie avec 38 exercices corrigés de la banque de CCINP des oraux. Cette banque comporte initialement 112 exercices couvrant le programme de sup et de spé. Lors de l'oral de CCINP, vous serez interrogés sur l'un de ces exercices et celui-ci est noté sur 8 points.
Ensuite il y a 20 questions de cours extraites des oraux de Centrale. Un oral de Centrale commence quasiment systématiquement par une question de cours, avec dans la majeure partie des cas la démonstration de celle-ci.
Enfin la troisième partie est constituée de 42 exercices plus ou moins courts, qui sont des exercices ou des techniques classiques à connaître.
La semaine de la rentrée, vous serez interrogés sur cet ensemble. L'interrogation comportera quelques questions de cours, dans lesquelles il faudra uniquement restituer des énoncés de théorèmes, puis un exercice de la banque CCINP, une question de cours de Centrale, un ou deux exercices de la partie III et enfin un exercice inconnu de niveau Mines/Télécom.
Il y aura au moins un exercice d'algèbre, un exerice d'analyse et un exercice de probabilité.

Les parties I et III vous permettront de réviser très largement le programme de sup et d'aborder sereinement la rentrée en spé.
Il est important de maîtriser au minimum les exercices de de la banque CCINP.

Ne vous y mettez pas au dernier moment, mais cependant réservez vous au moins un bon mois de vacances au début pour faire une vraie coupure et aborder la reprise du travail dans les meilleures dispositions.
Bon été et bon courage !

Nicolas Jacquet.

EXERCICE 3 analyse

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
   $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \mathrm{e}^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$
3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.
   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

   Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

   Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :
   $\forall\, x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right)$.
   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient : $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
   C'est-à-dire
   $$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x).$$
   Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$.
   On remarque également que $\dbinom{n}{0} = 1 = \dbinom{n+1}{0}$ et $\dbinom{n}{n} = 1 = \dbinom{n+1}{n+1}$.
   On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
   Donc (P_{n+1}) est vraie.

EXERCICE 4 analyse

Énoncé exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé exercice 4

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
   Alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
2. On pose $l = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim\limits_{h \to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
3. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|g(x)| \leqslant x^2$ donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.

   g est également dérivable en 0 car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} (g(x) - g(0)) = x \sin \left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Or $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ x \neq 0}} h \sin \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ car $|x \sin \left(\dfrac{1}{x}\right)| \leqslant |x|$.

   Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

   Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g'(x) = 2x \sin \left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos \left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   $2x \sin \left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (car $|2x \sin(\dfrac{1}{x})| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos \left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $\left(\ln n\right)^{\alpha} \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.

   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc
   $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
   f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
   $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,
$\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\dfrac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right)=2\ln n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=2\ln n+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\sim}1$, on en déduit que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}}{8}\times\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ converge.

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\varepsilon.\qquad(1)$

   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$.
   Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\dfrac{1-l}{2}$.
   Et donc, $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+l}{2}$.
   On pose $q=\dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q\in\,]0,1[$.
   On a alors $\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\leqslant qu_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant N}q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]0,1[$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.
   Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n > 0$.
   De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :
   $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. (*)
   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n > 0$.
   D'après (*), $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$. (**)
   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $\dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   $|u_n| = \dfrac{\sqrt{2} \ln n \sin(\dfrac{1}{n})}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

   On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

   D'après 1., $\sum\limits_{n \geqslant 2} |u_n|$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge absolument.

   De plus, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

EXERCICE 39 analyse

Énoncé exercice 39

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire [redacted] de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\ |\ )$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Corrigé exercice 39

1. (a) Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.

   Soit $(x, y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.
   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)

   [redacted]
3. On remarque déjà que $F \subset l^2$.
   Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.

On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.
C'est-à-dire $x = 0$.

Synthèse :
la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.

Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.
On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

EXERCICE 42 analyse

Énoncé exercice 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :
$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé exercice 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$.
   En effet, une primitive de $x \longmapsto \dfrac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\ln x$.
2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \longmapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.
   On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\dfrac{1}{2x}$.
   Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \longmapsto kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0, +\infty[$.
   Alors f est aussi solution de E sur $]0, +\infty]$.
   Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   De plus, comme f est solution de E sur $[0, +\infty[$ alors f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   Donc en particulier, f est continue en 0.
   Donc $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(kx^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \right) = 0$.
   f doit également être dérivable en 0.
   Or, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

EXERCICE 43 analyse

Enoncé exercice 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Corrigé exercice 43

On pose $f(x) = \text{Arctan}\, x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$
   Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\, x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
   Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
   Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
   Troisième cas : Si $u_1 = u_0$
   La suite (u_n) est constante.
   Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.
   On pose alors $g(x) = \text{Arctan}x - x$ et on étudie le signe de la fonction g.
   On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.
   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
   $\forall x \in \left]0, +\infty\right[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$, $g(x) > 0$.
   On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
   - Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est strictement décroissante.
   - Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
   - Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est strictement croissante.

   (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.
   Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.
   Premier cas : Si $u_0 > 0$
   L'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.
   Deuxième cas : Si $u_0 < 0$
   Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
   Troisième cas : Si $u_0 = 0$
   La suite (u_n) est constante.

   Conclusion : $\forall\, u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
   On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$.
   Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.
   De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
   On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

EXERCICE 44 analyse

Énoncé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Corrigé exercice 44

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.
   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
   $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
   $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$.
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini.
   On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
   Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Remarque :On peut aussi prouver que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :
   $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) D'après la question 1. ,
   $A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.
   $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.
   Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   Autre méthode :
   Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, alors par minimalité de $\overline{A \cap B}$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.
   $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

EXERCICE 46 analyse

Énoncé exercice 46

On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Corrigé exercice 46

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$ (*)

   $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).

   De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc par critère de domination, $\sum_{n\geqslant 1} O(\dfrac{1}{n^2})$ converge absolument donc converge.

   Donc d'après $(*)$, $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n\geqslant 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.

EXERCICE 55 analyse

Énoncé exercice 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Corrigé exercice 55

1. (a) Montrons que E est un sous-espace-vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).

   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \lambda v_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.
   Or $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda\,(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n)$
   c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a\,(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 4(ia - 1)\,(u_n + \lambda v_n)$
   ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.
   Donc $w \in E$.

   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

   (b) On considère l'application φ définie par :
   $$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$
   Par construction, φ est linéaire et bijective.
   Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.
2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   On introduit l'équation caractéristique (E) : $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.

   On a deux possibilités :
   — si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   — si (E) a une unique racine double r, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$
   avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

   Premier cas : $a = -2i$
   $r = a = -2i$ est racine double de (E).
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.
   On en déduit que $\alpha = \dfrac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

   Deuxième cas : $a \neq -2i$
   On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\,(2(a + i))^n + \beta\,(-2i)^n$.

   Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.
   On en déduit, après résolution, que $\alpha = \dfrac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \dfrac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

BANQUE ALGÈBRE

EXERCICE 59 algèbre

Énoncé exercice 59

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. [redacted]

Corrigé exercice 59

1. f est clairement linéaire. (*) De plus, $\forall\, P \in E \setminus \{0\}$, $\deg P' < \deg P$ donc $\deg(P - P') = \deg P$.
   Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall\, P \in E$, $\deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. (**)

   D'après (*) et (**), f est bien un endomorphisme de E.

   (a) Déterminons $\mathrm{Ker} f$.
   Soit $P \in \mathrm{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg(P - P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précéde, $\deg(P - P') = \deg P$ donc $\deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
   Donc f est injectif.

   Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.

   (b) Soit $e = (1, X, ..., X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc f est bijectif.

2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists\, ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q$, $P' - P'' = Q'$,..., $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.

3. [redacted]

EXERCICE 60 algèbre

Énoncé exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Corrigé exercice 60

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.
   Alors $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases}$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\mathrm{Ker} f$.
   De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.
   Donc (M_1, M_2) est une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
   Comme $\mathrm{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. (1)

   Prouvons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}$.
   On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
   Donc $M = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (2)

   Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

EXERCICE 62 algèbre

Énoncé exercice 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:

   [redacted]

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Corrigé exercice 62

1. f est linéaire donc :
   $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0 \Longleftrightarrow f \circ (f - \mathrm{Id}) = (f - \mathrm{Id}) \circ f = 2\mathrm{Id} \Longleftrightarrow f \circ (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = (\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) \circ f = \mathrm{Id}$.

   On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}$.

2. ([redacted]

   [redacted] **Analyse (unicité) :**
   Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Alors par linéarité de f, $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.
   On en déduit que $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.

   Synthèse (existence) :
   Soit $x \in E$. On pose $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.
   On a bien $x = a + b$. (*)
   $(f + \mathrm{Id})(a) = \dfrac{1}{3}\left(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(-f^2(x) + f(x) + 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. (**)

   $(f - 2\mathrm{Id})(b) = \dfrac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

   Conclusion : $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

3. Prouvons que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   $\exists\, x \in E \,/\, y = f(x) + x$.
   Alors $(f - 2\mathrm{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
   Donc $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   Donc $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (*)
   Posons $\dim E = n$.
   D'après 2., $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id})$.
   On en déduit que $\dim \mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$. (**)

   Donc, d'après (*) et (**), $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

EXERCICE 64 algèbre

Énoncé exercice 64

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Corrigé exercice 64

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)

   Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
   Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\, (a, b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)

   D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

   (b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

   Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.
   $\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
   Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)

   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

   Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

EXERCICE 71 algèbre

Énoncé exercice 71

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Corrigé exercice 71

1. $D = \mathrm{Vect}\left((1,2,3)\right)$.
   $(1,2,3)\notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.
   Donc $D\cap P=\{0\}$. (*)
   De plus, $\dim D+\dim P = 1+2=\dim\mathbb{R}^3$. (**)
   D'après (*) et (**), $\mathbb{R}^3 = P\oplus D$.
2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Par définition d'une projection, $p(u)\in P$ et $u-p(u)\in D$.
   $u-p(u)\in D$ signifie que $\exists\,\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u-p(u)=\alpha(1,2,3)$.
   On en déduit que $p(u)=(x-\alpha, y-2\alpha, z-3\alpha)$. (***)
   Or $p(u)\in P$ donc $(x-\alpha)+(y-2\alpha)+(z-3\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha=\dfrac{1}{6}(x+y+z)$.
   Et donc, d'après (***), $p(u)=\dfrac{1}{6}(5x-y-z, -2x+4y-2z, -3x-3y+3z)$.

   Soit $e=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit A la matrice de p dans la base e. On a $A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-2&4&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}$.
3. On pose $e_1'=(1,2,3)$, $e_2'=(1,-1,0)$ et $e_3'=(0,1,-1)$.
   e_1' est une base de D et (e_2',e_3') est une base de P.
   Or $\mathbb{R}^3=P\oplus D$ donc $e'=(e_1',e_2',e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   De plus $e_1'\in D$ donc $p(e_1')=0$. $e_2'\in P$ et $e_3'\in P$ donc $p(e_2')=e_2'$ et $p(e_3')=e_3'$.

   Ainsi, $M(p,e')=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 76 algèbre

Énoncé exercice 76

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Corrigé exercice 76

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x + \lambda y||^2$.
   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\,(x|y) + ||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|\,(x|y)\,| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$
   Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = (x|y)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $(x|y)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|\,(x|y)\,| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.

   Supposons que $|\,(x|y)\,| = ||x||\,||y||$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors x et y sont colinéaires.
   Deuxième cas : si $y \neq 0$
   Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
   C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(\,|\,)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
   Donc x et y sont colinéaires.

   Supposons que x et y soient colinéaires.
   Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
   Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
   $|\,(x|y)\,| = |\alpha|.|\,(y|y)\,| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
   Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
   $\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
   On pose $A = \left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$.
   $A \subset \mathbb{R}$.
   $A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).

De plus, $\forall\, f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.

On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.
Soit $f \in E$.

On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2$.

D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\displaystyle\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\,|\,)$ on obtient :

$\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

On en déduit que $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

Donc $m \geqslant (b-a)^2$.

Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.

Donc $m = (b-a)^2$.

EXERCICE 77 algèbre

Énoncé exercice 77

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Corrigé exercice 77

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A,\ x \in (A^{\perp})^{\perp}$.

   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.
   De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A$. (**)

   D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.

   Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.
   Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $y \in F + G$.
   Alors $\exists\, (f,g) \in F \times G$ tel que $y = f + g$.
   $$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^{\perp}}} = 0.$$
   Donc $\forall\, y \in (F+G)$, $(x \mid y) = 0$.
   Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

   Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
   $\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F + G$.
   Donc $x \in F^{\perp}$.
   De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F + G$.
   Donc $x \in G^{\perp}$.
   On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   (b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp} = F \cap G$.
   Donc $\left(\left(F^{\perp} + G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
   C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

EXERCICE 79 algèbre

Énoncé exercice 79

Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g)\in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corrigé exercice 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
   On pose $\forall\,x\in[a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\,x\in[a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)

   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.
   Donc $\forall\,x\in[a,b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\,x\in[a,b]$, $h(x) = 0$.
2. On pose $\forall\,(f,g)\in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f\in E$. $(f|f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.
   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a<b$ donc $(f|f)\geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f\in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x\longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

EXERCICE 80 algèbre

Énoncé exercice 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé exercice 80

1. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\,|\,)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\,|\,)$ est symétrique.
   On en déduit que $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)

   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est positive. (**)

   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(\,|\,)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^{\perp}$ (car $F = \mathrm{Vect}(f, g)$).

   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

EXERCICE 81 algèbre

Énoncé exercice 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\operatorname{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Corrigé exercice 81

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \operatorname{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

EXERCICE 82 algèbre

Énoncé exercice 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Corrigé exercice 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = (a + a')a'' + (b + b')b'' + (c + c')c'' + (d + d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha\,(A|B)$.
   On en déduit que $(. | .)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(. | .)$ est symétrique.
   Donc $(. | .)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.
   $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(. | .)$ est positive. (**)

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.
   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(. | .)$ est définie. (***)

   D'après (*), (**) et (***), $(. | .)$ est un produit scalaire sur E.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\forall (a, b, d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 0$.

   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A, F) = ||A - p_F(A)|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|| = 1$.

EXERCICE 84 algèbre

Énoncé exercice 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Corrigé exercice 84

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   Un argument de z est un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
   Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   On a $z^n = 1 \iff \left\{\begin{array}{c} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \mod 2\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$
   Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [0, 2\pi[$.
   Or $\begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}$ est injective.
   Donc, $\left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ est constitué de n solutions distinctes de l'équation $z^n = 1$.
   Les solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres.
   Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$,

$$\begin{aligned}(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \quad &\iff \quad \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \\ &\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \\ &\iff \quad \exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

   En remarquant que $z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \quad \iff \quad \exists\, k \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1}$$

   En écrivant $\mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} - 1} = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}} = \mathrm{i}\,\dfrac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, on voit que les solutions sont des réels.

   On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ alors $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A, B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-\mathrm{i}$, c'est-à-dire à la droite des réels.

EXERCICE 85 algèbre

Énoncé exercice 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Corrigé exercice 85

1. (a) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   (b)

$$\begin{aligned}
a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r Q \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i} \\
&\iff \exists (q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k
\end{aligned}$$

   D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \ldots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\
&\iff a = -4 \text{ et } b = 3
\end{aligned}$$

   On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

EXERCICE 86 algèbre

Énoncé exercice 86

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Corrigé exercice 86

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists (u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists (u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :
   $\underbrace{(u_1 u_2 p + u_1 v_2 b + u_2 v_1 a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1 v_2)}_{\in \mathbb{Z}}(ab) = 1$.
   Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$.
   Donc $\binom{p}{k}k! = p(p-1)...(p-k+1)$.
   donc $p \mid \binom{p}{k}k!$. (3)
   Or, $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow p \mid \binom{p}{k}$.
   (b) Procédons par récurrence sur n.
   Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \mod p$ soit vérifiée.
   Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k + 1$. (4)
   Or $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$ donc $p \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$.
   Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n+1 \mod p$ et (P_{n+1}) est vraie.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n.
   Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
   La question précédente donne p divise $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$.
   Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
   Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. (petit théorème de Fermat).

EXERCICE 87 algèbre

Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0,n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{array}{lll} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
Montrons que $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.

   Si $P \in \mathrm{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$.
Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.

   La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :
$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0,n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$

   Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$

   La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :
$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.

   Les polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$

   Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 89 algèbre

Énoncé exercice 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Corrigé exercice 89

1. On pose $Z = z^k - 1$.
   $Z = e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}\,2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

   c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2})}$

   Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\,\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) > 0$.

   Donc le module de Z est $2\,\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\dfrac{k\pi}{n} + \dfrac{\pi}{2}$.

2. On remarque que pour $k = 0$, $|z^k - 1| = 0$ et $\sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right) = 0$.

   Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$.

   S est donc la partie imaginaire de $T = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}\,\dfrac{k\pi}{n}}$.

   Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1 - e^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}}} = \dfrac{4}{1 - e^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}}}$.

   Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   On en déduit que $T = \dfrac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\,\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\ \mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\dfrac{\pi}{2n}}$.

   En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ ($n \geqslant 2$), on en déduit que $S = \dfrac{2}{\tan\dfrac{\pi}{2n}}$.

EXERCICE 90 algèbre

Énoncé exercice 90

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\},\ L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Corrigé exercice 90

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.

   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
   Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.

   Enfin, $\dim\big(\mathbb{K}_2[X]\big) = \dim\big(\mathbb{K}^3\big) = 3$ donc Φ est bijective.

   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
   Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $\big(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)\big) = (1,0,0)$.
   Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X - a_2)(X - a_3) \,|\, L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X - a_2)(X - a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = (1,3,1)$.
   Par bijectivité de Φ et d'après 3. , l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
   On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
   Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

EXERCICE 92 algèbre

Énoncé exercice 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

Corrigé exercice 92

1. $\langle\,,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
$\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}\big(\big(A^T B\big)^T\big) = \mathrm{tr}(B^T A) = \langle B\,, A\rangle$.
Donc $\langle\,,\rangle$ est symétrique.
On en déduit que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
$\langle A\,, A\rangle = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (A^T A)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (A^T)_{i,k} A_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$ donc $\langle A\,, A\rangle \geqslant 0$.
Donc $\langle\,,\rangle$ est positive. (2)

   Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$ telle que $\langle A\,, A\rangle = 0$.
Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_{k,i}^2 \geqslant 0$.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$.
Donc $\langle\,,\rangle$ est définie. (3)

   D'après (1),(2) et (3), $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   Remarque importante : Soit $(A, B) \in E^2$.
On pose $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Alors $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum\limits_{i=1}^{n} (A^T B)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \left(A^T\right)_{i,k} B_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{k,i} B_{k,i}$.
Donc $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)

   Soit $M \in E$.
Posons $S = \dfrac{M + M^T}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2}$.
On a $M = S + A$.
$S^T = \left(\dfrac{M + M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T + (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
$A^T = \left(\dfrac{M - M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T - (M^T)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. (2)

D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall\, A \in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S\,, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S\,, A\rangle = \mathrm{tr}(S^TA) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^TS) = -\mathrm{tr}(A^TS) = -\langle A\,, S\rangle = -\langle S\,, A\rangle$.
Donc $2\langle S\,, A\rangle = 0$ soit $\langle S\,, A\rangle = 0$.

On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ (1)

De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$. (2)

D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :
$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
On a alors $F = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2}, ..., E_{n,n})$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^\perp \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle M\,, E_{i,i}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,i} = 0$.
Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}\Big(E_{i,j} \text{ telles que } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\Big)$.
En d'autres termes, $F^\perp$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

EXERCICE 94 algèbre

Énoncé exercice 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.

   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{ccll} x & \equiv & 6 & [17] \\ x & \equiv & 4 & [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Corrigé exercice 94

1. Théorème de Bézout :
   Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
   $a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c \text{ et } b|c$.
   Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ c = kab$.
   Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.

   Prouvons que $(a|c \text{ et } b|c) \Longrightarrow ab|c$.
   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$. (1)
   De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_1 a$. (2)
   De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_2 b$. (3)
   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.

   On a donc prouvé que $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. (a) **Première méthode** (méthode générale) :
   Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} x \text{ solution de} (S) &\Longleftrightarrow \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{array}\right. \end{aligned}$$

   Or $6 + 17k = 4 + 15k' \Longleftrightarrow 15k' - 17k = 2$.
   Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$.
   Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.
   17 et 15 sont premiers entre eux.
   Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.
   On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.
   Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$
   Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$

   Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.

   On peut prendre alors $k_0' = 16$ et $k_0 = 14$.
   Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S).

   Deuxième méthode :
   En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
   Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

(b) x_0 solution particulière de (S) donc $\left\{\begin{array}{lll} x_0 & = & 6 \quad [17] \\ x_0 & = & 4 \quad [15] \end{array}\right.$.

On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\left\{\begin{array}{lll} x-x_0 & = & 0 \quad [17] \\ x-x_0 & = & 0 \quad [15] \end{array}\right.$

c'est-à-dire x solution de $(S) \Longleftrightarrow (17|x-x_0$ et $15|x-x_0)$.
Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de (S) $\Longleftrightarrow (17 \times 15)|x-x_0$.

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

BANQUE PROBABILITÉS

EXERCICE 95 probabilités

Énoncé exercice 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 95

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\dfrac{4}{5}$).
La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5, \dfrac{1}{5})$.

   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et : $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(X=k) = \binom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   Donc, d'après le cours, $E(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ et $V(X) = 5 \times \dfrac{1}{5} \times \left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

   (b) D'après les hypothèses, on a $Y = 2X - 3(5-X)$, c'est-à-dire $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,5]\!]\}$.

   Et on a $\forall\, k \in [\![0,5]\!]$, $P(Y = 5k-15) = P(X=k) = \binom{5}{k}(\dfrac{1}{5})^k(\dfrac{4}{5})^{5-k}$.

   $Y = 5X - 15$, donc $E(Y) = 5E(X) - 15 = 5 - 15 = -10$.

   De même, $Y = 5X - 15$, donc $V(Y) = 25V(X) = 25 \times \dfrac{4}{5} = 20$.

2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
   (a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X.
$X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
L'univers Ω correspond à l'ensemble des tirages possibles dans A.
Il est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A.
Donc $\operatorname{card} \Omega = \dbinom{10}{5}$.

   Soit $k \in [\![0,2]\!]$.
L'événement $(X = k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne.
Notons A_k l'ensemble des parties à 5 éléments de A contenant k boules blanches et $(5-k)$ boules noires.

Il y a $\dbinom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\dbinom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.
C'est-à-dire, $\operatorname{card}A_k = \dbinom{2}{k}\dbinom{8}{5-k}$.

Donc, comme tous les tirages sont équiprobables, $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(X=k) = \dfrac{\operatorname{card}A_k}{\operatorname{card}\Omega} = \dfrac{\dbinom{2}{k}\times\dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y = 5X - 15$.
On en déduit que $Y(\Omega) = \{5k - 15 \text{ avec } k \in [\![0,2]\!]\}$.
Et on a $\forall\, k \in [\![0,2]\!]$, $P(Y = 5k-15) = P(X=k) = \dfrac{\dbinom{2}{k}\times\dbinom{8}{5-k}}{\dbinom{10}{5}}$.

EXERCICE 98 probabilités

Énoncé exercice 98

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n, p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
   Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels.
   Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$.

   Donc $P(Y = k | X = i) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   (b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i | X = i) P(X = i)$.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

   Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   Donc $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

   Donc d'après le binôme de Newton,

   $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\dfrac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

   On vérifie que $1 - p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :

   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors :
$E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\,(1-p(2-p)) = np(2-p)(p-1)^2$.

EXERCICE 99 probabilités

Énoncé exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi [redacted].
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in \left]0, +\infty\right[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Corrigé exercice 99

1. Soit $a \in \left]0, +\infty\right[$. Pour toute variable aléatoire X [redacted], on a :
   $P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont indépendantes et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i \in L^2$.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

EXERCICE 104 probabilités

Énoncé exercice 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 104

1. $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
2. (a) Pour que l'événement $(X=2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
   De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
   Donc $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   (b) Déterminons $P(X=1)$.
   Pour que l'événement $(X=1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
   Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

   Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
   On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».
   On a alors $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$.
   On a $\forall\, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Donc $P(X=1) = \binom{3}{1} P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.
   Donc
   $P(X=1) = 3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 2\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.
   Donc $P(X=1) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

   Enfin, $P(X=0) = 1 - P(X=2) - P(X=1)$ donc $P(X=0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.
   Donc $P(X=0) = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega = 3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.

(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2) = \dfrac{3}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc 2^n-2 applications.
D'où $P(X=1) = \dfrac{3\times(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{1}{3^{n-1}}\,(2^n-2)$.

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0) = 1-P(X=2)-P(X=1)$ donc
$P(X=0) = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X) = 0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2) + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

   Donc $E(X) = 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

   (b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.
   Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

EXERCICE 105 probabilités

Énoncé exercice 105

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 105

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
   Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
   Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$.

   Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0})P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)

   Or $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

   Donc $P(B) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (2).

   (1) et (2) donnent le résultat souhaité.
2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
   Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
   Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.

   Alors, d'après la formule de Bayes, on a :

   $$P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
   $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

   On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

   On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
   Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.

   On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.

   Alors d'après la formule de Bayes, on a :

$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T)P_T(A)}{P_T(A)P(T) + P_{\overline{T}}(A)P\left(\overline{T}\right)}$$

Donc $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \times \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

EXERCICE 109 probabilités

Énoncé exercice 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Corrigé exercice 109

1. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
$\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
$\forall\, i \in [\![1,2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\text{card}(\Omega) = (n+2)!$.

   $(X=1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X=2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.

   $(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X=3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

   Autre méthode :
Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.
$X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.

   $(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X=1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n+2}$.

   $(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".
D'où $P(X=2) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

   $(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X=3) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

L'événement $(Y = k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.

Donc $P(Y = k) = \dfrac{\dbinom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$

Donc $P(Y = k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.

Autre méthode :
$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
On a : $(Y = k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y = k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.

$P(Y = k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{(n+2)-1} \times \dfrac{n-2}{(n+2)-2} \times ... \times \dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$

$P(Y = k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{n+1} \times \dfrac{n-2}{n} \times ... \times \dfrac{n-k+2}{n-k+4} \times \dfrac{2}{n-k+3}$.

$P(Y = k) = 2\,\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times \dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.

$P(Y = k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

EXERCICE 112 probabilités

Énoncé exercice 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Corrigé exercice 112

1. On note $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On pose $F_p = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\right\}$.
   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathcal{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall\, p \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

   Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, ..., F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

   Conclusion : $a = 3^n$.

   Autre méthode :
   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   À tout couple (A, B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :
   $$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$

   On note $\mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.
   Le résultat en découle.
2. $\left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\}$.

   $$\begin{aligned} \text{Or card } \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} &= \text{card } \left\{(A, \overline{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} \\ &= \text{card } \left\{(A, C) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\right\} \\ &= a. \end{aligned}$$

   Donc $b = a$.
3. Compter tous les triplets (A, B, C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.

   En d'autres termes, $c = \operatorname{card} \left\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \emptyset\right\} = b = 3^n$.

II-Questions de cours Centrale

1. Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes.
   Montrer que $\deg(A+B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$, et donner un exemple où l'inégalité est stricte.
   1^er cas : $\deg A \neq \deg B$. Sans perte de généralité, posons $n = \deg A > \deg B = m$. Écrivons
   $$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \quad B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k.$$
   Alors
   $$A + B = \sum_{k=0}^{m}(a_k + b_k)X^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k X^k,$$
   donc $\deg(A + B) = n = \deg A = \max(\deg A, \deg B)$.
   2^ème cas : $\deg A = \deg B = n$. On a
   $$A + B = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)X^k,$$
   d'où $\deg(A + B) \leq n = \max(\deg A, \deg B)$.
   On considère $A = X^2$ et $B = -X^2 + X$. On a $\deg A = \deg B = 2$, mais $A + B = X$ donc $\deg(A + B) = 1 < 2 = \max(\deg A, \deg B)$.
2. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre d'un espace préhilbertien.
   Soient $x, y \in E$.
   Cas où $y = 0$ Si $y = 0$, on a $\langle x, 0\rangle = 0$ et $\|x\|\|0\| = 0$. L'inégalité est trivialement vérifiée (c'est une égalité).
   Cas où $y \neq 0$ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par positivité du produit scalaire, on a :
   $$\|x + \lambda y\|^2 \geq 0$$
   En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, développons cette expression :
   $$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geq 0$$
   Ce qui se réécrit sous la forme d'un polynôme du second degré en λ (car $\langle y, y\rangle \neq 0$) :
   $$\|y\|^2\lambda^2 + 2\langle x, y\rangle\lambda + \|x\|^2 \geq 0$$
   Puisque ce polynôme est de signe constant (positif ou nul) sur tout $\mathbb{R}$, son discriminant Δ doit être négatif ou nul :
   $$\Delta = 4(\langle x, y\rangle^2 - \|y\|^2\|x\|^2) \leq 0$$
   On en déduit immédiatement :
   $$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$
   En passant à la racine carrée, on obtient l'inégalité recherchée :
   $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Montrer que f est nulle.
   Supposons par l'absurde que la fonction f ne soit pas identiquement nulle sur $[a, b]$.
   Comme f est positive, cela signifie qu'il existe un point $c \in [a, b]$ tel que :
   $$f(c) > 0$$

Posons $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$. Par continuité de f au point c, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [a, b]$:

$$|t - c| \leq \alpha \implies |f(t) - f(c)| \leq \varepsilon$$

En particulier, pour ces réels t, on a $f(t) \geq f(c) - \varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$.

On définit un segment $[\gamma, \delta] \subset [a, b]$ d'intérieur non vide ($\gamma < \delta$) de la manière suivante :

- Si $c \in]a, b[$, on peut choisir $\gamma = \max(a, c - \alpha)$ et $\delta = \min(b, c + \alpha)$.
- Si $c = a$, on choisit $\gamma = a$ et $\delta = \min(b, a + \alpha)$.
- Si $c = b$, on choisit $\gamma = \max(a, b - \alpha)$ et $\delta = b$.

Sur ce segment $[\gamma, \delta]$, on a par construction :

$$\forall t \in [\gamma, \delta], \quad f(t) \geq \frac{f(c)}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale, on peut découper l'intégrale sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\delta^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque f est positive sur $[a, b]$, les intégrales sur $[a, \gamma]$ et $[\delta, b]$ sont positives ou nulles. On a donc la minoration :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par croissance de l'intégrale, en minorant f par la constante positive $\dfrac{f(c)}{2}$ sur $[\gamma, \delta]$, il vient :

$$\int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_\gamma^\delta \frac{f(c)}{2}\,\mathrm{d}t = (\delta - \gamma)\frac{f(c)}{2}$$

Comme $\gamma < \delta$ et $f(c) > 0$, le produit $(\delta - \gamma)\dfrac{f(c)}{2}$ est strictement positif. On en déduit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq (\delta - \gamma)\frac{f(c)}{2} > 0$$

Ceci génère une contradiction flagrante avec l'hypothèse $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

L'hypothèse initiale est donc absurde : la fonction f est nécessairement nulle sur $[a, b]$.

4. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

Soit $[a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ ($a \leq b$) et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

- Par l'absurde, supposons que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des valeurs de f n'est pas majoré par n, donc il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car contenue dans le segment $[a, b]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un réel ℓ. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, alors en passant à la limite $a \leq \ell \leq b$. La fonction f étant continue en ℓ, la suite image $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$. Or, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$. C'est une contradiction directe avec la convergence vers la valeur finie $f(\ell)$. Ainsi, f est majorée. De même on montre que f est minorée.

- L'ensemble $f([a,b])$ est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Par caractérisation de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un élément $y_n \in [a,b]$ tel que $M - \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M$. De la même manière que précédemment, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on peut donc en extraire une sous-suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un certain $x_M \in [a,b]$. Par encadrement, on a $\lim_{n\to+\infty} f(y_{\psi(n)}) = M$. La continuité de f en x_M assure d'autre part que $\lim_{n\to+\infty} f(y_{\psi(n)}) = f(x_M)$. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x_M) = M$, ce qui prouve que la borne supérieure est atteinte. Le raisonnement est identique pour la borne inférieure.

5. Sommes de Riemann : soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt$.

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
   On pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
   Posons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, pour $k \in [\![0,n]\!]$. Alors
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}.$$
   Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la subdivision régulière
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
   Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, le théorème de Heine assure que f est uniformément continue sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
   Par la relation de Chasles, on peut écrire l'intégrale sous la forme :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   De plus, comme $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathrm{d}t = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, on a également la réécriture suivante pour la somme de Riemann :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}t$$
   Par inégalité triangulaire, on estime l'écart entre l'intégrale et la somme de Riemann :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\,\mathrm{d}t$$
   On choisit alors $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} \leq \alpha$. Pour tout $n \geq N$, le pas de la subdivision vérifie $\frac{b-a}{n} \leq \alpha$.
   Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a :
$$|t - x_k| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$$

L'uniforme continuité de f implique alors que $|f(t) - f(x_k)| \leq \varepsilon$. En injectant ce contrôle dans la sommation, il vient pour tout $n \geq N$:

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon \frac{b-a}{n} = \varepsilon(b-a)$$

On a montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S_n \right| \leq \varepsilon(b-a)$.

Par définition de la limite, on en conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Dans $\mathbb{C}[X]$, donner et démontrer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \geq 1$. On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ses racines distinctes de multiplicités respectives $\mu_1, \ldots, \mu_r$, de sorte que :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ et } \sum_{k=1}^{r} \mu_k = n$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$ est définie par l'égalité suivante :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\mu_k}{X - \alpha_k}$$

En appliquant la formule de dérivation d'un produit de r facteurs, on obtient :

$$P' = \lambda \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_j (X - \alpha_j)^{\mu_j - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k} \right)$$

En formant le quotient de P' par P, il vient :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\lambda \mu_j (X - \alpha_j)^{\mu_j - 1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k}}{\lambda \prod\limits_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k}}$$

Pour chaque terme de la somme, on simplifie les facteurs communs du numérateur et du dénominateur. Plus précisément, pour un indice j fixé, le produit $\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k}$ se simplifie intégralement, et le quotient $\dfrac{(X - \alpha_j)^{\mu_j - 1}}{(X - \alpha_j)^{\mu_j}}$ se réduit à $\dfrac{1}{X - \alpha_j}$.
On obtient donc immédiatement :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\mu_j}{X - \alpha_j}$$

7. Formuler et démontrer le théorème des égalités des accroissements finis.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Considérons la fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = f(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

- g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues.
- g est dérivable sur $]a, b[$ et pour tout $t \in]a, b[$:

$$g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Calculons les valeurs aux bornes : $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. On a donc $g(a) = g(b)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Ce qui donne :

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

8. Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$. On note X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite de X convergeant vers la borne inférieure de X. Réciproquement, prouver que si une suite de X converge vers un minorant m de X, alors m est la borne inférieure de X.

Soit X une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Le réel $g = \inf(X)$ est caractérisé par :

(a) $\forall x \in X, \quad g \leq x$

(b) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in X, \quad x < g + \varepsilon$

Soit X une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Posons $g = \inf(X)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la propriété d'approximation de la borne inférieure avec $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$. Il existe alors un élément $x_n \in X$ tel que :

$$x_n < g + \frac{1}{n}$$

Comme g est un minorant de X, on a de plus $g \leq x_n$. On obtient ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement :

$$g \leq x_n < g + \frac{1}{n}$$

Par le théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(g + \dfrac{1}{n} \right) = g$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de X qui converge vers $g = \inf(X)$.

Montrons la réciproque.
Par hypothèse, m est déjà un minorant de X, ce qui valide le premier point de la définition de la borne inférieure.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers m, par définition de la limite, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |x_n - m| < \varepsilon$$

En particulier, pour le rang $n = N$, on obtient :

$$-\varepsilon < x_N - m < \varepsilon \implies x_N < m + \varepsilon$$

Comme la suite est à valeurs dans X, l'élément x_N appartient bien à X.
On a donc réussi à trouver un élément $x_N \in X$ vérifiant $x_N < m + \varepsilon$. Les deux conditions caractéristiques de la borne inférieure étant satisfaites, on conclut que :

$$m = \inf(X)$$

9. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Par hypothèse, la série converge, ce qui implique que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie notée $S \in \mathbb{C}$.
Pour tout entier $n \geq 1$, on a la relation :

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

Par opération algébrique sur les limites de suites convergentes, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend donc vers 0. La réciproque est généralement **fausse**.

Le contre-exemple le plus célèbre est celui de la **série harmonique**. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. On a bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Rappelons la preuve.
Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ une fonction décroissante, continue et positive sur $]0, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a par décroissance de f :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[k, k+1]$, on en déduit :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$$

En utilisant la partie droite de l'inégalité, on a $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. En sommant pour k allant de 1 à n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n+1)$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ díverge vers $+\infty$.

10. Démontrer le théorème de Heine.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (avec $a \leq b$). Alors f est **uniformément continue** sur $[a, b]$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Supposons par l'absurde que f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$.

La négation de la propriété s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x - y| \leq \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, il existe un couple d'éléments $(x_n, y_n) \in [a, b]^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est contenue dans le segment $[a,b]$, elle est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que la suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel c. En passant à la limite dans $a \leq x_{\varphi(k)} \leq b$, on a de plus $c \in [a,b]$.
On rappelle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi(k) \geq k$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité $|x_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k)}| \leq \dfrac{1}{\varphi(k)} \leq \dfrac{1}{k}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} (x_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k)}) = 0$.
Puisque $y_{\varphi(k)} = x_{\varphi(k)} - (x_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k)})$, la suite $(y_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge également vers c.
La fonction f étant continue au point c, la caractérisation séquentielle de la continuité donne :

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{\varphi(k)}) = f(c) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} f(y_{\varphi(k)}) = f(c)$$

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |f(x_{\varphi(k)}) - f(y_{\varphi(k)})| = 0$.
Cependant, par construction, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'inégalité $|f(x_{\varphi(k)}) - f(y_{\varphi(k)})| > \varepsilon$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$.
L'hypothèse de négation est donc réfutée, la fonction f est bien uniformément continue sur $[a,b]$.

11. Énoncer et démontrer la caractérisation du rang par des matrices extraites.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.
Le rang de A est égal à la plus grande taille d'une sous-matrice extraite inversible de A.
Autrement dit, $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si :
   (a) Il existe au moins une sous-matrice extraite de A de taille $r \times r$ qui soit inversible.
   (b) Toute sous-matrice extraite de A de taille $k \times k$ avec $k > r$ est non inversible (son déterminant est nul).

Notons $r = \mathrm{rg}(A)$. Le cas $A = 0$ étant trivial ($r = 0$ et aucune sous-matrice extraite n'est inversible), on suppose $r \geq 1$. La démonstration se déroule en deux étapes.
Par définition, le rang de A est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A.
Puisque $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)) = r$, on peut extraire de la famille $(C_1, \ldots, C_p)$ une famille libre de r colonnes. Quitte à rénommer les colonnes de A (ce qui revient à multiplier A à droite par une matrice de permutation, préservant le rang), on peut supposer que les r premières colonnes $C_1, \ldots, C_r$ forment une famille libre.
Considérons la matrice $A_1 \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ formée par ces r premières colonnes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_r \end{pmatrix}$$

Par construction, $\mathrm{rg}(A_1) = r$. Le rang d'une matrice étant aussi égal au rang de sa transposée (le rang des lignes est égal au rang des colonnes), le système des lignes de A_1 contient une famille libre de r lignes.
Quitte à rénommer les lignes de A (ce qui revient à multiplier A à gauche par une matrice de permutation), on peut supposer que les r premières lignes de A_1 sont linéairement indépendantes.
La sous-matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ située à l'intersection des r premières lignes et des r premières colonnes de A possède donc r lignes linéairement indépendantes. Ainsi, $\mathrm{rg}(B) = r$.
B étant une matrice carrée d'ordre r et de rang r, elle est donc inversible.
Soit $k > r$. Considérons une sous-matrice carrée quelconque M de A de taille $k \times k$. Elle est obtenue en sélectionnant k lignes et k colonnes de A.
Notons $C'_1, \ldots, C'_k$ les colonnes de la matrice A restreintes aux k indices sélectionnés. Ces vecteurs appartiennent à l'espace engendré par les colonnes de A, dont la dimension est r.
La famille de ces k vecteurs est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension r. Puisque $k > r$, cette famille est nécessairement liée.
Il existe donc une combinaison linéaire non triviale de ces colonnes restreintes qui est nulle. Par

conséquent, les colonnes de la sous-matrice M forment une famille liée dans $\mathbb{K}^k$.
On en déduit que $\mathrm{rg}(M) < k$, et donc que la matrice M n'est pas inversible (son déterminant est nul).

12. Soit E un espace euclidien. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel F, on a : $E = F \oplus F^\perp$.
Notons $n = \dim(E)$. Pour démontrer que $E = F \oplus F^\perp$, nous devons vérifier deux points : la somme est directe, puis elle engendre E.

1. Intersection : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$

Soit $x \in F \cap F^\perp$.
- Puisque $x \in F^\perp$, par définition de l'orthogonal, x est orthogonal à tous les vecteurs de F.
- En particulier, comme $x \in F$, x est orthogonal à lui-même.

On a donc :
$$\langle x, x\rangle = 0$$
Par caractère défini positif du produit scalaire, on en déduit immédiatement que :
$$x = 0_E$$
L'intersection est donc réduite au vecteur nul, ce qui prouve que la somme $F + F^\perp$ est directe.

2. Somme : $E = F + F^\perp$

Puisque F est un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie, F est lui-même de dimension finie. Notons $p = \dim(F)$.
Comme F est aussi un espace euclidien, F admet une base orthonormée, que l'on note $(e_1, \ldots, e_p)$.
Soit $x \in E$. Introduisons le vecteur $p_F(x)$ défini par :
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$$
Par construction, $p_F(x)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la base de F, donc $p_F(x) \in F$.
Posons maintenant $y = x - p_F(x)$, de sorte que $x = p_F(x) + y$. Montrons que $y \in F^\perp$.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, calculons le produit scalaire $\langle y, e_j\rangle$:
$$\langle y, e_j\rangle = \langle x - p_F(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle p_F(x), e_j\rangle$$
Par linéarité du produit scalaire :
$$\langle p_F(x), e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle$$
La base $(e_1, \ldots, e_p)$ étant orthonormée, on a $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$ (où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). Le seul terme non nul de la somme est donc obtenu pour $i = j$:
$$\langle p_F(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$$
On en déduit :
$$\langle y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0$$
Le vecteur y est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F, il est donc orthogonal à tout vecteur de F. Ainsi, $y \in F^\perp$.
Tout vecteur $x \in E$ se décompose sous la forme $x = p_F(x) + y$ avec $p_F(x) \in F$ et $y \in F^\perp$.
Ce qui prouve que $E = F + F^\perp$. Comme la somme est directe, on a bien :
$$E = F \oplus F^\perp$$

13. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Vérifions successivement les quatre propriétés caractéristiques.

1. Symétrie

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\phi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \phi(Q,P)$$

L'application ϕ est donc symétrique.

2. Bilinéarité

Par symétrie, il suffit de démontrer la linéarité par rapport à la première variable.
Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \big(\lambda P_1(t)Q(t) + P_2(t)Q(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^1 P_1(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 P_2(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\phi(P_1,Q) + \phi(P_2,Q)
\end{aligned}$$

L'application est donc bilinéaire.

3. Positivité

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\phi(P,P) = \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $P(t)^2 \geq 0$. Les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant $(0 < 1)$, la positivité de l'intégrale assure que :

$$\phi(P,P) \geq 0$$

L'application ϕ est donc positive.

4. Caractère défini

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(P,P) = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

L'application $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$. L'intégrale d'une fonction continue, positive, sur un segment de longueur non nulle n'est nulle que si la fonction est identiquement nulle. On a donc :

$$\forall t \in [0,1], \quad P(t)^2 = 0 \implies \forall t \in [0,1], \quad P(t) = 0$$

Le polynôme P admet ainsi une infinité de racines. Le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul, d'où :

$$P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

L'application ϕ est définie.

14. Montrer que toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.

Procédons par l'absurde. Si f n'est pas strictement monotone, on peut trouver quatre points $x, y, z, u \in I$ tels que :

$$x < y \text{ et } f(x) < f(y)$$

$$z < u \text{ et } f(z) > f(u)$$

Considérons l'application $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = f\big(tx + (1-t)z\big) - f\big(ty + (1-t)u\big)$$

Comme I est un intervalle, alors : $\forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)z \in I, \quad \text{et} \quad ty + (1-t)u \in I$. La fonction φ est continue sur $[0,1]$ par composition et différence d'applications continues.

Evaluons φ aux bornes :

- $\varphi(1) = f(x) - f(y) < 0$
- $\varphi(0) = f(z) - f(u) > 0$

Puisque $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont de signes opposés, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, soit :

$$f\big(t_0 x + (1-t_0)z\big) = f\big(t_0 y + (1-t_0)u\big)$$

L'injectivité de f impose l'égalité des antécédents :

$$t_0 x + (1-t_0)z = t_0 y + (1-t_0)u \implies t_0(x-y) = (1-t_0)(u-z)$$

Or, $t_0 > 0$ et $x - y < 0$ donc le membre de gauche est strictement négatif.
De même, $1 - t_0 > 0$ et $u - z > 0$ donc le membre de droite est strictement positif.
Cette contradiction conclut la démonstration.

15. Montrer que fonction lipschitzienne est continue.

Soit $x_0 \in I$. Montrons que f est continue en x_0.
Soit $\varepsilon > 0$.

- **Cas $k = 0$:** Pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| = 0$, donc f est constante sur I. Une fonction constante est partout continue, n'importe quel réel $\alpha > 0$ convient.
- **Cas $k > 0$:** Posons $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k}$. On a bien $\alpha > 0$ car $\varepsilon > 0$ et $k > 0$.
  Soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$. Par l'hypothèse de Lipschitz, il vient :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| \leq k\alpha = k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Dans chaque cas, on a trouvé un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
L'application f est donc continue en x_0. Ce résultat étant général pour tout $x_0 \in I$, la fonction f est continue sur I.

16. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit $x \in E$. Exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormée de F et justifier la formule.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F.
Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur F, notée $p_F(x)$, s'exprime par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Par définition, le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique vecteur de E vérifiant les deux conditions :

(a) $p_F(x) \in F$

(b) $(x - p_F(x)) \in F^\perp$

Vérifions que le vecteur défini par la formule répond à ces deux critères.

Le vecteur $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ est exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. Comme ces vecteurs appartiennent tous à F et que F est un sous-espace vectoriel, leur combinaison linéaire appartient nécessairement à F.

Posons $y = x - p_F(x)$. Pour montrer que $y \in F^\perp$, il suffit de vérifier que y est orthogonal à chacun des vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Calculons le produit scalaire $\langle y, e_j \rangle$:

$$\langle y, e_j \rangle = \left\langle x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle$$

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable, on obtient :

$$\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant orthonormée, on a la relation $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon). Par conséquent, tous les termes de la somme s'annulent sauf pour l'indice $i = j$:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$$

On aboutit alors à :

$$\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0$$

Le vecteur $x - p_F(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F, il appartient donc à $F^\perp$.

Par unicitét du vecteur vérifiant ces propriétés, la formule de la projection orthogonale est démontrée.

17. Soit E un ensemble et A et B deux parties finies de E. Montrer que : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Pour démontrer ce résultat, on décompose l'ensemble $A \cup B$ en réunions d'ensembles disjoints afin d'utiliser la propriété d'additivité du cardinal.

Remarquons tout d'abord que l'on peut écrire $A \cup B$ sous la forme d'une réunion disjointe de trois ensembles :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),$$

En notant $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

Les trois parties étant deux à deux disjointes, on obtient par additivité :

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \quad (1)$$

De la même manière, on peut partitionner les ensembles A et B à l'aide de leur intersection avec l'autre ensemble :

- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (réunion disjointe), d'où $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, ce qui donne :

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (réunion disjointe), d'où $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$, ce qui donne :

$$|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$$

En substituant ces deux relations dans l'équation (1), il vient :

$$|A \cup B| = \big(|A| - |A \cap B|\big) + |A \cap B| + \big(|B| - |A \cap B|\big)$$

En simplifiant l'expression, on obtient le résultat attendu :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

18. Justifier la formule du déterminant de Vandermonde.

On considère le déterminant d'ordre n suivant : $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

que l'on appelle déterminant de Vandermonde. On a :

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, les déterminant a deux lignes identiques et le résultat est donc vrai.

On suppose maintenant que les x_i sont deux à deux distincts. On pose $P_n(X) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X)$. On a grâce à un développement par rapport à la dernière ligne (attention il y a un décalage de un entre le numéro de colonne et la puissance sur X) :

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} X^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{i-2} & x_1^{i} & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{i-2} & x_2^{i} & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{i-2} & x_{n-1}^{i} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Les déterminants intervenant dans cette somme ne comportent pas de X, ce sont donc des scalaires, donc $P_n(X)$ est dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soit i dans $[\![1, n-1]\!]$. On a : $P_n(x_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_i & x_i^2 & \dots & x_i^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, car les lignes i et n de ce déterminant sont les mêmes.

Ainsi P_n est un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant $n-1$ racines distinctes $x_1, ..., x_{n-1}$, alors $P_n = a \prod_{j=1}^{n-1} (X - x_j)$, avec a le coefficient dominant (en X^{n-1}) de P_n. Le premier calcul nous dit que c'est exactement $D_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Ainsi : $P_n(X) = D_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (X - x_j)$.

Or $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j)$.

Montrons enfin que la formule finale est par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, on a $D_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (x_i - x_j)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et supposons la proposition vraie pour n.

On a : $D_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j)$. Or grâce à l'hypothèse de récurrence, on a : $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$, donc :

$D_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \prod_{j=1}^{n} (x_{n+1} - x_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x_i - x_j)$, car le terme en

$i = n+1$ de ce produit est $\displaystyle\prod_{1\leq j<i=n+1}(x_{n+1}-x_j) = \prod_{j=1}^{n}(x_{n+1}-x_j)$. D'où la propriété pour $n+1$, ce qui achève la récurrence.

19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A\,\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)I_n$.

Pour démontrer cette identité, nous allons étudier le coefficient générique situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice produit, que l'on notera $C_{i,j}$.
Par définition du produit matriciel, ce coefficient est le produit scalaire de la ligne i de la matrice A et de la colonne j de la matrice $\mathrm{Com}(A)^T$ (qui correspond à la ligne j de la comatrice $\mathrm{Com}(A)$).
On a donc :

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ \mathrm{Com}(A)_{j,k}$$

Rappelons que le cofacteur $\mathrm{Com}(A)_{j,k}$ est défini par :

$$\mathrm{Com}(A)_{j,k} = (-1)^{j+k}\Delta_{j,k}$$

où $\Delta_{j,k}$ est le mineur d'indice (j,k), c'est-à-dire le déterminant de la sous-matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne j et la colonne k de A.
Nous distinguons le cas où $i = j$ (coefficients diagonaux) et le cas où $i \neq j$ (coefficients extra-diagonaux).
Lorsque $i = j$, l'expression devient :

$$C_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ \mathrm{Com}(A)_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\Delta_{i,k}$$

Cette somme correspond exactement au développement de $\det(A)$ suivant la i-ème ligne. Par conséquent :

$$C_{i,i} = \det(A)$$

Lorsque $i \neq j$, l'expression est :

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ \mathrm{Com}(A)_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}\Delta_{j,k}$$

Cette somme peut être interprétée comme le développement, suivant sa j-ème ligne, d'une matrice fictive A' obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ème ligne par sa i-ème ligne.

- Les cofacteurs faisant intervenir les mineurs $\Delta_{j,k}$ ne dépendent pas des coefficients de la ligne j de la matrice d'origine. Ils sont donc identiques pour A et pour A'.
- La matrice A' possède ainsi deux lignes identiques (la ligne i et la ligne j, puisque $i \neq j$).

Un déterminant ayant deux lignes identiques étant nul, on en déduit que :

$$C_{i,j} = \det(A') = 0$$

Tous les coefficients diagonaux du produit valent $\det(A)$ et tous les coefficients extra-diagonaux sont nuls. On a donc, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$:

$$C_{i,j} = \det(A)\,\delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. Sous forme matricielle, cela se traduit par :

$$A\ \mathrm{Com}(A)^T = \det(A)I_n$$

20. Énoncer et démontrer le critère d'injectivité d'une application linéaire.

Soient F et G deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(F,G)$. L'application u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_F\}$. Preuve :

$\Longrightarrow$) Supposons u injective. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$. Par définition du noyau, $u(x) = 0_G$. Or, par linéarité de u, on a également $u(0_F) = 0_G$. Ainsi, $u(x) = u(0_F)$. Par injectivité de u, il vient immédiatement $x = 0_F$. L'inclusion réciproque $\{0_F\} \subset \operatorname{Ker}(u)$ étant toujours vraie par linéarité, on a bien $\operatorname{Ker}(u) = \{0_F\}$.

$\Longleftarrow$) Supposons que $\operatorname{Ker}(u) = \{0_F\}$. Soient $x, y \in F$ tels que $u(x) = u(y)$. Par linéarité de u, on a $u(x-y) = 0_G$, ce qui signifie que $(x-y) \in \operatorname{Ker}(u)$. Par hypothèse sur le noyau, on en déduit que $x - y = 0_F$, soit $x = y$. L'application u est donc injective.

III-Exercices

Ex 1 : 1. Donner un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

2. Montrer que e est irrationnel.

1. On a : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \displaystyle\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.
   Pour $k \geq n+3$, on a :
   $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...k} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+3)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)^{k-n-2}}$,
   puis $0 \leq \displaystyle\sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=n+3}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^{k-n-2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^p} =$
   $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+3}} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)^2} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   On a aussi : $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} =$
   $\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) + \dfrac{1}{n^2}(1+o(1)) = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. Si $e = \dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, on a : $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, puis : $pq! = q!e =$
   $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + q(u_q - 1)$. Or : $0 < u_q - 1 = \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{(q+1)(q+2)} + \dfrac{1}{(q+1)(q+2)^2} = \dfrac{1}{q+1} \times$
   $\dfrac{1 - \left(\frac{1}{q+1}\right)^3}{1 - \frac{1}{q+1}} < \dfrac{1}{q}$, puis cela contredit le fait d'avoir $q(u_q - 1)$ dans $\mathbb{Z}$.

Ex 2 : Déterminer un équivalent en 0 par valeurs supérieures de $f(x) = x^{\operatorname{sh}(x)} - \operatorname{sh}(x)^x$.

On a : $\operatorname{sh}(x)^x = e^{x\ln(\operatorname{sh}(x))}$.

Or $x\ln(\operatorname{sh}(x)) = x\ln\left(\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x}\right) + x\ln(x) = x\left(\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + \ln(x)\right) = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3) + x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée, puis $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sh}(x)^x = e^0 = 1$.

On a : $f(x) = \operatorname{sh}(x)^x \left(e^{\operatorname{sh}(x)\ln(x) - x\ln(\operatorname{sh}(x))} - 1\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} e^{u(x)} - 1$, avec $u(x) = \operatorname{sh}(x)\ln(x) - x\ln(\operatorname{sh}(x))$.

On a par ailleurs $u(x) = \left(x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\ln(x) - \dfrac{x^3}{6} - x\ln(x) + o(x^3) = \dfrac{x^3\ln(x)}{6} + o(x^3\ln(x))$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3\ln(x)$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u(x) = 0$, puis $e^{u(x)} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} u(x)$ et donc : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x^3\ln(x)}{6}$.

Ex 3 : (Lemme de Gronwall) Soit $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$, avec u à valeurs dans $\mathbb{R}$ et v à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)dt\ \ (*)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c\exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$.

Soit $w : x \mapsto c + \int_0^x u(t)v(t)dt$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ w'(x) = u(x)v(x) \leq w(x)v(x)$, par $(*)$ et la positivité de v. Il suffit d'avoir $w(x) \leq c\exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$ et donc on pose

$g : x \mapsto w(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)dt\right)$ que l'on va essayer de majorer par c.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) =$

$$w'(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)dt\right) - w(x)v(x)\exp\left(-\int_0^x v(t)dt\right) = (w'(x) - v(x)w(x))\exp\left(-\int_0^x v(t)dt\right) \leq 0.$$

Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leq g(0) = w(0) = c$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ w(x) \leq c\left(\int_0^x v(t)dt\right)$, puis $(*)$ donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leq c\exp\left(\int_0^x v(t)dt\right)$.

Ex 4 : Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ et on note pose $M = \sup_{[a,b]}|f''|$ (qui existe car $|f''|$ est continue sur le segment $[a,b]$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M$.

Par intégration par partie, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right)f(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)f'(t)dt =$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \left(\underbrace{\left[\frac{t^2-(a+b)t+ab}{2}f'(t)\right]_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{t^2-(a+b)t+ab}{2}f''(t)dt\right).$$

On a donc : $\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \int_a^b \frac{|t^2-(a+b)t+ab|}{2}|f''(t)|dt \leq \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}Mdt$

$$= \frac{M}{2}\left(\left[-\frac{(t-a)(b-t)^2}{2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2}dt\right) = \frac{M}{2}\frac{(b-a)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{12}M.$$

Ex 5 : Soit q un nombre premier. Montrer que : $\nu_q(m!) = \sum_{i=1}^{+\infty}\lfloor\frac{m}{q^i}\rfloor$, avec ν_q la valuation q-adique.

Montrons d'abord un petit résultat : pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : card$(\{1 \leq k \leq m$ tels que $r|k\} = \lfloor\frac{m}{r}\rfloor$.

Les multiples de q dans $[\![1,m]\!]$ sont les entiers qui s'écrivent pq avec $1 \leq pq \leq m$ c'est à dire : $\frac{1}{q} \leq p \leq \frac{m}{q}$.

Comme $\frac{1}{q} \leq 1$, les entiers p convenables sont ceux de $[\![1,\lfloor m/q\rfloor]\!]$. Comme deux entiers p différents donnent deux multiples différents, on conclut que card$(\{1 \leq k \leq m$ tels que $q|k\}) = \left\lfloor\frac{m}{q}\right\rfloor$.

Dans $[\![1,m]\!]$, il y a $\lfloor m/q^k\rfloor$ multiples de q^k et $\lfloor m/q^{k+1}\rfloor$ multiples de q^{k+1}. Il y a donc $\lfloor m/q^k\rfloor - \lfloor m/q^{k+1}\rfloor$ éléments de valuation q-adique valant k. Remarquons que ce nombre est nul pour k

assez grand.
Puisque l'on a : $\forall a,b\in\mathbb{N}^*,\ v_q(ab)=v_q(a)+v_q(b)$ par unicité de la décomposition en produit de nombres premiers par exemple, on a

$$v_q(m!)=v_q\left(\prod_{a=1}^{m}a\right)=\sum_{a=1}^{m}v_q(a)$$

Dans cette somme, il y a $\lfloor m/q^k\rfloor-\lfloor m/q^{k+1}\rfloor$ entiers a tels que $v_q(a)=k$ (on prend les multiples de q^k et on enlève ceux qui sont divisibles par q^{k+1}, pour avoir exactement $v_q(a)=k$). On a donc (la somme est en fait finie, car si k est grand, on a : $\dfrac{m}{q^k}<1$, puis $\left\lfloor\dfrac{m}{q^k}\right\rfloor=0$)

$$v_q(m!)=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m}{q^{k+1}}\right\rfloor\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m}{q^{k+1}}\right\rfloor\right)$$

Comme $\lfloor m/q^k\rfloor$ est nul pour k assez grand, on peut découper la somme et réindicer la seconde :

$$v_q(m!)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor=\sum_{k=1}^{\infty}k\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor-\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor$$

les termes se simplifient et il reste $v_q(m!)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{m}{q^k}\right\rfloor$.

<u>Ex 6</u> : Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$, avec $m<n$. Déterminer $(X^n-1)\wedge(X^m-1)$.

Pour $a,b\in\mathbb{N}$, déterminons le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1.
On a : $a=bq+r$, avec $q\in\mathbb{N}$ et $r\in[\![0,b-1]\!]$. Ainsi : $X^a-1=X^{bq+r}-1=X^{bq+r}-X^r+X^r-1=((X^b)^q-1)X^r+X^r-1=(X^b-1)((X^b)^{q-1}+(X^b)^{q-2}+...+1)X^r+X^r-1$, qui est la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1, car $d^\circ(X^r-1)=r<b=d^\circ(X^b-1)$ et dont le reste est X^r-1.
Suivons l'algorithme d'Euclide calculant le $PGCD$ de n et m.
On pose $r_0=n$, $r_1=m$ puis tant que $r_k\neq 0$, on pose r_{k+1} le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k.
Cet algorithme donne $n\wedge m=a_p$ avec a_p le dernier reste non nul. Par le résultat ci-dessus, on observe que si on pose $A_k=X^{r_k}-1$ alors $A_0=X^{r_0}-1, A_1=X^{r_1}-1$ et pour tout k tel que $r_k\neq 0$, on a : $A_k\neq 0$ et A_{k+1} est le reste de la division euclidienne de A_{k-1} par A_k. Par suite $(X^n-1)\wedge(X^m-1)=A_0\wedge A_1=A_1\wedge A_2=...=A_p\wedge A_{p+1}=A_p=X^{n\wedge m}-1$, car $A_{p+1}=0$ puisque $r_{p+1}=0$.

<u>Ex 7</u> : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non constant tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geq 0$. Montrer qu'il existe $A,B\in\mathbb{R}[X]$ tels que : $P=A^2+B^2$.

On a par hypothèse : $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, ce qui nécessite que P a un coefficient dominant positif.
Si P a une racine réelle a, alors : $P=(X-a)^\alpha Q$, avec $Q(\alpha)\neq 0$, si α est impair, $P(x)$ changera de signe au voisinage de a, car $P(x)\underset{x\to a}{\sim}(x-a)^\alpha Q(a)$, et $(x-a)^\alpha$, change de signe en a si α est impair, ce qui est exclu. Ainsi α est pair.
La décomposition en facteurs premiers de P sur $\mathbb{C}[X]$ s'écrit :
$P=\lambda\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{2\beta_i}\prod_{j=1}^{q}(X-\lambda_j)^{n_j}(X-\overline{\lambda_j})^{n_j}$, avec $a_1,...,a_p$ les racines réelles de P, λ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\beta_1,...,\beta_q$ dans $\mathbb{N}^*$.
On pose $Q=\sqrt{\lambda}\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\beta_i}\prod_{j=1}^{q}(X-\lambda_j)^{n_j}=A+iB$, avec $A,B\in\mathbb{R}[X]$.
On a $P=Q\overline{Q}=(A+iB)(A-iB)=A^2+B^2$.

Ex 8 : Soit G un groupe fini tel que : $\forall x \in G,\ x^2 = e$. Montrer que G est commutatif et que $card(G) = 2^k$, avec un certain k de $\mathbb{N}$ (on pourra montrer que si H est un sous-groupe de G, alors $H \cup aH$ est un sous-groupe de G pour a dans $G \setminus H$).

Soient $x, y \in G$. On a $(xy)^2 = e$, soit $xyxy = e$, puis $xxyxyy = xy$, soit $yx = xy$.

Soit H un sous-groupe de G et $a \in G \setminus H$. Montrons que $H \cup aH$ est un sous-groupe de G :

- On a $e \in H \subset H \cup aH$.
- Soit $x, y \in H \cup aH$. Si x, y sont dans H, alors xy^{-1} l'est aussi.
  Si x est dans H et $y = ah$, avec $h \in H$. Comme $a^{-1} = a$, car $a^2 = e$, alors $xy^{-1} = xh^{-1}a^{-1} = a(xh^{-1})$ qui est dans aH.
  De même si x est dans aH et y est dans H, alors xy^{-1} est dans aH.
  Si $x = ah$ et $y = ak$, alors par commutativité : $xy^{-1} = ahk^{-1}a^{-1} = hk^{-1}$ qui est dans H.

D'autre part H et aH sont disjoint, car si x est dans $H \cap (aH)$, alors x est dans H et il existe $h \in H$ tel que $x = ah$. Ainsi $a = xh^{-1}$ est donc dans H, ce qui est contradictoire.
Enfin, on a : $|H| = |aH|$, car l'application $h \mapsto ah$ est une bijection de H dans aH (de réciproque $k \mapsto a^{-1}k$).
Montrons maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|G| = 2^k$.
Si $|G| = 1$.
On suppose $|G| > 1$. . On pose $H_1 = \{e\}$. Comme $|H_1| < |G|$, il existe $a_1 \in G \setminus H_1$ et on pose $H_2 = H_1 \cup a_1H_1$. On a $|H_2| = 2|H_1| = 2^1$.
Si $|H_2| = |G|$, c'est fini, sinon, on peut trouver a_2 dans $G \setminus H_2$ et on pose $H_3 = H_2 \cup a_2H_2$. On a $|H_3| = 2^2$.
On construit ainsi de suite une suite $H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_k$ de sous-groupes tels que $|H_l| = 2^{l-1}$.
La suite des cardinaux est strictement croissante et donc $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N},\ |H_k| < |G|\}$ existe.
Ainsi H_{k_0+1} est un sous-groupe de G (donc $|H_{k_0+1}| \leq |G|$) tel que $|H_{k_0+1}| \geq |G|$ et donc $|H_{k_0+1}| = |G|$, puis $|G| = 2^{k_0}$, ce qui résout le problème.

Ex 9 : 1. Déterminer les morphismes de groupes $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$ qui sont continus en 0.
2. Quels sont les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +, \times)$?

1. Soit f un tel morphisme.
   On pose $f(1) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : On a :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(nx) = f(\underbrace{x + ... + x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(x) + ... + (x)}_{n \text{ fois}} = nf(x)$. Ceci est encore vrai pour $n = 0$, car $f(0) = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{Z}$ négatif. On a $f(nx + (-nx)) = f(0) = 0$, puis :
   $f(nx) = -f(-nx) = -(-nf(x)) = nf(x)$.
   Soit $q \in \mathbb{Z}^*$. On a : $\alpha = f(1) = f\left(q \times \dfrac{1}{q}\right) = qf(1/q)$, donc $f(1/q) = \dfrac{\alpha}{q}$.
   Soient $p, q \in \mathbb{Z}$, avec q non nul. On a : $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = f\left(p \times \dfrac{1}{q}\right) = pf\left(\dfrac{1}{q}\right) = p \times \dfrac{1}{q}\alpha$.
   Ainsi : $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r\alpha$.
   Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a : $\forall h \in \mathbb{R},\ f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$ et donc :
   $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + f(0) = f(x_0)$, par continuité de f en 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers x. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = r_n\alpha$. Par continuité de f, en passant à la limite dans cette relation, on a : $f(x) = x\alpha$.
   On vérifie que réciproquement une telle application est un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

2. Soit f un tel morphisme. Grâce à la question précédente, comme on a un morphisme de groupes $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ on a :
$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1) = x$, car $f(1)=1$.
Montrons que f est croissante. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$f(x) = f(\sqrt{x}\times\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})\times f(\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geq 0$.
Par suite $x \leq y \Rightarrow y-x \geq 0 \Rightarrow f(y-x)\geq 0 \Rightarrow f(y)-f(x)\geq 0 \Rightarrow f(x)\leq f(y)$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
On pose $s_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$, pour $n\in\mathbb{N}$. On a :
$\forall n\in\mathbb{N},\ x - \dfrac{1}{10^n} < s_n \leq x < r_n \leq x + \dfrac{1}{10^n}$. Ainsi (s_n) et (r_n) sont des suites de rationnels qui convergent vers x et : $\forall n\in\mathbb{N},\ s_n = f(s_n)\leq f(x)\leq f(r_n) = r_n$ et donc quand n tend vers $+\infty$, on a : $f(x)=x$.
Réciproquement : $f : x\mapsto x$ est un morphisme d'anneaux de $(\mathbb{R},+,\times)$ dans $(\mathbb{R},+,\times)$.

<u>Ex 10</u> : 1. Soit $c=(a_1,...,a_p)$ un p-cycle de $\mathcal{S}_n$. Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. Montrer que $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}$ est un cycle dont on donnera les caractéristiques.

2. Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition en cycles de σ. Soit $\tau\in\mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe $\rho\in\mathcal{S}_n$ tel que $\tau=\rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$ si et seulement si : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ n_k(\tau)=n_k(\sigma)$.

1. Soit $x\notin\{\sigma(a_1),...,\sigma(a_p)\}$. Ainsi $\sigma^{-1}(x)$ n'est pas dans $\{a_1,...,a_p\}$, donc :
$\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}(x) = \sigma\circ c(\sigma^{-1}(x)) = \sigma(c(\sigma^{-1}(x))) = \sigma(\sigma^{-1}(x)) = x$.
Soit $i\in[\![1,p-1]\!]$. On a : $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}(\sigma(a_i)) = \sigma(c(a_i)) = \sigma(a_{i+1})$ et on montre de même que : $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}(\sigma(a_p)) = \sigma(a_1)$. Ce cycle est $(\sigma(a_1),...,\sigma(a_n))$.
2. • $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose qu'il existe $\rho\in\mathcal{S}_n$ tel que $\tau=\rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}$.
Soit $\sigma=\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r$ la décomposition unique de σ en produit de cycles à supports disjoints. Alors
$$\tau=\rho\sigma\rho^{-1}=\rho(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r)\rho^{-1}=(\rho\gamma_1\rho^{-1})(\rho\gamma_2\rho^{-1})\dots(\rho\gamma_r\rho^{-1}).$$
Grâce à la question précédente, si A_i est le support de γ_i, alors $\rho(A_i)$ est le support de $\rho\gamma_i\rho^{-1}$, ainsi par bijectivité de ρ, les cycles $(\rho\gamma_i\rho^{-1})_{1\leq i\leq r}$ sont encore à supports disjoints, dont les longueurs correspondent aux γ_i. Donc τ se décompose en un produit de cycles à supports disjoints de même longueur que ceux de σ. Ainsi $\forall l\in[\![2,n]\!], n_l(\sigma)=n_l(\tau)$. Puisque le nombre de points fixes de σ est égal à n auquel on retire la somme des longueurs des cycles, σ et τ ont aussi le même nombre de points fixes : $n_1(\sigma)=n_1(\tau)$.
• $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall k\in[\![1,n]\!],\ n_k(\tau)=n_k(\sigma)$. Dans une décomposition en un produit de cycles à supports disjoints, tous les cycles commutent. On peut donc échanger l'ordre des cycles. On décompose σ et τ en produit de cycles à supports disjoints :
$$\begin{array}{rcl}\sigma &=& \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r.\\ \tau &=& \eta_1\eta_2\dots\eta_r.\end{array}$$
Quitte à permuter l'ordre des cycles, on suppose que pour tout $i\in[\![1,r]\!]$, on a : γ_i et η_i sont de même longueur.
On note A_i et B_i les supports de γ_i et η_i respectivement pour $1\leq i\leq r$. Ils sont de même cardinal.
On construit une permutation $\rho\in\mathfrak{S}_n$ de telle sorte que ρ soit une bijection de A_i dans B_i, tout en conservant l'ordre dans les supports. Ainsi on a : $\forall i\in[\![1,r]\!], \rho\gamma_i\rho^{-1}=\eta_i$, grâce à la question précédente.
Alors on a : $\rho\sigma\rho^{-1}=\rho(\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r)\rho^{-1}=(\rho\gamma_1\rho^{-1})(\rho\gamma_2\rho^{-1})\dots(\rho\gamma_r\rho^{-1})=\eta_1\eta_2\dots\eta_r=\tau$.
Donc $\tau=\rho\sigma\rho^{-1}$ et σ et τ sont conjugués.

Ex 11 : Soit (u_n) une suite à valeurs positives sous-additive : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_{n+m} \leq u_n + u_m$.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\ell = \inf\left\{\dfrac{u_k}{k},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

ℓ existe bien car on a une partie non vide minorée (par 0). Par une récurrence sur q, on a : $u_{qs} \leqslant q u_s$, pour q et s dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de la borne inférieure on peut trouver m tel que $\ell \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \ell + \varepsilon$. Si n est un entier quelconque, on en fait la division euclidienne par m et on obtient $n = q_n m + r_n$, où $0 \leqslant r_n < m$. On a alors $u_n \leqslant u_{mq_n} + u_{r_n} \leqslant q_n u_m + u_{r_n}$ et donc, en divisant par n,

$$\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q_n}{n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n} \leqslant \frac{(\ell+\varepsilon) q_n m}{n} + \frac{M}{n} \leqslant (\ell+\varepsilon) + \frac{M}{n}$$

où $M = \max\limits_{0\leqslant k<m} u_k$. Or $\dfrac{M}{n}$ tend vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \dfrac{M}{n} \leq \varepsilon$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \ell \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.

Ex 12 : Une suite (u_n) réelle est dite de Cauchy si :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N},\ (p \geq N) \wedge (q \geq N) \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

On pose $a_n = \sup\limits_{p\geq n} u_p$ et $b_n = \inf\limits_{p\geq n} u_p$. En s'aidant de ces suites, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

On remarque d'abord que (u_n) est bornée, car pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$\forall n \geq N,\ |u_n| \leq |u_n - u_N| + |u_N| \leq 1 + |u_N|$.
Montrons que les suites (a_n) et (b_n), qui sont donc bien définies, sont adjacentes.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\forall p \geq n+1,\ u_p \leq a_n$. Comme a_n ne dépend pas de p, alors : $a_{n+1} = \sup\limits_{p\geq n+1} u_p \leq a_n$. Ainsi la suite (a_n) est décroissante. De même la suite (b_n) est croissante.
Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$. Soient $n \geq N$ et $q \geq n$ fixés. On a : $\forall p \geq n,\ u_p \leq u_q + \varepsilon$, puis $a_n \leq u_p + \varepsilon$. On a donc : $\forall q \geq n,\ a_n - \varepsilon \leq u_q$. Ainsi $a_n - \varepsilon \leq \inf\limits_{q\geq n} u_q = b_n$, puis : $\forall n \geq N,\ 0 \leq a_n - b_n \leq \varepsilon$. Ainsi par définition de la limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$. Ainsi les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers une même limite, ℓ. Enfin : $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \leq u_n \leq a_n$, donc la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

Ex 13 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $R_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p^\alpha}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Cela a bien un sens grâce au TSSA

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$fixé et on pose : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \dfrac{1}{(p+n)^\alpha} - \dfrac{1}{(p+n+1)^\alpha}$. Montrer la convergence de $\displaystyle\sum_{p\geq 0} (-1)^p v_p$. Quel est le signe de la somme ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} R_n$ converge.
3. Déterminer un équivalent de R_n.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+n)^\alpha} - \dfrac{1}{(x+n+1)^\alpha}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

   On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = -\alpha\left(\dfrac{1}{(x+n)^{\alpha+1}} - \dfrac{1}{(x+n+1)^{\alpha+1}}\right) \leq 0$.
   Ainsi f est décroissante et donc (v_p) aussi.

(v_p) converge vers 0 et elle est décroissante, donc grâce au TSSA $\sum_{p\geq 0}(-1)^p v_p$ converge et sa somme est du signe de $(-1)^0 v_0 = v_0$ et donc elle est positive.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. R_n est le reste d'une série vérifiant les hypothèses du TSSA, donc R_n est du signe de son premier terme à savoir $(-1)^n$, donc $(-1)^n R_n$ est positif, puis : $R_n = (-1)^n |R_n|$.
Montrons que $\sum_{n\geq 1} R_n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n|R_n|$ vérifie les hypothèses du TSSA.
 - On a : $\lim_{n\to+\infty} |R_n| = 0$, en tant que reste d'une série convergente.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|R_n| - |R_{n+1}| = (-1)^n R_n - (-1)^{n+1} R_{n+1} = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n}}{p^\alpha} - \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+n+1}}{p^\alpha} =$
 $\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+2n}}{(l+n)^\alpha} - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+2(n+1)}}{(l+n+1)^\alpha} = \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l v_l \geq 0$. Ainsi $(|R_n|)$ est décroissante.

 Grâce au TSSA, $\sum_{n\geq 1} R_n$ converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
On a aussi grâce aux calculs précédents : $R_n + R_{n+1} = (-1)^n(|R_n| - |R_{n+1}|) = \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l v_l$.
Comme cette dernière série vérifie les hypothèses du TSSA, alors :
$|R_n + R_{n+1}| \leq v_0 = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{\alpha}{n^\alpha} = \frac{\alpha}{n^{2\alpha}}$.
On a donc $R_n = \frac{1}{2}\left([R_n - R_{n+1}] + [R_n + R_{n+1}]\right) = \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

<u>Ex 14</u> : Étudier la convergence de la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n} e^{\frac{1}{2}+o(1)}$.
Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}$, puis $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}+o(1)} = e^{\frac{1}{2}}$ et donc $u_n \sim e^{-n} e^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^n e^{\frac{1}{2}}$. La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge

---

<u>Ex 15</u> : 1. Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}\right.$. Déterminer le noyau de φ.

2. Déterminer φ^k pour k dans $\mathbb{N}$.
3. Déterminer l'image de $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}\right.$.
4. Soit $\Delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(\Delta^p) = \{(P(n))_{n\in\mathbb{N}},\ P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.

1. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a donc : $P(X+1) = P(X)$. Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X+n) = P(X)$. Ainsi en remplaçant X par 0, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) - P(0) = 0$. Ainsi le polynôme $P(X) - P(0)$ admet pour racine tous les n dans $\mathbb{N}$, qui est infini. Ainsi $P(X) - P(0) = 0$, puis $P(X) = P(0)$. Donc P est constant. Ainsi $\operatorname{Ker}\varphi$ est inclus dans

l'ensemble des polynôme constants.
Réciproquement, si P est constant, alors $\varphi(P)=0$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'ensemble des polynôme constants.

2. On pose $\psi : P \mapsto P(X+1)$ qui est un endomorphisme de $E=\mathbb{K}[X]$. Ainsi $\varphi=\psi-Id_E$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme ψ et Id_E <u>commutent</u>, alors grâce à la formule du binôme de Newton : $\varphi^k=(\psi-Id_E)^k=\displaystyle\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\psi^l\circ(-Id_E)^{k-l}=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\psi^l$. Ainsi :
$\forall P\in E,\ \varphi^k(P)=\displaystyle\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\psi^l(P)=\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}P(X+l)$. En effet :
$\psi^l(P)=\psi^{l-1}(\psi(P))=\psi^{l-1}(P(X+1))=\psi^{l-2}(P(X+2))=...=P(X+l)$ (à valider par récurrence sur l).
3. On a vu que $\operatorname{Ker}(\varphi)=vect(1)$, l'ensemble des polynômes constants. Ainsi $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi))=1$. Grâce au théorème du rang, on a :
$\dim(\operatorname{Im}(\varphi))=\dim(\mathbb{K}_n[X])-\dim(\operatorname{Ker}(\varphi))=n+1-1=n$.
Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$. On pose $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, donc : $\varphi(P)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi(X^k)=\sum_{k=0}^{n}a_k((X+1)^k-X^k)$.
Or : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ (X+1)^k-X^k=X^k+\binom{k}{1}X^{k-1}+...+1-X^k=\binom{k}{1}X^{k-1}+...+1$. Ainsi $d^\circ\varphi(P)\leq n-1$ et donc : $\operatorname{Im}(\varphi)\subset\mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus $\dim(\operatorname{Im}(\varphi))=\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$, donc : $\operatorname{Im}(\varphi)=\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
4. Montrons cela par récurrence sur p.
$\operatorname{Ker}(\Delta)$ est l'ensemble des suites constante, d'où le résultat pour $p=1$.
Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et on suppose que : $\operatorname{Ker}(\Delta^p)=\{(P(n))_{n\in\mathbb{N}},\ P\in\mathbb{K}_{p-1}[X]\}$.
Soit $u=(u_n)\in\operatorname{Ker}(\Delta^{p+1})$. On a donc $0=\Delta^p(\Delta(u))$, donc il existe $P\in\mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}-u_n=\Delta(u)_n=P(n)$. Soit $Q\in\mathbb{K}_p[X]$ tel que $\varphi(Q)=P$, grâce à la question précédente. Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=Q(n+1)-Q(n)$, donc :
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-Q(n+1)=u_n-Q(n)$. Ainsi la suite $(u_n-Q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Il existe donc $c\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=Q(n)+c$ puis $\operatorname{Ker}(\Delta^{p+1})\subset\{(P(n))_{n\in\mathbb{N}},\ P\in\mathbb{K}_p[X]\}$.
Pour l'autre inclusion, soit $P\in\mathbb{K}_p[X]$ et on pose $u=((P(n))_{n\in\mathbb{N}}$. On a :
$\Delta(u)=(P(n+1)-P(n))=(\varphi(P)(n))$. Comme $\varphi(P)$ est dans $\mathbb{K}_{p-1}[X]$, alors :
$\Delta(u)\in\operatorname{Ker}(\Delta^p)$, grâce à l'hypothèse de récurrence, puis $\Delta^{p+1}(u)=\Delta^p(\Delta(u))=0$, ce qui donne l'autre inclusion et achève la récurrence.

<u>Ex 16</u> : Soient E un espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout x de E, la famille $(x,u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie (il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u=\lambda Id_E$).

Pour tout z de $E\setminus\{0\}$, il existe $\lambda_z\in\mathbb{K}$ tel que $u(z)=\lambda_z z$.
Soient $x,y\in E\setminus\{0\}$. $u(x)=\lambda_x x,\ u(y)=\lambda_y y$ et $u(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)$.
• Si (x,y) est libre, alors $\lambda_{x+y}(x+y)=u(x+y)=u(x)+u(y)=\lambda_x x+\lambda_y y$, ce qui implique que $\lambda_x=\lambda_{x+y}=\lambda_y$.
• Si (x,y) est liée, il existe $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que : $x=\alpha y$ (car $y\neq 0$). On a donc :
$\lambda_x x=u(\alpha y)=\alpha\lambda_y y$, donc $\alpha\lambda_x y=\alpha\lambda_y y$, puis $\lambda_x=\lambda_y$, car $\alpha\neq 0$ et $y\neq 0$.
Ainsi tous les λ_z sont égaux à une valeur que l'on note λ. On a : $\forall z\in E\setminus\{0\},\ u(z)=\lambda z$. Ceci est encore vrai pour $z=0$.

<u>Ex 17</u> : Soient E un espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ et $f,g\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que :

i. $\dim(\operatorname{Ker}(f\circ g))\leq\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Ker}(g))$.
ii. la suite $\big(\dim(\operatorname{Im}(f^k))-\dim(\operatorname{Im}(f^{k+1}))\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Tout d'abord en appliquant le théorème du rang à $f|_{\operatorname{Im}(g)}$, on a :
$\dim(\operatorname{Im}(g))=\dim(\operatorname{Im}(f|_{\operatorname{Im}(g)})+\dim(\operatorname{Ker}(f|_{\operatorname{Im}(g)}))=\dim(\operatorname{Im}(f\circ g))+\dim(\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(g))$.

i. En appliquant le théorème du rang, cela donne :
$n - \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) = n - \dim(\mathrm{Ker}\,(f \circ g)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g))$ puis :
$\dim(\mathrm{Ker}\,(f \circ g)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))$.

ii. On a en prenant $g = f^k$:
$\dim(\mathrm{Im}\,(f^k)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f^{k+1})) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f^k))$, soit :
$\dim(\mathrm{Im}\,(f^k)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f^{k+1})) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f^k))$. Comme :
$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f^k)$, on a le résultat.

Ex 18 : (Lemme de factorisation) Soient E, F, G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.
2. Soient $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $g = h \circ f$.

1. Si un tel h existe, alors $g = h \circ f$ entraîne et $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.
   Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$.
   Si f est bijectif, on peut considérer $h = g \circ f^{-1}$. Nous allons reprendre cette idée en restreignant f pour le rendre bijectif.
   Soit S un sous-espace vectoriel de E tel que $S \oplus \mathrm{Ker}\,(f) = E$. Ainsi $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \to & \mathrm{Im}\,(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
   Soit T un sous-espace vectoriel de F tel que $T \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$.
   Soit $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $h|_{\mathrm{Im}\,(f)} = g \circ (\tilde{f})^{-1}$ et $h|_T = 0$.
   Soit $x \in E$. On a $x = u + s$ avec $u \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $s \in S$. On a $g(x) = g(s)$ car $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g)$ et $hf(x) = hf(s) = h\tilde{f}(s) = g \circ (\tilde{f})^{-1} \circ \tilde{f}(s) = g(s)$. On a donc : $\forall x \in E,\ g(x) = hf(x)$, puis $g = hf$.
2. La condition nécéssaire est : $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(h)$. Vérifions qu'elle est suffisante et on suppose que : $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(h)$.
   Soit S un sous-espace vectoriel de F tel que $S \oplus \mathrm{Ker}\,(h) = F$. Ainsi $\tilde{h} : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \to & \mathrm{Im}\,(h) \\ x & \mapsto & h(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
   On pose $f = (\tilde{h})^{-1} \circ g$, qui est bien défini, car on a : $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(h)$.
   Soit $x \in E$. On a : $hf(x) = h \circ (\tilde{h})^{-1} \circ g(x) = \tilde{h} \circ (\tilde{h})^{-1} \circ g(x) = g(x)$, car $(\tilde{h})^{-1} \circ g(x)$ est dans S. On a donc $g = hf$.

Ex 19 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $G = \{g_1, ..., g_q\}$ un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. On pose $p = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_i$. Montrer que p est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\,(g_i - Id_E)$.

1. Soit $g_k \in G$. Les $g_k g_i$ décrivent G tout entier une et une fois quand i varie dans $[\![1, q]\!]$. En effet l'application $g \mapsto g_k g$ est une bijection de G dans G (de bijection réciproque $g \mapsto g_k^{-1} g$). Ainsi on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_k g_i = \sum_{l=1}^{q} g_l$ et donc : $g_k p = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_l = p$. On a donc : $p^2 = \left(\dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{i=1}^{q} g_i \right) p = \dfrac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} g_i p = \dfrac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} p = p$.

2. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$. Comme p est un projecteur, alors $p(x) = x$ et donc $x = \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} g_i(x)$. Soit $k \in [\![1, q]\!]$. On a ainsi $g_k(x) = \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} g_k g_i(x) = \dfrac{1}{q}\sum_{l=1}^{q} g_l(x) = x$. Ainsi : $x \in \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\,(g_i - Id_E)$.

   Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}\,(g_i - Id_E)$, alors $p(x) = x$ et donc : $x \in \mathrm{Im}\,(p)$.

<u>Ex 20</u> : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto Tr(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Φ est linéaire et va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. Ces deux espaces étant de même dimension finie, il suffit de montrer que Φ est injective.

Soit $A \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$. On a $\Phi_A = 0$ et donc : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ Tr(AM) = 0$.

On note $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$. Pour $M = E_{k,l}$, on a :

$AE_{k,l} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}E_{i,j}E_{k,l} = \sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,l} \underbrace{=}_{j=k} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}E_{i,l}$. Or : $tr(E_{i,l}) = 0$ si $i \neq l$ et $tr(E_{i,l}) = 1$ si $i = l$. Ainsi : $0 = tr(AE_{k,l}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}tr(E_{i,l}) \underbrace{=}_{i=l} a_{l,k}$

Ainsi : $\forall l, k \in [\![1, n]\!],\ a_{l,k} = 0$, donc $A = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0\}$ et Φ est injective.

<u>Ex 21</u> : 1. Soit $C = \left[\dbinom{j-1}{i-1}\right]_{1\le i,j\le n}$. Déterminer C^p, pour p dans $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $C = \left[\dbinom{j-1}{i-1}\right]_{1\le i,j\le n}$. Déterminer C^{-1}.

1. On interprète C comme la matrice d'un endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on appelle $\mathcal{B}$.

   On veut (en regardant la colonne $k+1$) : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f(X^k) = \sum_{i=1}^{n} \dbinom{k}{i-1} X^{i-1} = \sum_{q=0}^{n} \dbinom{k}{q} X^q = \sum_{q=0}^{k} \dbinom{k}{q} X^q = (X+1)^k$.

   On pose $\psi : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ Q & \mapsto & Q(X+1) \end{array}\right.$. C'est une application linéaire qui coïncide avec f sur une base, donc $\psi = f$.

   Grâce à la question précédente, on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \psi^p(Q) = Q(X+p)$.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f^p(X^{k-1}) = (X+p)^{k-1} = \sum_{q=0}^{k-1} \dbinom{k-1}{q} p^{k-1-q}X^q = \sum_{i=1}^{k} \dbinom{k-1}{i-1} p^{k-i}X^{i-1}$.

   Ainsi $C^p = Mat_{\mathcal{B}}(\psi^p) = \left[\dbinom{j-1}{i-1} p^{j-i}\right]_{1\le i,j\le n}$.

2. Soit $g : P \mapsto P(X-1)$.

   On a : $g \circ f = f \circ g = Id_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$, donc $f^{-1} = g$, ainsi $C^{-1} = \left[\dbinom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i}\right]_{1\le i,j\le n}$, car $g(X^{j-1}) = \sum_{k=0}^{j-1} \dbinom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k}X^k = \sum_{i=1}^{j} \dbinom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i}X^{i-1}$.

Ex 22 : 1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que B est de rang un si et seulement s'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls telles que : $B = VU^T$.

2. En déduire que pour tout matrice B de rang un, on a : $B^2 = tr(B)B$.

1. On suppose B de rang un. Ainsi $\text{Im}\,(B) = vect(V)$, avec $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle. On note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de B. Ainsi il existe $u_1, ..., u_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ C_j = u_j V$.
Comme B est non nulle, alors au moins un des u_j est non nul. On pose $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ qui est non nul. On a donc $VU^T = V(u_1, ..., u_n) = \begin{pmatrix} u_1V & \cdots & u_nV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = B$.
Réciproquement si $B = VU^T$, avec $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls, alors en reprenant les mêmes notations, on a : $B = \begin{pmatrix} u_1V & \cdots & u_nV \end{pmatrix}$. Il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_j \neq 0$, donc $\text{Im}\,(B) = vect(V)$ et donc $\text{rg}\,(B) = 1$, car $V \neq 0$.
2. On a : $B^2 = VU^TVU^T = V(U^TV)U^T = (U^TV)VU^T$, car U^TV est un scalaire (matrice 1×1). De plus on peut affirmer que $U^TV = tr(U^TV) = tr(VU^T) = tr(B)$.
Ainsi : $B^2 = tr(B)B$.

Ex 23 : Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une application non constante telle que :
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

On commence par remarquer que $f(I_n^2) = f(I_n)$ donc $f(I_n) \in \{0, 1\}$, et nécessairement $f(I_n) \neq 0$ sinon f est l'application nulle ($f(A) = f(A)f(I_n) = 0$).
De même, $f(0) \in \{0, 1\}$ et nécessairement $f(0) = 0$ sinon f est constante $(1 = f(0) = f(A)f(0) = f(A))$.
Ensuite, si A est inversible, $f(AA^{-1}) = f(A)f(A^{-1}) = 1$ donc $f(A) \neq 0$. Enfin, si A n'est pas inversible, A est de rang $r < n$. On considère $D_k = diag(\underbrace{1, ..., 1, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{0}, 1, ..., 1}_{r+1}, 0, ..., 0)$, pour $1 \leq k \leq r+1$. qui sont des matrices de rang r. On a : $D_1D_2...D_{r+1} = 0$,
puis $f(D_1)f(D_2)...f(D_{r+1}) = 0$, puis comme les $f(D_1), f(D_2), ..., f(D_{r+1})$ sont des nombres complexes, il existe $s \in [\![1, r+1]\!]$ tel que $f(D_s) = 0$.
Puisque deux matrices de même rang sont équivalentes, A est équivalente à D_s, c'est-à-dire qu'il existe P, Q inversibles telles que $A = PD_sQ$. On a donc $f(A) = f(P)f(D_s)f(Q) = 0$, ce qui donne le résultat.

Ex 24 : Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $AX = 0$, alors : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{ii}||x_i| \leq \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} |a_{ij}||x_j|$, puis que si X est non nul alors il existe i_0 tel que : $|a_{i_0i_0}| \leq \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} |a_{i_0j}|$.
2. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La i-ème ligne du vecteur colonne AX est $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, donc : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$,
puis $a_{ii}x_i = -\displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} a_{ij}x_j$, donc : $|a_{ii}||x_i| = \left| \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} a_{ij}x_j \right| \leq \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} |a_{ij}||x_j|$.

On suppose $X \neq 0$. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$. On a donc : $|x_{i_0}| \neq 0$ (sinon : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |x_i| \leq 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |x_i| = 0 \Rightarrow X = 0$).
En prenant l'inégalité précédente pour $i = i_0$, on a :
$|a_{i_0 i_0}||x_{i_0}| \leq \displaystyle\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0 j}||x_j| \leq \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0 j}||x_{i_0}|$.
Comme $|x_{i_0}| > 0$, alors : $|a_{i_0 i_0}| \leq \displaystyle\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0 j}|$.

2. Comme A est une matrice carrée, si elle est non inversible alors :
$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\},\ AX = 0 \Rightarrow \left(\exists i_0 \in [\![1,n]\!],\ |a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}} |a_{i_0 j}|\right).$$
Par contraposée : $\left(\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} |a_{ij}|\right) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Ex 25 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $\mathbb{C}$, autrement dit, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On pose $P = R + iS$, avec R, S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a : $AP = PB$, soit $AR + iAS = RB + iSB$. En identifiant les matrices à coefficients réels et imaginaires purs, on a : $AR = RB$ et que $AS = SB$.
On pose $R = [r_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $[s_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :
$\det(R + xS) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)(r_{\sigma(1),1} + xs_{\sigma(1),1})\cdots(r_{\sigma(n),n} + xs_{\sigma(n),n})$. Ainsi par somme et produit, $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale. Soit U le polynôme associé. On a :
$U(i) = \det(R+iS) = \det(P) \neq 0$. Ainsi U n'est pas le polynôme nul. Si on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ U(x) = 0$, alors U aurait une infinité de racines, donc U serait nul, ce qui est contradictoire. Ainsi il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U(x_0) \neq 0$, soit $R + x_0 S$ est inversible.
On pose $Q = R + x_0 S$. On a : $AQ = AR + x_0 AS = RB + x_0 SB = QB$. Comme Q est inversible, on a : $A = QBQ^{-1}$.

Ex 26 : Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer $D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$, ce déterminant étant de taille $n \times n$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Soit $n \geq 2$. Si on développe par rapport à la première ligne, on trouve :
$$D_{n+2}(\theta) = 2\cos(\theta)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & (0) \\ 0 & 2\cos(\theta) & 1 & & \\ & 1 & 2\cos(\theta) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix},$$
ces déterminants étant de taille $n+1$. En développant le second déterminant par rapport à la première colonne, on trouve : $D_{n+2}(\theta) = 2\cos(\theta)D_{n+1}(\theta) - D_n(\theta)$.
Nous allons donner une valeur à D_1 et D_0 pour que la relation de récurrence soit vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
On a $D_2(\theta) = 4\cos^2(\theta) - 1$ et en reprenant les calculs précédents, $D_3(\theta) = 8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta)$.
Ainsi $D_1(\theta) = 2\cos(\theta)$ et $D_0(\theta) = 1$ conviennent.
$(D_n(\theta))_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
$0 = r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = r^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})r + e^{i\theta}e^{-i\theta} = (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta})$.
On suppose que $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Ainsi $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont distincts.

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(\theta) = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)$. Or $1 = D_0 = \lambda$ et $2\cos(\theta) = D_1 = \lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)$, donc $\mu = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(\theta) = \cos(n\theta) + \dfrac{\sin(n\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin(\theta)\cos(n\theta) + \cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

Supposons maintenant que $\theta = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction $\theta \mapsto D_n(\theta)$ est continue, car lorsque l'on développe $D_n(\theta)$ à l'aide la formule du déterminant, nous obtenons un polynôme en $\cos(\theta)$.

On a donc $D_n(k\pi) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin((n+1)(k\pi+h)}{\sin(k\pi+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1)^{(n+1)k}\sin((n+1)h}{(-1)^k\sin(h)} = (-1)^{nk}(n+1)$, en utilisant le fait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Ex 27 : (***Polynômes de Tchebychev)*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1],\ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.
2. En déduire que T_n est une fonction polynomiale, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
4. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation précédente.
5. Montrer que : $\forall m, n \in \mathbb{N},\ T_n \circ T_m = T_{nm}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Montrer que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.
8. Soit $n \geq 2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, tel que : $M = 1$, avec $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. Montrer que $P = T_n$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$. On a :
   $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) = 2xT_n(x)$, car $\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x$.
2. Soit $x \in [-1,1]$. On constate que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, puis :
   $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n)$: T_n est une fonction polynomiale de degré n, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de coefficient dominant 2^{n-1} (attention $\mathcal{P}(0)$ est fausse pour le coefficient dominant).
   Montrons le résultat par récurrence double.
   $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe Q_{n+1} et Q_n dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = 2^{n-1}x^n + Q_n(x)$ et $T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$.
   On a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) = 2x(2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)) - (2^{n-1}x^n + Q_n(x)) = 2^{n+1}x^{n+2} + \underbrace{2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)}_{\text{polynôme de degré au plus } n+1 \text{ dans } \mathbb{Z}[X]}$. Ainsi T_{n+2} est bien une fonction polynôme par opérations, qui est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1}, d'où $\mathcal{P}(n+2)$, ce qui achève la récurrence.
3. Soit $\theta \in [0,\pi]$ et soit $x = \cos(\theta)$. On a : $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(\theta)) = \theta$, car θ est dans $[0,\pi]$, puis : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, grâce à la définition de T_n. Les fonctions $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ et $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ sont paires, 2π-périodiques et égales sur $[0,\pi]$, donc elle sont égales sur $\mathbb{R}$.
4. Soit Q_n un polynôme tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$. On a donc :
   $\forall \theta \in \mathbb{R},\ Q_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta))$, puis : $\forall x \in [-1,1],\ Q_n(x) = T_n(x)$, car $\cos(\theta)$ décrit $[-1,1]$ quand θ décrit $\mathbb{R}$. Comme $[-1,1]$ est infini, alors $Q_n = T_n$.
5. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a $\forall \theta \in \mathbb{R},\ ;T_n \circ T_m(\cos(\theta) = T_n(T_m(\cos(\theta))) = T_n(\cos(m\theta)) = \cos(nm\theta)$. Par unicité de la question précédente, on a : $;T_n \circ T_m = T_{nm}$.

6. On constate que pour $y_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $0 \leq k \leq n-1$, on a $T_n(y_k) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$. De plus les angles $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ sont dans $[0, \pi]$, donc les x_k sont deux à deux distincts, car cos est injective sur $[0, \pi]$. On a trouvé n racines distinctes pour un polynôme de degré n, donc on a toutes les racines e T_n, puis : $T_n = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - y_k)$.
7. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a donc :
   $|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1$. Ce majorant est atteint en $x_p = \cos\left(\dfrac{p\pi}{n}\right)$, pour $0 \leq p \leq n$, car $T_n(x_p) = (-1)^p$, d'où : $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.
8. On a : $\forall x \in [-1, 1] \quad -1 \leq P(x) \leq 1$. On note $Q = T_n - P$. On a $d°(Q) \leq n-1$, car les coefficients au degré n se compensent. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a : $Q(x_k) = (-1)^k - P(x_k)$, qui est du signe de $(-1)^k$ ou nul.
   Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que Q_n possède au moins k racines comptées avec multiplicité sur $[x_k, x_0]$ si $Q(x_k) \neq 0$ et au moins $k+1$ si $Q(x_k) = 0$.
   Il n'y a rien à prouver pour $k = 0$.
   Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ et supposons la propriété vraie pour ce k.
   • Si $Q(x_k) \neq 0$ et $Q(x_{k+1}) \neq 0$, alors grâce au TVI sur $[x_{k+1}, x_k]$, comme Q change de signe, alors aux k racines de l'hypothèse, on en rajoute une $(k+1)$-ème.
   • Si $Q(x_{k+1}) = 0$, alors $P(x_{k+1}) = T_n(x_{k+1}) = (-1)^{k+1}$, donc P et T_n admettent un extremum local sur $]-1, 1[$ (qui est ouvert) en x_{k+1}, donc $P'(x_{k+1}) = T_n'(x_{k+1}) = 0$, puis $Q'(x_{k+1}) = 0$, ainsi x_{k+1} est une racine de multiplicité au moins 2.
   • Si $Q(x_k) = 0$ et $Q(x_{k+1}) \neq 0$, on a dejà nos $k+1$ racines.
   Ceci achève la récurrence.
   Si $Q(x_{n-1}) = 0$, on a donc au moins n racines.
   Sinon : $Q(x_{n-1})Q(x_n) \leq 0$, donc aux $n-1$ racines, il faut rajouter une racine dans $]x_{n-1}, x_n]$, ce qui donne au moins n racines pour Q.
   Ainsi $Q = 0$, dans tous les cas, ce qui donne le résultat.

Ex 28 : [Fonction de Lambert]

1. Montrer que $f : x \mapsto xe^x$ admet une fonction réciproque sur $[-1 + \infty[$, que l'on notera W (fonction de Lambert). On précisera son ensemble de définition I. Montrer que W est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathring{I}$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par W.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{W(-e^{-1} + h) - W(-e^{-1})}{h}$.
4. Montrer que W admet un $DL_3(0)$ que l'on donnera.
5. Donner un développement asymptotique à deux termes de W en $+\infty$ et en $-e^{-1}$.

1. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ f'(x) = (x+1)e^x > 0$. Ainsi f est donc strictement croissante et continue sur $[-1, +\infty[$. Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty$ et $f(-1) = -e^{-1}$, donc f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[-e^{-1}, +\infty[$, grâce au théorème de la bijection. On appelle W cette bijection réciproque. Comme f est continue, alors W l'est aussi. Par ailleurs f' ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$ et elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$.
2. Soit $x \in]-e^{-1}, +\infty[$.
   On a $W'(x) = \dfrac{1}{f'(W(x))} = \dfrac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} = \dfrac{1}{f(W(x)) + e^{W(x)}} = \dfrac{1}{x + e^{W(x)}}$.
3. W est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$, dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to(-e^{-1})^+} W'(x) = +\infty$, car $\displaystyle\lim_{x\to\to(-e^{-1})^+} (x + e^{W(x)}) = -e^{-1} + e^{-1} = 0$ par valeurs supérieures, car W est croissante. Grâce

au théorème de la limite de la dérivée, on a : $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{W(-e^{-1}+h)-W(-e^{-1})}{h} = +\infty$.

4. W étant de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-e^{-1},+\infty[$, elle admet donc un $DL_3(0)$. Par ailleurs $f(0)=0$, donc $W(0)=0$ et $W'(0)=\dfrac{1}{e^{W(0)}}=1$. Ainsi on a : $W(x)=x+bx^2+cx^3+o(x^3)$.
On a : $x=f(W(x))=W(x)e^{W(x)}=W(x)+W(x)^2+\dfrac{W(x)^3}{2}+o(W(x)^3)=(x+bx^2+cx^3+o(x^3))+(x+bx^2+cx^3+o(x^3))^2+\dfrac{(x+bx^2+cx^3+o(x^3))^3}{2}+o(x^3)=x+(b+1)x^2+(c+2b+1/2)x^3+o(x^3)$.
On doit avoir par unicité du développement limité : $b=-1$, puis $c=3/2$, puis
$W(x)=x-x^2+\dfrac{3}{2}x^3+o(x^3)$.

5. • On a : $\lim_{x\to+\infty} W(x)=+\infty$. Par ailleurs pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $W(x)e^{W(x)}=x$ et comme tout est strictement positif, on a : $\ln(W(x))+W(x)=\ln(x)$ $(*)$, puis $W(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.
On pose $g(x)=W(x)-\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$. On a donc par $(*)$:
$\ln(\ln(x)+g(x))+g(x)+\ln(x)=\ln(x)$, puis $\ln(\ln(x))+\ln\left(1+\dfrac{g(x)}{\ln(x)}\right)+g(x)=0$ donc $g(x)=-\ln(\ln(x))+o(1)$, quand x tend vers $+\infty$, car $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{\ln(x)}=0$. On a donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln(x))$, puis :
$W(x) \underset{x\to+\infty}{=} \ln(x)-\ln(\ln(x))+o(\ln(\ln(x)))$.
• On a $W(-e^{-1})=-1$. On pose $A(h)=W(-e^{-1}+h)+1$ et donc $\lim_{h\to 0^+} A(h)=0$. De la relation $W(x)e^{W(x)}=x$, on obtient la relation $(-1+A(h))e^{-1+A(h)}=-e^{-1}+h$, puis : $(1-A(h))e^{A(h)}=1-eh$,et donc quand h tend vers 0, on a : $(1-A(h))(1+A(h)+A^2(h)/2+o(A^2(h))=1-eh$, soit $-A^2(h)/2+o(A^2(h))=-eh$ puis $A^2(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} 2eh$.
On on a : $W\geq -1$, donc A est positive, puis $A(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \sqrt{2eh}$, puis $W(x) \underset{x\to(-e^{-1})^+}{=} -1+\sqrt{2e\,(x+e^{-1})}+o(x+e^{-1})$.

<u>Ex 29</u> : Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Montrer que $P'+\alpha P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$.

Notons $a_0<a_1<\ldots<a_m$ les racines réelles de P et $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ leurs multiplicités respectives. Le polynôme P étant scindé, on peut écrire $\deg(P)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k$.
On convient de dire qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine d'un polynôme.
Si a_k est racine de multiplicité $\alpha_k\geq 1$ de P alors a_k est racine de multiplicité α_k-1 du polynôme P', car $P'(a_k)=(P')'(a_k)=\ldots=(P')^{\alpha_k-2}(a_k)=0$ et $(P')^{\alpha_k-1}(a_k)\neq 0$. C'est donc une racine de mulitplicité au moins α_k-1 de $P'+\alpha P$. Ainsi les a_k fournissent au moins $\sum_{k=0}^{m}(\alpha_k-1)=\deg(P)-(m+1)$ racines comptées avec multiplicité au polynôme $P'+\alpha P$.
Considérons ensuite la fonction réelle $f:x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$. Cette fonction est indéfiniment dérivable et prend la valeur 0 en chaque a_k. En appliquant le théorème de Rolle à celle-ci sur chaque intervalle $[a_{k-1};a_k]$, on trouve des réels $b_k\in]a_{k-1};a_k[$ vérifiant $f'(b_k)=0$.
Or $f'(x)=(P'(x)+\alpha P(x))\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ et donc b_k est racine du polynôme $P'+\alpha P$. Ajoutons à cela que les b_k sont deux à deux distincts et différents des précédents a_k car, par construction, on a : $a_0<b_1<a_1<b_2<\ldots<b_m<a_m$.
On vient donc de déterminer m nouvelles racines au polynôme $P'+\alpha P$ et ce dernier possède donc au moins $\deg(P)-1$ racines comptées avec multiplicité.
Il manque encore une racine car $\deg(P'+\alpha P)=\deg(P)$. Par les racines précédentes, il est possible de factoriser $P'+\alpha P$ par un polynôme scindé Q de degré $\deg(P)-1$ et le facteur restant étant de degré 1 , ceci donne une écriture scindé du polynôme $P'+\alpha P$.

Ex 30 : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

1. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n)$: il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.
   $\mathcal{P}(0)$: comme $f^{(0)} = f$, alors $P_0 = 1$ convient.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$. En dérivant cette dernière relation, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n+1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}P_n'\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} + \dfrac{2}{x^3}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.
   Ainsi en posant $P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$, on obtient $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.
2. Montrons maintenant par récurrence que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ tout entier et $f^{(n)}(0) = 0$ ($\mathcal{Q}(n)$).
   $\mathcal{Q}(0)$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue aussi en 0.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{Q}(n)$. Nous notons $P_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{p} a_kX^k$. On a donc :
   $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^k}$.
   Soit $l \in \mathbb{N}$. Nous avons : $\dfrac{e^{-1/x^2}}{|x|^l} = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{l/2} e^{-1/x^2}$. Or par croissance comparée :
   $\lim\limits_{X\to+\infty} X^{l/2}e^{-X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{|x|^l} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.
   Ainsi par l'hypothèse de récurrence $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de plus $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0}(f^{(n)})'(x) = \lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(x) = 0$. Par conséquent grâce au théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(f^{(n)})'(0) = f^{(n+1)}(0) = 0$, d'où $\mathcal{Q}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Ex 31 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\left\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\right\rfloor = (\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, puis étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\right)$.

On a : $A_n = (\sqrt{3}+1)^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dbinom{2n+1}{k}(\sqrt{3})^k - \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dbinom{2n+1}{k}(\sqrt{3})^k(-1)^{2n+1-k} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1}\dbinom{2n+1}{k}(\sqrt{3})^k[1-(-1)^{2n+1-k}]$. On remarque que $2n+1-k$ et k ont des parités différentes. Ainsi $(-1)^{2n+1-k} = 1$ si et seulement si k est impair. Ainsi dans notre somme il ne reste plus que les termes d'indice pair. On a donc : $A_n = \sum\limits_{l=0}^{n}\dbinom{2n+1}{2l}(\sqrt{3})^{2l}[1-(-1)^{2n+1-2l}] = 2\sum\limits_{l=0}^{n}\dbinom{2n+1}{2l}3^l$ qui est donc bien un entier (pair).

On remarque que $\sqrt{3}-1 < 1$, donc : $A_n \leq (\sqrt{3}+1)^{2n+1} < (\sqrt{3}+1)^{2n+1} + \underbrace{1-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}}_{>0} =$

A_n+1 Ainsi comme A_n est un entier, alors : $\left\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\right\rfloor = A_n$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin\left(\pi(\sqrt{3}+1)^{2n+1}\right) = \sin\left(\pi(\sqrt{3}-1)^{2n+1}+\pi A_n\right) = \sin\left(\pi(\sqrt{3}-1)^{2n+1}\right)$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, car $0 \leq \sqrt{3}-1 < 1$, alors $|u_n| \sim \pi(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge et donc $\sum u_n$ aussi.

<u>Ex 32</u> : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq p$ et $p \geq 2$.

1. Quel est le nombre de suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $[\![1,p]\!]$ strictements croissantes.
2. En déduire le cardinal $B = \{(k_1,...,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n / \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = p\}$.

1. Soit $A_p = \{(x_1,...,x_n) \in [\![1,p]\!]^n,\ x_1 < x_2... < x_n\}$. Pour construire un élément de A_p, il faut d'abord choisir n éléments de $[\![1,p]\!]$: ce qui donne $\binom{p}{n}$. Ensuite il faut ordonner ces éléments, mais il n'y a qu'une unique façon de les classer dans l'ordre strictement croissant, ainsi : $|A_p| = \binom{p}{n}$.
2. On note $B_p = \{(k_1,...,k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n / \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \leq p\}$.
   L'application $(k_1,...,k_n) \mapsto (k_1, k_1+k_2, ..., k_1+...+k_n)$ est une bijection de B_p dans A_p de réciproque $(x_1,...,x_n) \mapsto (x_1, x_2-x_1, ..., x_p - x_{p-1})$. Ainsi $|B_p| = |A_p| = \binom{p}{n}$, puis $|B| = |B_p| - |B_{p-1}| = \binom{p-1}{n-1}$.

<u>Ex 33</u> : Une personne A transmet une information (binaire) à I_1, qui la transmet à I_2 … jusqu'à I_n qui la transmet à B. On fait l'hypothèse que chaque intermédiaire I_k $(1 \leq k \leq n)$ transmet l'information qu'il reçoit avec une probabilité p $(0 < p < 1)$ et l'information contraire avec la probabilité $1-p$. Calculer en fonction de n et p la probabilité p_n pour que B reçoive l'information initiale.
Trouver un rang N à partir duquel pour $n \geq N$, on a : $|p_n - 1/2| \leq 10^{-2}$.
On effectue n expériences successives indépendantes identiques avec une probabilité p de succès (I_k retransmet correctement l'information reçue). Ainsi lors de ces expériences, la probabilité d'avoir k succès (avec $k \in [\![0,n]\!]$) est $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et la probabilité d'avoir l échecs (avec $l \in [\![0,n]\!]$) est $\binom{n}{n-l}p^{n-l}(1-p)^l = \binom{n}{l}p^{n-l}(1-p)^l$. À la fin, l'information reçue est la bonne si nous avons un nombre pair d'échecs. La probabilité cherchée est $p_n = \sum\limits_{\substack{l=0\\ l \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{l}p^{n-l}(1-p)^l$.
Soit $i_n = \sum\limits_{\substack{l=0\\ l \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{l}p^{n-l}(1-p)^l$. On a : $p_n + i_n = \sum\limits_{l=0}^{n} \binom{n}{l}p^{n-l}(1-p)^l = (1-p+p)^n = 1$ (1).
D'autre part : $p_n - i_n = \sum\limits_{\substack{l=0\\ l \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{l}(-1)^l p^{n-l}(1-p)^l + \sum\limits_{\substack{l=0\\ l \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{l}(-1)^l p^{n-l}(1-p)^l =$
$\sum\limits_{l=0}^{n} \binom{n}{l}p^{n-l}(-1)^l(1-p)^l = (-(1-p)+p)^n = (2p-1)^n$ (2). En additionnant (1) et (2), on a :

$p_n = \dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$.
Si $p = 1/2$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = 1/2$ et $N = 1$ convient.
Si $p \neq 1/2$, alors : $|p_n - 1/2| \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{|2p-1|^n}{2} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow |2p-1|^n \leq 2 \times 10^{-2} \Leftrightarrow$ $n \ln|2p-1| \leq \ln(2 \times 10^{-2}) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(2\times 10^{-2})}{\ln|2p-1|}$, car $-1 < 2p-1 < 1$, soit $|2p-1| < 1$. Par conséquent $N = \left\lfloor \dfrac{\ln(2\times 10^{-2})}{\ln|2p-1|} \right\rfloor + 1$ convient.

Ex 34 : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer la formule du crible : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)\right)$.

Pour $\omega \in \Omega$, on a $\prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i}(\omega))$, qui est à valeurs dans $\{0,1\}$, vaut 0 si et seulement si il existe un i tel que $1_{A_i}(\omega) = 1$ si et seulement si $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Quand on développe $\prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i})$, on effectue toutes les combinaisons possibles en choisissant dans chaque parenthèse si on prend 1 ou -1_{A_i}. Lors d'un développement, on notera $I \subset [\![1,n]\!]$, l'ensemble des i pour lesquelles on a choisi -1_{A_i} dans la parenthèse i.

Ainsi on a : $1_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i}) = 1 - \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} 1_{A_i} = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} 1_{\bigcap_{i\in I} A_i} =$

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} 1_{\bigcap_{i \in I} A_i}$.

En passant à l'espérance, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} (-1)^{k+1} P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} (-1)^{k-1} P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right).$$

Ex 35 : Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules n portent le numéro 0 et les n autres portent les numéros de 1 à n. On tire n boules de l'urne. Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

Pour i dans $[\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i a été tirée et 0 sinon.
Déterminons la loi de X_i.

Le nombre total de tirages possible est $\binom{2n}{n}$.

Le nombre de tirages avec la boule i est $\binom{2n-1}{n-1}$, car une fois que l'on a la boule i, il reste à piocher $n-1$ boules parmi les $2n-1$ restantes.

Ainsi, par équiprobabilité, on a : $P(X_i = 1) = \dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n!n!}{(2n)!} \times \dfrac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi X_i suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
X_iX_j est à valeurs dans $\{0,1\}$ et suit donc une loi de Bernoulli. Par ailleurs, on a :
$(X_iX_j = 1)$ si et seulement si on a : $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$.

Le nombre de tirages pour lesquels les boules i et j sont tirées est $\binom{2n-2}{n-2}$ et donc : $P(X_iX_j =$

$1) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n!n!}{(2n)!} \times \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

Ainsi X_iX_j suit une loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{n-1}{2(2n-1)}\right)$.

Nous avons $cov(X_i, X_j) = \mathtt{E}(X_iX_j) - \mathtt{E}(X_i)\mathtt{E}(X_j) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)} - \dfrac{1}{4} = \alpha$. On a $S = \sum_{i=1}^{n} iX_i$. On a par linéarité de l'espérance :

$\mathtt{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathtt{E}(X_i) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{4}$.

Nous avons $\mathtt{V}(S) = \sum_{i=1}^{n} i^2\mathtt{V}(X_i) + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} cov(iX_i, jX_j) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} ij \times cov(X_i, X_j) =$

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} ij\alpha = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \alpha\sum_{1\leq i,j\leq n} ij - \alpha\sum_{i=1}^{n} i^2 =$

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} j\right) - \alpha\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \alpha\left(\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.

Ex 36 : Soit $g \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_a^b g(t)e^{ixt}dt = 0$.

Soit $x > 0$ un réel. On a :

$\int_a^b g(t)e^{ixt}dt = \left[\dfrac{e^{ixt}}{ix}g(t)\right]_{t=a}^{t=b} - \dfrac{1}{ix}\int_a^b g'(t)e^{ixt}dt = \dfrac{g(b)e^{ixb} - e^{ixa}g(a)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\int_0^{\pi} g'(t)e^{ixt}dt.$

Or, d'une part : $\left|\dfrac{g(b)e^{ixb} - e^{ixa}g(a)}{ix}\right| \leq \dfrac{|g(a)| + |g(b)|}{x}$.

D'autre part, $\left|\dfrac{1}{x}\int_a^b g'(t)e^{ixt}dt\right| \leq \dfrac{1}{x}\int_a^b |g'(t)|dt$. Par conséquent, pour tout x strictement positif, on a : $\left|\int_a^b g(t)e^{ixt}dt\right| \leq \dfrac{|g(a)| + |g(b)|}{x} + \dfrac{1}{x}\int_a^b |g'(t)|dt.$

Par encadrement, on a alors : $\lim_{x\to+\infty} \int_a^b g(t)e^{ixt}dt = 0$.

Ex 37 : (Matrice de Gram) Soit $x_1, ..., x_p$ sont p vecteurs de E et on pose la matrice $G(x_1, ..., x_p) = [(x_i|x_j)]_{1\leq i,j\leq p}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^TA)$ et $\mathrm{Im}\,(AA^T) = \mathrm{Im}\,(A)$.
2. Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_p) = [a_{ij}]_{\substack{\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$. Montrer que $G(x_1, ..., x_p) = A^TA$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}\,(G(x_1, ..., x_p)) = \mathrm{rg}\,(x_1, ..., x_p)$.
4. F un sous-espace vectoriel admettant $(e_1, ..., e_n)$ comme base. Pour $x_1, ..., x_p$ dans E, on pose $\Gamma(x_1, ..., x_p) = \det(G(x_1, ..., x_p))$. Soit $x \in E$.
   (a) Si x est dans $F^{\perp}$, exprimer $\Gamma(e_1, ..., e_n, x)$ à l'aide de x et de $\Gamma(e_1, ..., e_n)$.
   (b) On revient au cas général pour x. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
   Montrer que $\Gamma(e_1, ..., e_n, x + \lambda e_i) = \Gamma(e_1, ..., e_n, x)$.
   (c) Montrer que : $d^2(x, F) = \dfrac{\Gamma(e_1, ..., e_n, x)}{\Gamma(e_1, ..., e_n)}$.

1. • On a : $\operatorname{Ker}(A) \subset \operatorname{Ker}(A^TA)$. Soit $X \in \operatorname{Ker}(A^TA)$. On a $A^TAX = 0$.
   Ainsi on a : $0 = X^TA^TAX = (AX|AX) = \|AX\|^2$ et donc $AX = 0$, puis $X \in \operatorname{Ker}(A)$. On a donc : $\operatorname{Ker}(A^TA) \subset \operatorname{Ker}(A)$. Ainsi : $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^TA)$.
   • On a : $\operatorname{Im}(AA^T) \subset \operatorname{Im}(A)$. Par ailleurs grâce au théorème du rang (attention aux tailles des matrices) et ce qui précède (avec A^T au lieu de A), on a : $\dim(\operatorname{Im}(AA^T)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(AA^T)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(A^T)) = \operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A))$, donc : $\operatorname{Im}(AA^T) = \operatorname{Im}(A)$.

2. Soit $j \in [\![1,p]\!]$. On note $x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors pour $i,j \in [\![1,p]\!]$, on a : $(x_i|x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n [A^T]_{i,k}.[A]_{k,j} = [A^TA]_{i,j}$.
   Ainsi $G(x_1,...,x_p) = A^TA$.
3. La matrice A^TA est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc grâce au théorème du rang et la première question, on a : $\operatorname{rg}(A^TA) = p - \dim(\operatorname{Ker}(A^TA)) = p - \dim\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{rg}(A)$. Or $\operatorname{rg}(G(x_1,...,x_p)) = \operatorname{rg}(A^TA)$ et $\operatorname{rg}(x_1,...,x_p) = \operatorname{rg}(A)$, d'où $\operatorname{rg}(G(x_1,...,x_p)) = \operatorname{rg}(x_1,...,x_p)$.
4. (a) On a : $\Gamma(e_1,...,e_n,x) = \begin{vmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) & (e_1|x) \\ (e_2|e_1) & \cdots & (e_2|e_n) & (e_2|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x|e_1) & \cdots & (x|e_n) & (x|x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) & 0 \\ (e_2|e_1) & \cdots & (e_2|e_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \|x\|^2 \end{vmatrix} =$
   $\|x\|^2 \begin{vmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) \\ \vdots & \vdots & \\ (e_n|e_1) & \cdots & (e_n|e_n) \end{vmatrix} = \|x\|^2\Gamma(e_1,...,e_n)$, en développant par rapport à la dernière colonne.
   (b) On a : $\Gamma(e_1,...,e_n,x+\lambda e_i) =$
   $\begin{vmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_i) & \cdots & (e_1|e_n) & (e_1|x)+\lambda(e_1|e_i) \\ (e_2|e_1) & \cdots & (e_2|e_i) & \cdots & (e_2|e_n) & (e_2|x)+\lambda(e_2|e_i) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x|e_1)+\lambda(e_i|e_1) & \cdots & (x|e_i)+\lambda(e_i|e_i) & \cdots & (x|e_n)+\lambda(e_i|e_n) & (x|x)+2\lambda(x|e_i)+\lambda^2(e_i|e_i) \end{vmatrix}$.
   En effectuant $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \lambda C_i$, on trouve :
   $\Gamma(e_1,...,e_n,x+\lambda e_i) = \begin{vmatrix} (e_1|e_1) & \cdots & (e_1|e_n) & (e_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_i|e_1) & \cdots & (e_i|e_n) & (e_i|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x|e_1)+\lambda(e_i|e_1) & \cdots & (x|e_n)+\lambda(e_i|e_n) & (x|x)+\lambda(x|e_i) \end{vmatrix} = \Gamma(e_1,...,e_n,x)$,
   en effectuant $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - \lambda L_i$.
   (c) Comme F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$ et on note $x = \underbrace{y}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in F^\perp} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + z$. Ainsi : $\gamma = \Gamma(e_1,...,e_n,x) = \Gamma(e_1,...,e_n,z + \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \Gamma(e_1,...,e_n,z)$, en appliquant successivement n fois la deuxième question. Grâce à la première question, on a : $\gamma = \|z\|^2\Gamma(e_1,...,e_n)$, puis $d^2(x,F) = \|z\|^2 = \dfrac{\Gamma(x,e_1,...,e_n)}{\Gamma(e_1,...,e_n)}$. On a bien $\Gamma(e_1,...,e_n) \neq 0$, grâce à la question 3, car $G(x_1,...,x_n)$ est de rang n.

Ex 38 : Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - B\|$ admet un minimum sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et qu'il est atteint en un unique point X_0.
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^TAX = A^TB$.

1. $\{\|AX-B\|,\ X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}=\{\|Y-B\|,\ Y\in \mathrm{Im}\,(A)\}$.
   Ainsi : $\min\{\|Y-B\|,\ Y\in\mathrm{Im}\,(A)\}=d(B,\mathrm{Im}\,(A))$ existe et il existe un unique $Y_0\in\mathrm{Im}\,(A)$ tel que $\min\{\|Y-B\|,\ Y\in\mathrm{Im}\,(A)\}=\|Y_0-B\|$. Ainsi Y_0 est LA projection orthogonale de B sur $\mathrm{Im}\,(A)$. Comme Y_0 est dans $\mathrm{Im}\,(A)$, alors il existe $X_0\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y_0=AX_0$.
   Ainsi $\|AX_0-B\|=\min\{\|AX-B\|,\ X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.
   Par ailleurs si ce minimum est atteint en un autre X_1, alors par unicité de Y_0, on a : $AX_0=Y_0=AX_1$. Mais grâce au théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(A))=p-\mathrm{rg}\,(A)=0$, donc $X\mapsto AX$ est injective, puis $X_0=X_1$ et donc X_0 est unique.
2. $Y_0=AX_0$ est la projection orthogonale de B sur $\mathrm{Im}\,(A)$ si et seulement si $B-Y_0=B-AX_0$ est dans $(\mathrm{Im}\,(A))^\perp$, soit : $\forall Y\in\mathrm{Im}\,(A),\ (Y|B-AX_0)=0\Leftrightarrow$
   $\forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX|B-AX_0)=0\Leftrightarrow\forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX)^T(B-AX_0)=0$
   $\Leftrightarrow\ \forall X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X^TA^T(B-AX_0)=0\Leftrightarrow A^T(B-AX_0)\in(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^\perp=\{0\}\Leftrightarrow A^TAX_0=A^TB$.
   Ce système admet bien une unique solution, car A^TA est inversible. C'est une matrice carrée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour $X\in\mathbb{R}^p$, on a :
   $A^TAX=0\Rightarrow X^TA^TAX=0\Rightarrow(AX)^T(AX)=0\Rightarrow\|AX\|^2=0\Rightarrow AX=0\Rightarrow X=0$, car nous avons vu dans la question précédente que $\mathrm{Ker}\,(A)=\{0\}$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(A^TA)=\{0\}$, donc A^TA est inversible.
   On constate donc que $X_0=(A^TA)^{-1}A^TB$.

Ex 39 : Polynômes orthogonaux :

1. Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires (coefficient dominant qui vaut un) tels que $\deg P_k=k$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$.
   De plus : $\forall n\in\mathbb{N},\ vect(P_0,\dots,P_n)=\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ (P_n|Q)=0$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $Q_n=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)$, où $\beta_1,\dots,\beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_n dans $]a,b[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n=1$.
   (a) Montrer que P_nQ_n est de signe constant sur $]a,b[$.
   (b) Montrer que si on a $d^\circ Q_n<n$, alors on a $P_nQ_n=0$ et donc une contradiction.
   (c) En déduire que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples et dans $]a;b[$.
4. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que pour tout $n\in\mathbb{N}$
   $$XP_{n+1}=P_{n+2}+b_nP_{n+1}+a_nP_n \text{ avec } a_n=\frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n=\frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}.$$
   (On commencera par écrire $XP_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}c_kP_k$ et on cherchera à calculer les c_k.)

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}(n)$: il existe une unique base orthogonale $(P_0,\dots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ d^\circ(P_k)=k$ et tous ces polynômes ont pour coefficient dominant 1.
   $\mathcal{P}(0)$: Le seul polynôme unitaire de degré 0 est 1.
   Soit $n\in\mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme $vect(P_0,\dots,P_n)=\mathbb{R}_n[X]$, nous devons construire $P_{n+1}=X^{n+1}+Q$, avec $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et tel que P_{n+1} soit dans $\mathbb{R}_n[X]^\perp$. Ainsi on veut $X^{n+1}=\underbrace{P_{n+1}}_{\in\mathbb{R}_n[X]^\perp}+\underbrace{(-Q)}_{\in\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui équivaut à dire que $-Q$ est LA projection orthogonale de X^{n+1} sur $\mathbb{R}_n[X]$. Cela assure l'existence et l'unicité de Q et donc de P_{n+1}. $(P_0,\dots,P_{n+1})$ est une famille libre (degré échelonné). C'est aussi une famille à $n+2$ polynômes de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui est de dimension $n+2$. C'est donc une base de cet espace, d'où $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

2. Ainsi $\mathbb{R}_{n-1}[X] = vect(P_0, ..., P_{n-1})$. Comme P_n est orthogonal à $P_0, ..., P_{n-1}$, alors P_n est dans $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.

3. (a) On a une factorisation de P de la forme : $P_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2s_i+1}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{2t_i}S(X)$ où S est un polynôme sans racines dans $]a,b[$ (les γ_i sont les racines de multiplicité paire de P_n dans $]a,b[$). Comme S est peut être considéré comme une fonction polynôme sur $]a,b[$, alors S est continue sur cet intervalle et ne s'y annule jamais. Ainsi S garde un signe constant sur $]a,b[$ (si S change de signe sur $]a,b[$, alors grâce au théorème des valeurs intermédiaires, S s'annule au moins une fois sur $]a,b[$).
On a donc : $Q_nP_n = \prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{2(s_i+1)}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{2t_i}S = \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\beta_i)^{s_i+1}\prod_{i=1}^{p}(X-\gamma_i)^{t_i}\right)^2 S$
et donc P_nQ_n est de signe constant sur $]a,b[$.

(b) On suppose $d°Q_n < n$. Comme Q_n est dans $\mathbb{R}_{n-1}[X] = vect(P_0, ..., P_{n-1})$, alors $(P_n|Q_n) = 0$, car P_n est orthogonal à $P_0, ..., P_{n-1}$. Ainsi $0 = \int_a^b P_nQ_nw$. Or la fonction $x \mapsto P_n(x)Q_n(x)\omega(x)$ est continue et de signe constant sur $]a,b[$, donc elle est nulle sur $[a,b]$. Comme ω ne s'annule jamais sur $]a,b[$, alors P_nQ_n est nulle sur $]a,b[$. Ainsi le polynôme P_nQ_n a une infinité de racines, donc : $d°Q_n < n \Rightarrow P_nQ_n = 0$.
Cela est impossible car aucun de ces deux polynômes n'est nul ($\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre).

(c) Par construction, le degré de Q_n ne peut dépasser n. Grâce à la question précédente, on a : $\underline{d°Q_n = n}$.
Ainsi on a $r = n$, donc $\beta_1, ..., \beta_n$ sont n racines distinctes de P_n qui est de degré n. Ainsi $\beta_1, ..., \beta_n$ constitue la liste complète des racines de P_n avec multiplicité (donc toutes ces racines sont de multiplicité un, sinon on dépasse le degré de P_n).

4. XP_{n+1} est dans $\mathbb{R}_{n+2}[X] = vect(P_0, ..., P_{n+2})$. Ainsi il existe des réels $c_0, ..., c_{n+2}$ tels que : $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$.
• Soit $l \in [\![0, n-1]\!]$. On a par orthogonalité de $(P_0, ..., P_{n+2})$: $(XP_{n+1}|P_l) = c_l\|P_l\|^2$. Or : $(XP_{n+1}|P_l) = \int_a^b XP_{n+1}P_l\omega = \int_a^b P_{n+1}XP_l\omega = (P_{n+1}|XP_l)$. Or XP_l est dans $\mathbb{R}_n[X] = vect(P_0, ..., P_n)$ et comme P_{n+1} est orthogonal à $P_0, ..., P_n$, alors $(XP_{n+1}|P_l) = 0$, puis $0 = c_l\|P_l\|^2$. Comme P_l est non nul, alors $\underline{c_l = 0}$.
• Le même raisonnement conduit à $(XP_{n+1}|P_{n+1}) = c_{n+1}\|P_{n+1}\|^2$, donc $\underline{c_{n+1} = \dfrac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}}$.
• Par construction de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le polynôme XP_{n+1} est de degré $n+2$ et de coeffient dominant un. Dans la somme $\sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$, seul P_{n+2} est de degré $n+2$ et son coefficient dominant est un. En identifiant le coefficient de dominant de degré $n+2$ dans $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_kP_k$, on trouve $\underline{c_{n+2} = 1}$.
• En raisonnant comme dans le premier point, on a : $(XP_{n+1}|P_n) = c_n\|P_n\|^2$ et $(XP_{n+1}|P_n) = (P_{n+1}|XP_n)$. Or en appliquant les raisonnements précédents à P_n au lieu de P_{n+1}, on a : $XP_n = P_{n+1} + c'_nP_n + c'_{n-1}P_{n-1}$. Ainsi par orthogonalité de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $(P_{n+1}|XP_n) = (P_{n+1}|P_{n+1}) = \|P_{n+1}\|^2$. Ainsi on a : $\underline{c_n = \dfrac{\|P_{n+1}\|^2}{\|P_n\|^2}}$.

Ex 40 : Résoudre sur les intervalles appropriés : $x(1-x)y' - y = x$.
Chercher les solutions définies sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$.

Sur $]-\infty,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, on résout : $y'-\dfrac{1}{x(1-x)}y=\dfrac{1}{1-x}$.

Équation homogène : $y'-\dfrac{1}{x(1-x)}y=0$.

On a $\displaystyle\int \frac{1}{x(1-x)}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\ln|x|-\ln|1-x|$ Une primitive de $x\mapsto -\dfrac{1}{x(1-x)}$ est donc : $x\mapsto -\ln\left|\dfrac{x}{1-x}\right|$. Ainsi $\mathcal{S}_H=\left\{x\mapsto \lambda e^{\ln\left|\frac{x}{1-x}\right|},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\mapsto\lambda\left|\dfrac{x}{1-x}\right|,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Sur $]0,1[$, on a : $\mathcal{S}_H=\left\{x\mapsto\lambda\dfrac{x}{1-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$. Il est intéressant de ne plus avoir de valeurs absolues dans $\mathcal{S}_H$, afin de simplifier ensuite la variation de la constante.

Sur $]-\infty,0[$ ou $]1,+\infty[$, on a : $\mathcal{S}_H=\left\{x\mapsto-\lambda\dfrac{x}{1-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\mapsto\mu\dfrac{x}{1-x},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$, car $\mu=-\lambda$ décrit $\mathbb{R}$ quand λ décrit $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, $\mathcal{S}_H=\left\{x\mapsto\mu\dfrac{x}{1-x},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$.

Solution particulière : on la recherche sous la forme $x\mapsto\mu(x)\dfrac{x}{1-x}$. On doit donc avoir : $\mu'(x)\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$, soit : $\mu'(x)=\dfrac{1}{x}$, donc $\mu(x)=\ln|x|$ convient.

Ainsi $\mathcal{S}=\left\{x\mapsto\mu\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x\ln|x|}{1-x},\ \mu\in\mathbb{R}\right\}$.

<u>Recollement en 1</u> :

- Analyse : soit y une éventuelle solution sur $]0,+\infty[$. Il existe $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ tels que :

$$y(x)=\begin{cases}\mu_1\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si}\quad x\in]1,+\infty[\\ \mu_2\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si}\quad x\in]0,1[\end{cases}.$$

Or $\dfrac{\ln(x)}{1-x}=\dfrac{\ln(1+x-1)}{1-x}\underset{x\to1}{\sim}\dfrac{x-1}{1-x}=-1$ et donc : $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x\ln(x)}{1-x}=-1$.

Par ailleurs $\displaystyle\lim_{x\to1}\left|\frac{x}{1-x}\right|=+\infty$.

Comme y est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors elle est continue en 1 et donc $\mu_1=\mu_2=0$.

- Examen : on pose $y:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si}\quad x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\\ -1 & \text{si}\quad x=1\end{cases}$.

Une telle fonction est dérivable et solution sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$.

Étudions la dérivabilité en 1. On a $y(1+h)=\dfrac{(1+h)\ln(1+h)}{-h}=-\dfrac{(1+h)(h-h^2/2+o(h^2))}{h}=-\dfrac{h+h^2/2+o(h^2)}{h}=-1-h/2+o(h)$, donc y admet un $DL_1(1)$, donc elle est dérivable en 1 et $y'(1)=-1/2$.

Par ailleurs $1\times(1-1)y'(1)-y(1)=1$, donc y est aussi solution en 1.

Il n'y a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$ à savoir $y:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si}\quad x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\\ -1 & \text{si}\quad x=1\end{cases}$.

<u>Recollement en 0</u> :

Soit y une éventuelle solution sur $]-\infty,1[$. Il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall x\in]0,1[,\ \ y(x)=\mu\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{x\ln(x)}{1-x}$ et par continuité en 0, on a : $y(0)=\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\mu\frac{x}{1-x}+\frac{x\ln(x)}{1-x}\right)=0$, par croissance comparée.

Soit $x\in]0,1[$, on a : $\dfrac{y(x)-y(0)}{x}=\mu\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{\ln(x)}{1-x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}-\infty$, donc aucun prolongement en 0 ne sera dérivable, donc il n'y a pas de solutions sur $]-\infty,1[$.

Ex 41 : 1. Déterminer les fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulles, telles que :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

2. Même question, en supposant f seulement continue.

1. Soit f une éventuelle solution.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Avec $y=0$, on trouve : $2f(x)+2f(0)f(x)$, puis $f(0)=1$.
Par ailleurs pour $x=0$, on a : $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)+f(-y)=2f(y)$ puis f est paire.
En dérivant deux fois la relation par rapport à x, on a :
$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f(y)$. Avec $x=0$ et le fait que f'' soit paire, on a : $\forall y \in \mathbb{R},\ f''(y)=\alpha f(y)$, avec $\alpha = f''(0)$.
   - Si $\alpha > 0$, alors en posant $\omega = \sqrt{\alpha}$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=A\,\mathrm{ch}\,(\omega x)+B\,\mathrm{sh}\,(\omega x)$. La parité et $f(0)=1$, donnent : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{ch}\,(\omega x)$.
   - Si $\alpha = 0$, alors $f''=0$, donc f est de la forme $x \mapsto Ax+B$, puis $f=B$.
   - Si $\alpha < 0$, en posant $\omega = \sqrt{-\alpha}$, on trouve que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\cos(\omega x)$.

   On vérifie immédiatement la réciproque.
2. Soit f une solution. Nous allons montrer que f est encore de classe $\mathcal{C}^2$, ce qui permettra de se ramener à la question précédente.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$, qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F(a) \neq 0$, sinon $F=0$ puis $0=F'=f$, ce qui est exclu.
On a donc en intégrant par rapport à x : $\displaystyle\int_0^a [f(x+y)+f(x-y)]dx = 2f(y)\int_0^a f(x)dx$,
puis : $\displaystyle\int_y^{a+y} f + \int_{-y}^{a-y} f = 2f(y)F(a)$, donc :
$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)=\dfrac{F(a+y)-F(y)+F(a-y)-F(-y)}{2F(a)}$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis F est de classe $\mathcal{C}^2$, puis f est de classe $\mathcal{C}^2$.

Ex 42 : 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Trouver un équivalent de $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}+\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^\alpha}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, avec $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right) - n$, pour n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha}\right)$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1]$ et $\left(\dfrac{k}{n}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision régulière de $[0,1]$, donc grâce aux sommes de Riemann, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) =$
$\displaystyle\frac{1}{1-0}\int_0^1 f = \int_0^1 (1+t)^{-\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{(1+t)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_0^1 = \dfrac{2^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$.
Ainsi $u_n \sim \begin{cases} \dfrac{2^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln(2) & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)-1\right]$.
Comme $\mathrm{ch}\,(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ Nous allons donc approcher u_n par $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(n+k)}$. Étudions l'erreur

commise par cette approximation.

Soit $x \in [0,1]$. La fonction ch est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,x]$ et :

$\forall t \in [0,x],\ |\operatorname{ch}^{(3)}(t)| = |\operatorname{sh}(t)| = \operatorname{sh}(t) \leq \operatorname{sh}(1)$ (sh est croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$).

Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et x, on a :

$$\left|\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(0) - \operatorname{ch}'(0)x - \frac{\operatorname{ch}''(0)x^2}{2}\right| = \left|\operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{(x-0)^3 \operatorname{sh}(1)}{6} = \frac{x^3 \operatorname{sh}(1)}{6}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$ est bien dans $[0,1]$, on a :

$\left|\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - 1 - \dfrac{1}{2(n+k)}\right| \leq \dfrac{\operatorname{sh}(1)}{6(n+k)^{3/2}}$ et :

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - 1 - \frac{1}{2(n+k)}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|\operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - 1 - \frac{1}{2(n+k)}\right| \leq$$
$$\frac{\operatorname{sh}(1)}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^{3/2}} \leq \frac{\operatorname{sh}(1)}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{\operatorname{sh}(1)}{6} n \times \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{\operatorname{sh}(1)}{6n^{1/2}}.$$

Ainsi : $u_n - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et grâce àla première question, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln(2)$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ln(2)}{2}$.