



Planche 1 :

1. Soient  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec  $X$  et  $Y$  indépendantes. On pose  $Z = XY$ .
  - (a) Déterminer  $E(Z)$ .
  - (b) Quelle est la loi de  $Z$  ?
  - (c) Quelle est la variance de  $Z$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .
  - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  (on pourra traiter les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$  par  $X^2 + X + 1$ .

Planche 1 :

1. Soient  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec  $X$  et  $Y$  indépendantes. On pose  $Z = XY$ .
  - (a) Déterminer  $E(Z)$ .
  - (b) Quelle est la loi de  $Z$  ?
  - (c) Quelle est la variance de  $Z$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .
  - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  (on pourra traiter les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$  par  $X^2 + X + 1$ .

Planche 1 :

1. Soient  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec  $X$  et  $Y$  indépendantes. On pose  $Z = XY$ .
  - (a) Déterminer  $E(Z)$ .
  - (b) Quelle est la loi de  $Z$  ?
  - (c) Quelle est la variance de  $Z$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .
  - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  (on pourra traiter les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$  par  $X^2 + X + 1$ .

Planche 1 :

1. Soient  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec  $X$  et  $Y$  indépendantes. On pose  $Z = XY$ .
  - (a) Déterminer  $E(Z)$ .
  - (b) Quelle est la loi de  $Z$  ?
  - (c) Quelle est la variance de  $Z$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .
  - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  (on pourra traiter les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$  par  $X^2 + X + 1$ .

Planche 1 :

1. Soient  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec  $X$  et  $Y$  indépendantes. On pose  $Z = XY$ .
  - (a) Déterminer  $E(Z)$ .
  - (b) Quelle est la loi de  $Z$  ?
  - (c) Quelle est la variance de  $Z$  ?
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ .
  - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  (on pourra traiter les cas  $a = b$  et  $a \neq b$ ).
  - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$  par  $X^2 + X + 1$ .

Planche 2 :

1. Soit  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .

- (a) Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) Donner un équivalent de  $f$  en 0.
- (c) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{Z}$  et :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X = -n)$  et  $|X|$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver la loi de  $X$ .
- (b) Quel est le rang de  $A$ .
- (c) Quelle est le loi de  $\text{rg}(A)$  ?

Planche 2 :

1. Soit  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .

- (a) Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) Donner un équivalent de  $f$  en 0.
- (c) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{Z}$  et :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X = -n)$  et  $|X|$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver la loi de  $X$ .
- (b) Quel est le rang de  $A$ .
- (c) Quelle est le loi de  $\text{rg}(A)$  ?

Planche 2 :

1. Soit  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .

- (a) Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) Donner un équivalent de  $f$  en 0.
- (c) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{Z}$  et :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X = -n)$  et  $|X|$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver la loi de  $X$ .
- (b) Quel est le rang de  $A$ .
- (c) Quelle est le loi de  $\text{rg}(A)$  ?

Planche 2 :

1. Soit  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ .

- (a) Montrer que  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- (b) Donner un équivalent de  $f$  en 0.
- (c) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $\Omega$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{Z}$  et :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X = -n)$  et  $|X|$  suit une loi de Poisson de paramètre  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Trouver la loi de  $X$ .
- (b) Quel est le rang de  $A$ .
- (c) Quelle est le loi de  $\text{rg}(A)$  ?

Planche 3 :

1. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose  $\varphi_A(X) = X^T AX$ , pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
  - (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.
2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires i.i.d. qui suivent toutes une loi  $\mathcal{U}\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $E(tS_n)$ .
  - (b) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$ .
  - (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$ .

Planche 3 :

1. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose  $\varphi_A(X) = X^T AX$ , pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
  - (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.
2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires i.i.d. qui suivent toutes une loi  $\mathcal{U}\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $E(tS_n)$ .
  - (b) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$ .
  - (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$ .

Planche 3 :

1. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose  $\varphi_A(X) = X^T AX$ , pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
  - (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.
2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires i.i.d. qui suivent toutes une loi  $\mathcal{U}\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $E(tS_n)$ .
  - (b) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$ .
  - (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$ .

Planche 3 :

1. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose  $\varphi_A(X) = X^T AX$ , pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
  - (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.
2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires i.i.d. qui suivent toutes une loi  $\mathcal{U}\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $E(tS_n)$ .
  - (b) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$ .
  - (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$ .

Planche 3 :

1. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soit  $M \in S_n(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose  $\varphi_A(X) = X^T AX$ , pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
  - (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_A^{-1}(\{1\})$  soit un compact non vide.
2. Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires i.i.d. qui suivent toutes une loi  $\mathcal{U}\{-1, 1\}$ . On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .
  - (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{R}_+^*$ . Calculer  $E(tS_n)$ .
  - (b) Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$ .
  - (c) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , montrer que :  $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$ .

Planche 4 :

1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto -A + tr(A)I_n \end{cases}$  .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
- (c) Montrer que  $\text{Ker}(tr)$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (d) Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

2. On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

- (a) Quelle est la loi de  $X$  ?
- (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Planche 4 :

1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto -A + tr(A)I_n \end{cases}$  .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
- (c) Montrer que  $\text{Ker}(tr)$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (d) Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

2. On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

- (a) Quelle est la loi de  $X$  ?
- (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Planche 4 :

1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto -A + tr(A)I_n \end{cases}$  .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
- (c) Montrer que  $\text{Ker}(tr)$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (d) Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

2. On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

- (a) Quelle est la loi de  $X$  ?
- (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Planche 4 :

1. Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto -A + tr(A)I_n \end{cases}$  .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Déterminer le spectre de  $\varphi$ .
- (c) Montrer que  $\text{Ker}(tr)$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- (d) Est-ce que  $\varphi$  est diagonalisable ?

2. On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

- (a) Quelle est la loi de  $X$  ?
- (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 5 :

1. Soit  $T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto (w_n) \end{cases}$ , avec :  $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ .

Déterminer les éléments propres de  $T$ .

2. Soient  $X_1, X_2, X_3$  trois variables aléatoires qui suivent une loi  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ .

(a) Déterminer  $(Z \leq n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

(b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres. Déterminer l'espérance de  $Z$ , avec  $Z$  la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 6 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On considère  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  tel que :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
  - (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose :  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
  - (b) Montrer que si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors  $A + B$  est fermé.

Planche 6 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On considère  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  tel que :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
  - (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose :  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
  - (b) Montrer que si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors  $A + B$  est fermé.

Planche 6 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On considère  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  tel que :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
  - (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose :  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
  - (b) Montrer que si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors  $A + B$  est fermé.

Planche 6 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On considère  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  tel que :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
  - (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose :  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
  - (b) Montrer que si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors  $A + B$  est fermé.

Planche 6 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On considère  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  tel que :  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable.
  - (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $\varphi$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On pose :  $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont compacts, alors  $A + B$  est compact.
  - (b) Montrer que si  $A$  est fermé et  $B$  compact, alors  $A + B$  est fermé.

Planche 7 :

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{(n^2)}$

- (a) Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .
- (b) Trouver un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Planche 7 :

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{(n^2)}$

- (a) Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .
- (b) Trouver un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Planche 7 :

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{(n^2)}$

- (a) Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .
- (b) Trouver un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Planche 7 :

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{(n^2)}$

- (a) Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .
- (b) Trouver un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Planche 7 :

1. Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{(n^2)}$

- (a) Déterminer l'intervalle de définition de  $f$ .
- (b) Trouver un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 1.

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer  $A^2$ , puis  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Planche 8 :

1. Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $u = f^* \circ f$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que :  $g^2 = u$ .
2. Soit  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer  $\varphi'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (c) En déduire  $\varphi(x)$ .

Planche 8 :

1. Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $u = f^* \circ f$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que :  $g^2 = u$ .
2. Soit  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer  $\varphi'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (c) En déduire  $\varphi(x)$ .

Planche 8 :

1. Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $u = f^* \circ f$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que :  $g^2 = u$ .
2. Soit  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer  $\varphi'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (c) En déduire  $\varphi(x)$ .

Planche 8 :

1. Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $u = f^* \circ f$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que :  $g^2 = u$ .
2. Soit  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer  $\varphi'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (c) En déduire  $\varphi(x)$ .

Planche 8 :

1. Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $u = f^* \circ f$ .
  - (a) Montrer que  $u$  est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ .
  - (b) Montrer qu'il existe  $g \in \mathcal{S}(E)$  tel que :  $g^2 = u$ .
2. Soit  $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Calculer  $\varphi'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
  - (c) En déduire  $\varphi(x)$ .

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 9 :

1. Soient  $a > 0$  et  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornée. L'équation  $(E) : y' - ay = h(t)$  admet-elle une solution bornée dans  $\mathbb{R}_+$  ?  
Donner ces solutions.
2. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Démontrer que  $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 10 :

1. Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1 - x)$ .
  2. Soient  $X_1, X_2$  des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.  
Soit  $Y$  une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que  $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in ]0, 1[$ .  
On pose  $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$ .
- (a) On suppose que  $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit inversible.
- (b) On suppose que  $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Calculer la probabilité que  $M$  soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$ , puis l'ensemble de définition de sa somme où :

$$u_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right).$$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Calculer la probabilité que  $A$  soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$ , puis l'ensemble de définition de sa somme où :

$$u_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right).$$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Calculer la probabilité que  $A$  soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$ , puis l'ensemble de définition de sa somme où :

$$u_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right).$$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Calculer la probabilité que  $A$  soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$ , puis l'ensemble de définition de sa somme où :

$$u_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right).$$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Calculer la probabilité que  $A$  soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$ , puis l'ensemble de définition de sa somme où :

$$u_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right).$$

2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que  $A$  est inversible.
- (b) Calculer la probabilité que  $A$  soit diagonalisable.

Planche 12 :

- (a) Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}[X]$ .  
(b) Calculer  $\varphi(X^p, X^q)$  pour  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .  
(c) Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ . On note  $S(x)$  sa somme lorsque cela a un sens.  
(a) Étudier sa convergence simple.  
(b) Converge-t-elle normalement ?  
(c) Uniformément ?  
(d) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
(e) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .  
(f) Donner une expression de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Planche 12 :

- (a) Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}[X]$ .  
(b) Calculer  $\varphi(X^p, X^q)$  pour  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .  
(c) Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ . On note  $S(x)$  sa somme lorsque cela a un sens.  
(a) Étudier sa convergence simple.  
(b) Converge-t-elle normalement ?  
(c) Uniformément ?  
(d) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
(e) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .  
(f) Donner une expression de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Planche 12 :

- (a) Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}[X]$ .  
(b) Calculer  $\varphi(X^p, X^q)$  pour  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .  
(c) Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ . On note  $S(x)$  sa somme lorsque cela a un sens.  
(a) Étudier sa convergence simple.  
(b) Converge-t-elle normalement ?  
(c) Uniformément ?  
(d) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
(e) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .  
(f) Donner une expression de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Planche 12 :

- (a) Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$  définit un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}[X]$ .  
(b) Calculer  $\varphi(X^p, X^q)$  pour  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .  
(c) Orthonormaliser la base  $(1, X, X^2)$  à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Soit la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ . On note  $S(x)$  sa somme lorsque cela a un sens.  
(a) Étudier sa convergence simple.  
(b) Converge-t-elle normalement ?  
(c) Uniformément ?  
(d) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .  
(e) Déterminer la limite de  $S$  en  $+\infty$ .  
(f) Donner une expression de  $S$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 13 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.
  - (a) Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est  $A$ . Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t^n}\right)$  où  $t > 0$ .
  - (b) Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose :  $\text{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M = PNP^{-1}, P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$ . Montrer que  $N$  est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de  $\text{Sim}(N)$ .
2. Existence et calcul de  $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$  (on pourra faire apparaître une somme).

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 14 :

1. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace euclidien. On définit  $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$  où  $a, b \in E$ . Les espaces  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires ?
2. On pose  $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ .
  - (a) Justifier que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .
  - (b) En déterminant une relation de récurrence entre  $a_{n+1}$  et  $a_n$ , montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle  $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$ . En déduire l'expression de  $f$ .

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 15 :

1. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme étant euclidien canonique. Pour  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (1) :  $A$  est antisymétrique ;
  - (2) : Les solutions de  $X' = AX$  sont de norme constante.
2. Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $\Phi$  défini par  $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$  pour tout  $P \in E$ .
  - (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
  - (b) Calculer les éléments propres de  $\Phi$  (vecteurs propres et valeurs propres),  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

Planche 16 :

1. Soit  $n \geq 3$ ,  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 
  - (a)  $A$  est elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$
  - (b) Déterminer ses éléments propres.
2. On note  $S$  l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation défini par :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $xy'' + 2y' - xy = 0$ .
  - (a) Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à  $S$ .
  - (b) On note  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ . Exprimer  $f$  à l'aide de fonction(s) usuelle(s).
  - (c) Justifier que  $f \in S$ .
  - (d) Déterminer  $S$  à l'aide du changement de variable  $u = xy$ .

Planche 16 :

1. Soit  $n \geq 3$ ,  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 
  - (a)  $A$  est elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$
  - (b) Déterminer ses éléments propres.
2. On note  $S$  l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation défini par :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $xy'' + 2y' - xy = 0$ .
  - (a) Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à  $S$ .
  - (b) On note  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ . Exprimer  $f$  à l'aide de fonction(s) usuelle(s).
  - (c) Justifier que  $f \in S$ .
  - (d) Déterminer  $S$  à l'aide du changement de variable  $u = xy$ .

Planche 16 :

1. Soit  $n \geq 3$ ,  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 
  - (a)  $A$  est elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$
  - (b) Déterminer ses éléments propres.
2. On note  $S$  l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation défini par :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $xy'' + 2y' - xy = 0$ .
  - (a) Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à  $S$ .
  - (b) On note  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ . Exprimer  $f$  à l'aide de fonction(s) usuelle(s).
  - (c) Justifier que  $f \in S$ .
  - (d) Déterminer  $S$  à l'aide du changement de variable  $u = xy$ .

Planche 16 :

1. Soit  $n \geq 3$ ,  $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tel que :  $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 
  - (a)  $A$  est elle diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$
  - (b) Déterminer ses éléments propres.
2. On note  $S$  l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation défini par :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $xy'' + 2y' - xy = 0$ .
  - (a) Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à  $S$ .
  - (b) On note  $f : x \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ . Exprimer  $f$  à l'aide de fonction(s) usuelle(s).
  - (c) Justifier que  $f \in S$ .
  - (d) Déterminer  $S$  à l'aide du changement de variable  $u = xy$ .

Planche 17 :

1. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .  $X$  est le numéro de la boule tirée au hasard.

(a) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

On considère désormais une urne contenant  $k$  boules numérotées  $k$  pour chaque  $k$  de 1 à  $n$ .

(b) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

2. On considère l'équation différentielle suivante :  $xy' + 3y = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$

(a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Planche 17 :

1. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .  $X$  est le numéro de la boule tirée au hasard.

(a) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

On considère désormais une urne contenant  $k$  boules numérotées  $k$  pour chaque  $k$  de 1 à  $n$ .

(b) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

2. On considère l'équation différentielle suivante :  $xy' + 3y = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$

(a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Planche 17 :

1. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .  $X$  est le numéro de la boule tirée au hasard.

(a) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

On considère désormais une urne contenant  $k$  boules numérotées  $k$  pour chaque  $k$  de 1 à  $n$ .

(b) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

2. On considère l'équation différentielle suivante :  $xy' + 3y = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$

(a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Planche 17 :

1. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .  $X$  est le numéro de la boule tirée au hasard.

(a) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

On considère désormais une urne contenant  $k$  boules numérotées  $k$  pour chaque  $k$  de 1 à  $n$ .

(b) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .

2. On considère l'équation différentielle suivante :  $xy' + 3y = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$

(a) Résoudre dans  $\mathbb{R}^*$ , puis dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 18 :

1. Donner la nature des séries de termes général  $u_n$  avec :

(a)  $u_n = n^a \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$ , pour  $a$  réel.

(b)  $u_n = n^{1/n^2} - 1$ .

2. On munit  $\mathbb{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de  $F$  et de  $F^\perp$  pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 19 :

1. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  de rang 2 tel que  $u^2 = 0$ .

(a) Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  soit 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ .

Planche 20 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .
  - (a) Calculer  $u^2(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$ .
  - (b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par la restriction de  $u$  à  $\text{Im } u$ , montrer que  $v$  est un isomorphisme.
  - (c) Montrer que le rang de  $u$  est pair.
2. Quand la série converge, on définit :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $S$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Calculer  $S'(1)$ .

Planche 20 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .
  - (a) Calculer  $u^2(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$ .
  - (b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par la restriction de  $u$  à  $\text{Im } u$ , montrer que  $v$  est un isomorphisme.
  - (c) Montrer que le rang de  $u$  est pair.
2. Quand la série converge, on définit :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $S$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Calculer  $S'(1)$ .

Planche 20 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .
  - (a) Calculer  $u^2(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$ .
  - (b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par la restriction de  $u$  à  $\text{Im } u$ , montrer que  $v$  est un isomorphisme.
  - (c) Montrer que le rang de  $u$  est pair.
2. Quand la série converge, on définit :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $S$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Calculer  $S'(1)$ .

Planche 20 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .
  - (a) Calculer  $u^2(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$ .
  - (b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par la restriction de  $u$  à  $\text{Im } u$ , montrer que  $v$  est un isomorphisme.
  - (c) Montrer que le rang de  $u$  est pair.
2. Quand la série converge, on définit :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $S$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Calculer  $S'(1)$ .

Planche 20 :

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $u$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^3 + u = 0$ .
  - (a) Calculer  $u^2(x)$  pour  $x \in \text{Im } u$ .
  - (b) Soit  $v$  l'endomorphisme induit par la restriction de  $u$  à  $\text{Im } u$ , montrer que  $v$  est un isomorphisme.
  - (c) Montrer que le rang de  $u$  est pair.
2. Quand la série converge, on définit :  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ .
  - (a) Montrer que  $S$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Calculer  $S'(1)$ .

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 21 :

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\int_0^{+\infty} x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$  quand  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On considère  $\phi$  définie sur  $\mathcal{L}(E)$  par  $\phi(v) = u \circ v$ .
  - (a) Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$ .
  - (b) Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$ .
  - (c) Montrer que si  $v$  est un vecteur propre de  $\phi$  associé à  $\lambda$ , alors  $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ .
  - (d) Montrer que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\phi$  l'est aussi.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 22 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$ .
  - (a) L'endomorphisme  $\psi$  est-il diagonalisable ?
  - (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
2. (a) Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Donner une valeur approchée de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

Planche 23 :

1. Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  défini par  $M \mapsto (\text{Tr } M)I_n - M$ .
  - (a) Montrer que  $-1 \in \text{Sp}(\phi)$  et déterminer la dimension de  $E_{-1}(\phi)$ .
  - (b) Est-ce que  $\phi$  est diagonalisable ?
  - (c) Calculer  $\det(\phi)$ .

2. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

- (a) Déterminer la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Déterminer la limite de  $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Planche 23 :

1. Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  défini par  $M \mapsto (\text{Tr } M)I_n - M$ .
  - (a) Montrer que  $-1 \in \text{Sp}(\phi)$  et déterminer la dimension de  $E_{-1}(\phi)$ .
  - (b) Est-ce que  $\phi$  est diagonalisable ?
  - (c) Calculer  $\det(\phi)$ .

2. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

- (a) Déterminer la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Déterminer la limite de  $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Planche 23 :

1. Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  défini par  $M \mapsto (\text{Tr } M)I_n - M$ .
  - (a) Montrer que  $-1 \in \text{Sp}(\phi)$  et déterminer la dimension de  $E_{-1}(\phi)$ .
  - (b) Est-ce que  $\phi$  est diagonalisable ?
  - (c) Calculer  $\det(\phi)$ .

2. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

- (a) Déterminer la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Déterminer la limite de  $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Planche 23 :

1. Soit  $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  défini par  $M \mapsto (\text{Tr } M)I_n - M$ .
  - (a) Montrer que  $-1 \in \text{Sp}(\phi)$  et déterminer la dimension de  $E_{-1}(\phi)$ .
  - (b) Est-ce que  $\phi$  est diagonalisable ?
  - (c) Calculer  $\det(\phi)$ .

2. Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

- (a) Déterminer la limite éventuelle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (b) Déterminer la limite de  $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 24 :

1. Déterminer toutes les fonctions  $f$  développables en série entière sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient  $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ .
2. Soit  $P$  un polynôme annulateur d'une matrice carrée  $M$  non inversible. Montrer que  $P(0) = 0$ .

Planche 25 :

1. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum S_n x^n$ . On note  $R$  un tel rayon de convergence.

On définit  $f$  par la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]-R; R[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$ .

(b) Déterminer  $f$  (On pourra remarquer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* x^n = A_n - A_{n-1}$  avec  $A_n = \sum_{k=0}^n x^k$ ).

2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  fixés. On pose :  $\forall x \in E, u \otimes v(x) = \langle v | x \rangle u$

(a) Montrer que  $u \otimes v$  est un endomorphisme et déterminer son rang.

(b) Déterminer les éléments propres de  $u \otimes v$ . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Planche 25 :

1. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum S_n x^n$ . On note  $R$  un tel rayon de convergence.

On définit  $f$  par la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]-R; R[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$ .

(b) Déterminer  $f$  (On pourra remarquer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* x^n = A_n - A_{n-1}$  avec  $A_n = \sum_{k=0}^n x^k$ ).

2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  fixés. On pose :  $\forall x \in E, u \otimes v(x) = \langle v | x \rangle u$

(a) Montrer que  $u \otimes v$  est un endomorphisme et déterminer son rang.

(b) Déterminer les éléments propres de  $u \otimes v$ . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Planche 25 :

1. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum S_n x^n$ . On note  $R$  un tel rayon de convergence.

On définit  $f$  par la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]-R; R[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$ .

(b) Déterminer  $f$  (On pourra remarquer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* x^n = A_n - A_{n-1}$  avec  $A_n = \sum_{k=0}^n x^k$ ).

2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  fixés. On pose :  $\forall x \in E, u \otimes v(x) = \langle v | x \rangle u$

(a) Montrer que  $u \otimes v$  est un endomorphisme et déterminer son rang.

(b) Déterminer les éléments propres de  $u \otimes v$ . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Planche 25 :

1. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum S_n x^n$ . On note  $R$  un tel rayon de convergence.

On définit  $f$  par la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]-R; R[ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$ .

(b) Déterminer  $f$  (On pourra remarquer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* x^n = A_n - A_{n-1}$  avec  $A_n = \sum_{k=0}^n x^k$ ).

2. Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  fixés. On pose :  $\forall x \in E, u \otimes v(x) = \langle v | x \rangle u$

(a) Montrer que  $u \otimes v$  est un endomorphisme et déterminer son rang.

(b) Déterminer les éléments propres de  $u \otimes v$ . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Planche 26 :

1. On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère  $f : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de  $Y$ .

Planche 26 :

1. On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère  $f : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de  $Y$ .

Planche 26 :

1. On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère  $f : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de  $Y$ .

Planche 26 :

1. On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère  $f : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de  $Y$ .

Planche 26 :

1. On se place dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On considère  $f : P \mapsto X(X + 1)P' - nXP$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
  - (b) Déterminer les éléments propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
2. Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
  - (a) On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de  $Y$ .

Planche 27 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
  - (a) Montrer que  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est libre.
  - (b) Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AB = BA$ . Montrer que  $B$  est combinaison linéaire de  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ .
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ .

  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
  - (b) Montrer que  $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ .
  - (c) Déterminer un équivalent de  $S_n$ .

Planche 27 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
  - (a) Montrer que  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est libre.
  - (b) Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AB = BA$ . Montrer que  $B$  est combinaison linéaire de  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ .
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ .

  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
  - (b) Montrer que  $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ .
  - (c) Déterminer un équivalent de  $S_n$ .

Planche 27 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
  - (a) Montrer que  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est libre.
  - (b) Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AB = BA$ . Montrer que  $B$  est combinaison linéaire de  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ .
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ .

  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
  - (b) Montrer que  $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ .
  - (c) Déterminer un équivalent de  $S_n$ .

Planche 27 :

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
  - (a) Montrer que  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$  est libre.
  - (b) Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $AB = BA$ . Montrer que  $B$  est combinaison linéaire de  $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ .
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ . On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$ .

  - (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.
  - (b) Montrer que  $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ .
  - (c) Déterminer un équivalent de  $S_n$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 28 :

1. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $n$ . Montrer l'existence d'un polynôme  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{P(e^{i\theta})} = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$ .  
2. En déduire les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
2. Existence et calcul de  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 29 :

1. Soient  $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ .
  1. Supposons que  $n$  divise  $m$ , Montrer que  $X^n - 1$  divise  $X^m - 1$ .
  2. Nous ne supposons plus que  $n$  divise  $m$ .  
Calculer le résultat de la division euclidienne de  $X^m - 1$  par  $X^n - 1$
2. Convergence de  $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$ .

Planche 30 :

1. Soit  $E$  un ev de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}^2$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors elle est valeur propre de  $v \circ u$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .
  1. déterminer la limite de  $(a_n)$ .
  2. Déterminer une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
  3. Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  ?
  4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 30 :

1. Soit  $E$  un ev de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}^2$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors elle est valeur propre de  $v \circ u$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .
  1. déterminer la limite de  $(a_n)$ .
  2. Déterminer une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
  3. Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  ?
  4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 30 :

1. Soit  $E$  un ev de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}^2$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors elle est valeur propre de  $v \circ u$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .
  1. déterminer la limite de  $(a_n)$ .
  2. Déterminer une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
  3. Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  ?
  4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 30 :

1. Soit  $E$  un ev de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}^2$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors elle est valeur propre de  $v \circ u$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .
  1. déterminer la limite de  $(a_n)$ .
  2. Déterminer une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
  3. Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  ?
  4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 30 :

1. Soit  $E$  un ev de dimension finie et  $(u, v) \in \mathcal{L}^2$ .  
Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u \circ v$  alors elle est valeur propre de  $v \circ u$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$ .
  1. déterminer la limite de  $(a_n)$ .
  2. Déterminer une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+2}$ .
  3. Quel est le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  ?
  4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 31 :

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Soit  $S = \max(X, Y)$  et  $T = \min(X, Y)$ .
  1. Loi et espérance de  $S$ .
  2. espérance de  $T$ .
  3.  $S$  et  $T$  sont-elles indépendantes ?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  1.  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
  2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Montrer que  $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ .
  3. Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que :  $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = PTP^{-1}$ .
  4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de  $M$  est égale à 1.
  5. Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :  $M^2 = A$ .

Planche 31 :

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Soit  $S = \max(X, Y)$  et  $T = \min(X, Y)$ .
  1. Loi et espérance de  $S$ .
  2. espérance de  $T$ .
  3.  $S$  et  $T$  sont-elles indépendantes ?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  1.  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
  2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Montrer que  $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ .
  3. Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que :  $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = PTP^{-1}$ .
  4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de  $M$  est égale à 1.
  5. Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :  $M^2 = A$ .

Planche 31 :

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Soit  $S = \max(X, Y)$  et  $T = \min(X, Y)$ .
  1. Loi et espérance de  $S$ .
  2. espérance de  $T$ .
  3.  $S$  et  $T$  sont-elles indépendantes ?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  1.  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
  2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Montrer que  $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ .
  3. Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que :  $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = PTP^{-1}$ .
  4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de  $M$  est égale à 1.
  5. Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :  $M^2 = A$ .

Planche 31 :

1. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Soit  $S = \max(X, Y)$  et  $T = \min(X, Y)$ .
  1. Loi et espérance de  $S$ .
  2. espérance de  $T$ .
  3.  $S$  et  $T$  sont-elles indépendantes ?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  1.  $A$  est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
  2. Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = A$ . Montrer que  $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$ .
  3. Soit  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que :  $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = PTP^{-1}$ .
  4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de  $M$  est égale à 1.
  5. Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que :  $M^2 = A$ .

Planche 32 :

1. Soit l'anneau  $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$  et  $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$ .
  1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
  2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ ,  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .
2. Soient deux variables aléatoire discrètes  $S$  et  $N$ .  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée. Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée (avec  $p \in ]0, 1[$ ).
  1. Déterminer la loi de  $S$  sachant ( $N = n$ ). En déduire la loi de  $S$ .
  2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ . Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
  3.  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

Planche 32 :

1. Soit l'anneau  $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$  et  $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$ .
  1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
  2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ ,  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .
2. Soient deux variables aléatoire discrètes  $S$  et  $N$ .  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée. Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée (avec  $p \in ]0, 1[$ ).
  1. Déterminer la loi de  $S$  sachant ( $N = n$ ). En déduire la loi de  $S$ .
  2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ . Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
  3.  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

Planche 32 :

1. Soit l'anneau  $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$  et  $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$ .
  1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
  2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ ,  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .
2. Soient deux variables aléatoire discrètes  $S$  et  $N$ .  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée. Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée (avec  $p \in ]0, 1[$ ).
  1. Déterminer la loi de  $S$  sachant ( $N = n$ ). En déduire la loi de  $S$ .
  2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ . Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
  3.  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

Planche 32 :

1. Soit l'anneau  $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$  et  $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$ .
  1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
  2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ ,  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .
2. Soient deux variables aléatoire discrètes  $S$  et  $N$ .  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée. Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée (avec  $p \in ]0, 1[$ ).
  1. Déterminer la loi de  $S$  sachant ( $N = n$ ). En déduire la loi de  $S$ .
  2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ . Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
  3.  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

Planche 32 :

1. Soit l'anneau  $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$  et  $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$ .
  1. Montrer que  $I_x$  est un idéal.
  2. Montrer que si  $x_1 \neq x_2$ ,  $A = I_{x_1} + I_{x_2}$ .
2. Soient deux variables aléatoire discrètes  $S$  et  $N$ .  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.  $S$  représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée. Chaque particule a une probabilité  $p$  d'être détectée (avec  $p \in ]0, 1[$ ).
  1. Déterminer la loi de  $S$  sachant ( $N = n$ ). En déduire la loi de  $S$ .
  2. Déterminer la loi suivie par  $N - S$ . Montrer que  $S$  et  $N - S$  sont indépendantes.
  3.  $N$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 33 :

1. Soit  $(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ .
  1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .
  2. On pose  $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$  définie sur  $] - 1, +\infty[\setminus\{0\}$ . Montrer que  $g$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1, +\infty[$ .
  3. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Trouver toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $M^5 = M^2$  et  $\text{tr}(M) = n$ .

Planche 34 :

1.  $m \geq 3$  impair.

(a) Factoriser  $Q(X) = 1 + X + \dots + X^{m-1}$

(b) Calculer  $\prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$  (où  $\omega$  est une racine  $m$ -ième de l'unité)

(c) Calculer  $\sum_{k=1}^{m-1} \tan\left(\frac{k\pi}{m}\right)$

2. QCM de 40 questions avec 4 réponses, dont une seule est juste. Un élève répond au hasard pour chaque question.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire définie par :  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la réponse à la question } i \text{ est bonne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Une bonne réponse apporte 3 points et une mauvaise  $-1$  point. Soit  $Y_i$  le nombre de points obtenus à la question  $i$ . Soit  $Y$  la note totale de l'élève ( $Y \in [-40, 120]$ ).

(a) Loi de  $X_i$

(b) Exprimer  $Y_i$  en fonction de  $X_i$

(c) Calculer  $E(Y)$

(d) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité que l'élève obtienne au moins 60 points ?

Planche 34 :

1.  $m \geq 3$  impair.

(a) Factoriser  $Q(X) = 1 + X + \dots + X^{m-1}$

(b) Calculer  $\prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$  (où  $\omega$  est une racine  $m$ -ième de l'unité)

(c) Calculer  $\sum_{k=1}^{m-1} \tan\left(\frac{k\pi}{m}\right)$

2. QCM de 40 questions avec 4 réponses, dont une seule est juste. Un élève répond au hasard pour chaque question.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire définie par :  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la réponse à la question } i \text{ est bonne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Une bonne réponse apporte 3 points et une mauvaise  $-1$  point. Soit  $Y_i$  le nombre de points obtenus à la question  $i$ . Soit  $Y$  la note totale de l'élève ( $Y \in [-40, 120]$ ).

(a) Loi de  $X_i$

(b) Exprimer  $Y_i$  en fonction de  $X_i$

(c) Calculer  $E(Y)$

(d) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité que l'élève obtienne au moins 60 points ?

Planche 34 :

1.  $m \geq 3$  impair.

(a) Factoriser  $Q(X) = 1 + X + \dots + X^{m-1}$

(b) Calculer  $\prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$  (où  $\omega$  est une racine  $m$ -ième de l'unité)

(c) Calculer  $\sum_{k=1}^{m-1} \tan\left(\frac{k\pi}{m}\right)$

2. QCM de 40 questions avec 4 réponses, dont une seule est juste. Un élève répond au hasard pour chaque question.

Soit  $X_i$  la variable aléatoire définie par :  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la réponse à la question } i \text{ est bonne} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Une bonne réponse apporte 3 points et une mauvaise  $-1$  point. Soit  $Y_i$  le nombre de points obtenus à la question  $i$ . Soit  $Y$  la note totale de l'élève ( $Y \in [-40, 120]$ ).

(a) Loi de  $X_i$

(b) Exprimer  $Y_i$  en fonction de  $X_i$

(c) Calculer  $E(Y)$

(d) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer la probabilité que l'élève obtienne au moins 60 points ?

Planche 35 :

1. On veut montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ . On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$  et  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \frac{\pi}{2}$ . *Indication : calculer  $I_n - I_{n-1}$ .*

(b) Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$ .

(c) Conclure quant à la valeur de l'intégrale  $J$ .

2. On pose  $T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $T$  soit diagonalisable.

Planche 35 :

1. On veut montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ . On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$  et  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \frac{\pi}{2}$ . *Indication : calculer  $I_n - I_{n-1}$ .*

(b) Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$ .

(c) Conclure quant à la valeur de l'intégrale  $J$ .

2. On pose  $T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $T$  soit diagonalisable.

Planche 35 :

1. On veut montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ . On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$  et  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \frac{\pi}{2}$ . *Indication : calculer  $I_n - I_{n-1}$ .*

(b) Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$ .

(c) Conclure quant à la valeur de l'intégrale  $J$ .

2. On pose  $T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $T$  soit diagonalisable.

Planche 35 :

1. On veut montrer que  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ . On pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$  et  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$ .

(a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \frac{\pi}{2}$ . *Indication : calculer  $I_n - I_{n-1}$ .*

(b) Soit  $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t) \sin((2n+1)t) dt = 0$ .

(c) Conclure quant à la valeur de l'intégrale  $J$ .

2. On pose  $T = \begin{pmatrix} \alpha & c & d & e \\ 0 & \alpha & f & g \\ 0 & 0 & \beta & h \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $T$  soit diagonalisable.