

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un corps et les résultats de sup peuvent se généraliser à un tel corps.

Espaces vectoriels, applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Espaces vectoriels, définitions

Voici la définition d'un espace vectoriel, mais concrètement, dans la pratique, celle-ci n'est pas utilisée.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel) Soit E un ensemble muni de deux opérations l'une que l'on appelle loi interne notée $+$ et l'autre que l'on appelle loi externe notée $\cdot$, ces lois étant les applications suivantes :

$$+ : \begin{cases} E \times E & \rightarrow E \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \rightarrow E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}$$

On dit que le triplet $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -ev) si

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif :

(a) L'addition est associative : $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$.

(b) L'addition est commutative : $\forall x, y \in E, x + y = y + x$.

(c) Il existe dans E un élément neutre 0_E , appelé vecteur nul, tel que :

$$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

(d) Tout élément x admet un opposé, noté $(-x)$ ou $-x$ tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

2. Pour tous $x, y \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (x + y) &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y & (\lambda + \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x + \mu \cdot x & \text{(Distributivité)} \\ 1 \cdot x &= x & \lambda \cdot (\mu \cdot x) &= (\lambda\mu) \cdot x & \text{(Compatibilité de } \cdot \text{)} \end{aligned}$$

($\lambda\mu$ étant la multiplication usuelle dans $\mathbb{K}$ et $\lambda + \mu$ l'addition dans $\mathbb{K}$)

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ scalaires.

Exemple 1.1.1 Voici les exemples de référence (on pourra affirmer sans démonstrations que ce sont des espaces vectoriels) :

1. $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$;
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
3. $\mathbb{K}[X]$, les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
4. $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\Omega$ les fonctions définies sur un ensemble Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$;
5. $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.2 (Combinaison linéaire) Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Un vecteur $x \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ s'il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ (c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de λ_i non nuls) telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.

Proposition 1.1.1 (Espace vectoriel produit) Soient $(E_1, +, \cdot), (E_2, +, \cdot), \dots, (E_p, +, \cdot)$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, on définit pour tous $(x_1, x'_1) \in E_1^2, (x_2, x'_2) \in E_2^2, \dots, (x_p, x'_p) \in E_p^2, \lambda \in \mathbb{K}$,

- la multiplication externe $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_p)$.
- l'addition $(x_1, x_2, \dots, x_p) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_p) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_p + x'_p)$.

Alors $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

1.2 Applications linéaires

Définition 1.2.1 (Application linéaire) E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Lorsque

1. $E = F$, f est appelée endomorphisme de E .
2. f est bijective, f est appelée isomorphisme.
3. $E = F$ et f est bijective, f est appelée automorphisme de E .
4. $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur E .

Notations : on note

- $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E .
- $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E .

Exemple 1.2.1 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n . Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ et on pose $p(A)$ le reste de la division euclidienne de A par B . Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque 1.2.1 Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
 f transforme une combinaison linéaire en une combinaison linéaire.

Définition 1.2.2 (Noyau, image) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble $\text{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.
2. On appelle image de f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E)$.

Remarque 1.2.2 (IMPORTANT) Soient F et G deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors on a :

1. $\text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker}(u)$.
2. $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$.
3. $v \circ u = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

En effet, on a :

1. Soit $x \in \text{Ker}(u)$. On a : $u(x) = 0$, donc $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc : $x \in \text{Ker}(v \circ u)$.
2. Soit $y \in \text{Im}(v \circ u)$. Il existe $z \in E$ tel que : $y = v \circ u(z) = v(\underbrace{u(z)}_{\in F})$, donc : $y \in \text{Im}(v)$.

3. $\Rightarrow$: on suppose que : $v \circ u = 0$. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, puis :
 $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{=0}(x) = 0$, donc : $y \in \text{Ker}(v)$.
 $\Leftarrow$: on suppose que : $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$. Soit $x \in E$. Comme $u(x)$ est dans $\text{Im}(u)$, donc il est dans $\text{Ker}(v)$, alors : $\forall x \in E, v(u(x)) = 0$, soit $v \circ u = 0$.

Proposition 1.2.1 (Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité) 1. f est surjective si et seulement si on a $\text{Im}(f) = F$.
 2. f est injective si et seulement si on a : $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Exemple 1.2.2 1. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$. Déterminer le noyau de φ .

2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $b \in F$.
 On considère l'équation $(Eq) : f(x) = b$, que l'on appelle équation linéaire d'inconnue x dans E . On appelle b le second membre de l'équation.
Premier cas : $b \notin \text{Im } f$. (Eq) n'a pas de solutions.
Deuxième cas : $b \in \text{Im } f$. Il existe $z_0 \in E$ tel que l'on ait $f(z_0) = b$.
 L'ensemble des solutions de (Eq) est $z_0 + \text{Ker}(f)$.
 C'est un sous-espace affine de E dirigé par $\text{Ker}(f)$.
 Si $b = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution : 0 . L'ensemble des solutions est : $\text{Ker}(f)$. C'est l'équation homogène associée à l'équation (Eq) .
 On remarque que l'ensemble des solutions est de la forme « un vecteur + les solutions du problème homogène associé », tout comme pour les équations différentielles ou les systèmes linéaires avec second membre.

Proposition 1.2.2 (Opérations sur les applications linéaires) 1. $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
 2. Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :
 (a) $g_1 \circ f_1$ est dans $\mathcal{L}(E, G)$. On note aussi la composition $g_1 f_1$, mais attention ça n'est pas une multiplication.
 (b) $(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$ (c) $g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$.
 3. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Proposition 1.2.3 (L'application linéaire réciproque) 1. Soient f et h des isomorphismes de E dans F .
 (a) Alors f^{-1} est une application linéaire de F dans E .
 (b) Si $E = F$, alors $f \circ h$ est dans $GL(E)$ et : $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$.
 2. f est dans $GL(E)$ signifie qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f = Id_E$. Dans ce cas, on a : $g = f^{-1}$.

Exemple 1.2.3 On reprend l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$ de l'exemple 1.2.2. Déterminer φ^k pour k dans $\mathbb{N}$.

Définition 1.2.3 (Sous-espace stable) Soient X un sous-ensemble de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que X est stable par f si on a : $f(X) \subset X$.

Proposition 1.2.4 (Stabilité de l'image et du noyau) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

Démonstration : Soit $x \in \text{Ker}(u)$. On a donc $u(v(x)) = \underbrace{v(u(x))}_{=0} = 0$, donc : $v(x) \in \text{Ker}(u)$, puis :

$$v(\text{Ker}(u)) \subset \text{Ker}(u).$$

Soit $x \in \text{Im}(u)$. Il existe donc $z \in E$ tel que $u(z) = x$. On a donc $v(x) = v(u(z)) = u(v(z)) \in \text{Im}(u)$. Ainsi $v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$.

Définition 1.2.4 (Endomorphisme induit) Soit G un sous-espace vectoriel de E stable par f avec $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $\tilde{f} : \begin{cases} G & \rightarrow G \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$. On dit que $\tilde{f}$ est l'endomorphisme induit par f sur G .

Exemple 1.2.4 1. Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{K}_n[X]$

est stable par ψ et induit un endomorphisme $\psi_n : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in S_n$, on pose $u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$. Quels sont les sous-espaces vectoriels H différents de $\mathbb{R}^n$ et $\{0\}$ stables pour tous les u_σ ?

1.3 Sous-espaces vectoriels

Voici dans ce paragraphe la définition d'un sous-espace vectoriel et différentes façons de montrer que l'on a un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Les deux principales méthodes sont la caractérisation des sous-espaces vectoriels et l'utilisation du noyau d'une application linéaire.

Prendre garde à toujours préciser de quel espace vectoriel on est le sous-espace vectoriel.

Définition 1.3.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$0_E \in F \text{ et } (\mathcal{C}_1) : \forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F.$$

De plus F hérite de la structure d'espace vectoriel de E .

Remarque 1.3.1 1. *IMPORTANT* : pour montrer qu'un certain espace a une structure d'espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

2. On peut aussi rencontrer la caractérisation $(\mathcal{C}_2) : \forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda x + \mu y \in F$. Cette caractérisation signifie que F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs.

Exemple 1.3.1 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec $\mathbb{K}$ infini. Montrer que l'on ne peut pas écrire $E = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, avec $V_1, \dots, V_n$ des sous-espaces vectoriels différents de E et $\{0_E\}$.

Proposition 1.3.1 (Image directe et réciproque de sous-espaces vectoriels)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. Si E' est un sous-espace vectoriel de E , $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .

2. Si F' est un sous-espace vectoriel de F , $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

En particulier, $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Remarque 1.3.2 Quand passer par le noyau pour montrer que l'on a un sous-espace vectoriel ? En général, lorsque sur un ensemble nous avons une condition qui peut s'écrire sous la forme d'une ou plusieurs équations se ramenant à des équations du type « ... = 0 ».

Exemple 1.3.2 1. $F = \{P \in \mathbb{K}[X], P(0) = P(1) = P'(2) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de

$$\mathbb{K}[X] \quad F = \text{Ker } \varphi, \text{ avec } \varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto (P(0), P(1), P'(2)) \end{cases} \quad \text{qui est linéaire.}$$

2. $E = \{x \mapsto P(x)e^{\alpha x}, P \in \mathbb{R}[X]\}$, avec α dans $\mathbb{R}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\text{car } E = \text{Im } \psi, \text{ avec } \psi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ P & \mapsto (x \mapsto P(x)e^{\alpha x}) \end{cases} \quad \text{qui est linéaire.}$$

Proposition 1.3.2 (Intersection de sous-espaces vectoriels) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, I un ensemble non vide et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 1.3.3 *ATTENTION* : l'union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. Contrexemple : dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(1, 0)$ et $F_2 = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(0, 1)$. On a $(1, 0)$ dans F_1 et $(0, 1)$ dans F_2 , mais $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ n'est pas dans $F_1 \cup F_2$.

Définition 1.3.2 (Sous-espace vectoriel engendré par une partie) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et A une partie de E . Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A . Cet espace est le sous-espace vectoriel engendré par A , noté $\text{vect}(A)$.

Autrement dit si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset F$, alors $\text{vect}(A) \subset F$.

En particulier, si $(e_i)_{i \in I}$ une famille de E , alors : $\text{vect}((e_i)_{i \in I}) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i e_i / \forall i \in I, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$, avec dans la somme un nombre fini de termes non nuls.

Exemple 1.3.3 Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que f_k est dans $\text{vect}((\cos^p)_{0 \leq p \leq k})$.

1.4 Familles libres

Définition 1.4.1 (Famille libre) 1. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est dite libre si la combinaison linéaire nulle s'obtient pour cette famille qu'avec des coefficients nuls, soit :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \left[\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0 \implies (\forall i \in I, \lambda_i = 0) \right].$$

Autrement dit 0 se décompose de façon unique dans $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$.

Les vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ sont linéairement indépendants.

2. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est liée si elle n'est pas libre. Les vecteurs sont linéairement dépendants, soit :

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \left[\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0 \text{ et } (\exists i \in I, \lambda_i \neq 0) \right].$$

Méthode :

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on suppose qu'il existe une combinaison linéaire nulle : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ (avec λ_k dans $\mathbb{K}$) et on montre que ceci implique que tous les λ_k sont nuls.

ATTENTION : Pour montrer qu'une famille est libre, il ne faut pas chercher à prouver qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que l'on ait : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$ (ça existe toujours en prenant tous les λ_k nuls!).

ATTENTION : $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ne signifie pas que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

ATTENTION : Pour montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, il n'est pas suffisant de montrer que les vecteurs x_i sont deux à deux non colinéaires :

Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(1, 0), (1, 1), (0, 1)$ sont deux à deux non colinéaires mais la famille $((1, 0), (1, 1), (0, 1))$ est liée, car $-(1, 1) + (1, 0) + (0, 1) = (0, 0)$.

- Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, il suffit de trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ non tous nuls tels que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$.

Remarque 1.4.1 Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre dans E , alors pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ dans $\mathbb{K}$, on a : $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k$.

Exemple 1.4.1 1. Montrer que la famille $((X+1)^k(X-1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) On suppose que pour tout x de E , la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie (il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$).
- (b) On suppose maintenant de E est de dimension n . Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et on suppose que u laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension p . Montrer que u est encore une homothétie.

(a)

(b) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On complète la famille libre (x) en une base $(x, f_2, \dots, f_n)$ de E . Pour $k \in \llbracket 2, p+1 \rrbracket$, on pose $F_k = \text{vect}(x, f_2, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_{p+1})$ qui sont de dimension p donc stables par u . Soit $y \in \bigcap_{k=2}^{p+1} F_k$. On a donc $y \in \text{vect}(x, f_2, \dots, f_{p+1})$. Ainsi il existe $\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x + \sum_{i=2}^{p+1} \lambda_i f_i$. Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$. On a $y \in F_k$, donc par liberté de $(x, f_2, \dots, f_{p+1})$ on a : $\lambda_k = 0$. Ainsi y est dans $\text{vect}(x)$. Ainsi $\bigcap_{k=2}^{p+1} F_k = \text{vect}(x)$ qui est donc stable par u , donc pour tout x de E (même 0), la famille $(x, u(x))$ est liée, ce qui permet de nous ramener à la question précédente.

Proposition 1.4.1 (Famille de polynômes de degré échelonné) Soient $P_1, \dots, P_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant : $\begin{cases} P_1 \neq 0 \\ \forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, d^\circ P_k < d^\circ P_{k+1} \end{cases}$. On dit que la famille $(P_1, \dots, P_p)$ est de degré échelonné et cette famille est libre.

1.5 Familles génératrices

Définition 1.5.1 (Famille génératrice) Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que la famille de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ forme une famille génératrice de F , si $\text{vect}((e_i)_{i \in I}) = F$. Autrement dit, tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire finie de $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, avec $i_1, \dots, i_n$ dans I et on dit que F est engendré par la famille $(e_i)_{i \in I}$.

1.6 Bases

Définition 1.6.1 (Bases) Soit $\mathcal{B}$ une famille de E . On dit que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E .

Ceci est équivalent à dire que tout vecteur x de E s'écrit d'une unique façon : $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$,

avec : $\forall i \in I, \lambda_i \in \mathbb{K}$.

$(\lambda_i)_{i \in I}$ est appelée la famille des coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$.

Exemple 1.6.1 1. On pose $E = \mathbb{K}^n$ et $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On appelle cette base la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On a : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, (x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$.

2. Dans $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], d^\circ(P) \leq n\}$ la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base appelée elle aussi base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.7 Applications linéaires et bases

Proposition 1.7.1 (Caractérisation de la bijectivité, injectivité et surjectivité) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E .

Alors f est bijective (resp. injective, surjective) si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base (resp. une famille libre, génératrice).

Proposition 1.7.2 (Caractérisation d'une application par l'image d'une base) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$.

En particulier pour f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$ telles que : $\forall i \in I, f(e_i) = g(e_i)$. Alors on a : $f = g$.

Donc deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Proposition 1.7.3 (Image et famille génératrice) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Alors on a : $\text{Im}(f) = \text{vect}((f(e_i))_{i \in I})$.

Exemple 1.7.1 Soit $n \geq 3$. On considère l'endomorphisme f qui à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme

$$f(P) = \frac{X^2 - 1}{2} P'' - X P' + P.$$

1. Déterminer $\dim(\text{Im } f)$.

2. Montrer que : $Q \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow Q'(1) = Q'(-1) = 0$.

1.8 Dimension finie

1.8.1 Définition et existence de bases

Définition 1.8.1 (Espace vectoriel de dimension finie) On dit que E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie (il existe $x_1, \dots, x_p$ dans E tels que : $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$). Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Proposition 1.8.1 (Existence d'une base) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie. Alors E admet au moins une base.

Proposition 1.8.2 (Extraction d'une base) Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre, avec I un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors il existe une partie J telle que : $I \subset J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $(x_j)_{j \in J}$ soit une base de E .

En particulier, de toute famille génératrice finie de E , on peut extraire une base.

Proposition 1.8.3 (Théorème de la base incomplète) Soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille libre de E de dimension finie. Alors on peut compléter cette famille en une famille $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ qui est une base de E , avec $n \geq p$.

Définition 1.8.2 (Dimension d'un espace vectoriel) Le nombre d'éléments d'une base de E est appelé dimension de E que l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$. Par convention $\dim\{0\} = 0$.

Remarque 1.8.1 Cette définition a un sens puisque l'on peut montrer d'une part l'existence d'une base pour un espace vectoriel de dimension finie et d'autre part que toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Exemple 1.8.1 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Proposition 1.8.4 (Classification des espaces vectoriels de dimension finie) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respective n et m finies.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective (E et F sont isomorphes), alors $m = n$.

2. En particulier E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, via l'isomorphisme :
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{K}^n & \rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \end{array} \right., \text{ avec } (e_1, \dots, e_n) \text{ une base de } E.$$

1.8.2 Dimension et familles libres et génératrices

Proposition 1.8.5 (Cardinal d'une famille libre et génératrice) On suppose E de dimension finie égale à n .

1. Toute famille libre possède au plus n éléments.
2. Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

Proposition 1.8.6 (Cardinal d'une famille et dimension) 1. Si une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E possède p vecteurs avec $p > n = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est liée.

2. Si $F = \text{vect}(f_1, \dots, f_p)$, alors $\dim(F) \leq p$ car $(f_1, \dots, f_p)$ engendre F .
On a l'égalité si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre.

Exemple 1.8.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que
$$\sum_{k=0}^p a_k A^k = 0.$$

$(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui possède $n^2 + 1$ éléments. Or :

$n^2 + 1 > n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$, donc cette famille est liée, donc il existe $a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$.

Proposition 1.8.7 (Caractérisation des bases) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n avec n non nul. Soit $\mathcal{B}$ une famille finie de E . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E .
2. $\mathcal{B}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{B}) = n$.
3. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E et $\text{card}(\mathcal{B}) = n$.

Remarque 1.8.2 Ce théorème est utile lorsque l'on connaît la dimension de E et que l'on veut montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E . En effet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ possède $\dim(E)$ éléments et que c'est une famille libre (ou génératrice). En général, nous montrons que la famille est libre car ceci est plus simple dans la mesure où l'on a une série d'implications à établir avec une équation. Montrer qu'une famille est génératrice est plus compliqué car il faut montrer l'existence d'une décomposition suivant les vecteurs de cette famille et il est toujours plus difficile d'établir des propriétés d'existence.

Exemple 1.8.3 1. La famille $((X + 1)^k (X - 1)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, car c'est une famille libre de $\mathbb{C}_n[X]$ (voir exemple 1.4.1) qui possède $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ éléments.
On pose $H = (X^2 - 1)^n$ et $L = H^{(n)}$. Donner la décomposition de L dans cette base.

On remarque ainsi qu'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas forcément constituée de polynômes de degré échelonné. En effet chaque $(X + 1)^k (X - 1)^{n-k}$ est de degré n .

2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}_n[X]$ tels que $P = (X + i)P'$.

Travaillons dans une autre base $\mathcal{B} = (1, (X + i), \dots, (X + i)^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$. C'est bien une base car c'est une famille libre (de degré échelonné) et elle possède $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ éléments.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Il existe donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k (X + i)^k$ et :

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k (X + i)^{k-1} \quad (\text{la somme commence à 1, car en } k = 0, \text{ on a dérivé un terme constant}). \text{ Ainsi : } P = (X + i)P' \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k (X + i)^k =$$

$$\sum_{k=1}^n k a_k (X + i)^k = \sum_{k=0}^n k a_k (X + i)^k \quad (\text{on peut rajouter le terme en } k = 0, \text{ car il est nul}). \text{ Comme } \mathcal{B} \text{ est une base, cela donne :}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = k a_k \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (k - 1) a_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{1\}, a_k = 0. \text{ Ainsi } P = a_1 (X + i), \text{ donc } \mathcal{S} = \{\lambda (X + i), \lambda \in \mathbb{C}\} = \text{vect}(X + i).$$

3. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $(X_i Y_j^T)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], D(P) = P'$. Soit F un sous-espace stable de D non réduit à $\{0\}$.
- (a) Montrer qu'il existe $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $F = \mathbb{K}_m[X]$.
- (b) En déduire les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$, stables par l'endomorphisme de dérivation que l'on note encore D .

1.8.3 Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 1.8.8 (Dimension d'un produit) Soient $(E_1, +, \cdot), (E_2, +, \cdot), \dots, (E_p, +, \cdot)$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respectives $n_1, \dots, n_p$. Alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = n_1 + n_2 + \dots + n_p.$$

Remarque 1.8.3 Pour $p = 2$, on pose $(e_1, \dots, e_{n_1})$ une base de E_1 et $(f_1, \dots, f_{n_2})$ une base de E_2 , alors $((e_1, 0), \dots, (e_{n_1}, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_{n_2}))$ est une base de $E_1 \times E_2$. Si on étend cela pour p espaces, si $(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$ est une base de E_i , alors les $(0, \dots, 0, \dots, e_j^i, \dots, 0, \dots, 0)$ avec e_j^i en position i constituent une base de $\prod_{i=1}^p E_i$.

Exemple 1.8.4 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) > n(k-1)$. Montrer que : $\bigcap_{i=1}^k F_i \neq \{0\}$.

1.8.4 Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 1.8.9 (Sous-espace vectoriel et dimension) 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et on a : $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Si on a : $\dim(F) = \dim(E)$, alors $E = F$.

Exemple 1.8.5 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\text{Ker } f^{k_0} = \text{Ker } f^{k_0+1}$, puis que $\forall k \geq k_0, \text{Ker } f^k = \text{Ker } f^{k_0}$.
2. On pose $K = \text{Ker } (f^{k_0})$ et $I = \text{Im } (f^{k_0})$. Montrer que $E = K \oplus I$.

Voici une nouvelle définition.

Définition 1.8.3 (Base adaptée à un sous espace vectoriel) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F . On dit qu'une base de E est adaptée à F si elle est de la forme $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

1.8.5 Rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

Définition 1.8.4 (Rang d'une famille de vecteurs) On appelle rang d'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ la dimension de l'espace engendré $\text{vect}((x_i)_{1 \leq i \leq p})$.

Remarque 1.8.4 1. On a les deux majorations : $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \dim E$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$.
2. **IMPORTANT** $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$.

Définition 1.8.5 (Rang d'une application linéaire) E et F désignent deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels (de dimension finie ou non) et f un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.
On suppose que $\text{Im } f$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de f , la dimension de $\text{Im } f$.
On note $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = \dim(f(E))$.

Remarque 1.8.5 Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors
 $\text{rg}(f) = \dim(\text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$

Théorème 1.8.1 (Théorème du rang) Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ -ev et f une application linéaire de E dans F . Alors $\text{Im } f$ est de dimension finie et :

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim(E).$$

Exemple 1.8.6 1. (a) Déterminer l'image de $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$ de l'exemple

1.2.2.

(b) Soit $\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
 Montrer que $\text{Ker}(\Delta^p) = \{(P(n))_{n \in \mathbb{N}}, P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]\}.$

2. Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

- i. $\dim(\text{Ker}(f \circ g)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)).$
- ii. la suite $(\dim(\text{Im}(f^k)) - \dim(\text{Im}(f^{k+1})))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 1.8.10 (Caractérisation de la bijectivité et dimension) On suppose que $n = \dim(E) = \dim(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.
4. L'image d'une base de E par f est une base de F .
5. $\text{rg}(f) = n$.

Remarque 1.8.6 1. Avec les hypothèses du théorème précédent, pour montrer que f est bijective, il est plus simple de montrer que f est injective. En effet la surjectivité est plus compliquée dans la mesure où l'on doit montrer l'existence d'un antécédent.

2. Encore sous les mêmes hypothèses, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors f est bijective si et seulement si $\text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = n$.
3. Ainsi un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement si il est injectif si et seulement si il est surjectif.

Exemple 1.8.7 1. Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant I_n et stable par multiplication. Montrer que si M est dans $\mathcal{A}$ et inversible, alors M^{-1} est dans $\mathcal{A}$.

Remarque 1.8.7 C'est ainsi que l'on peut montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est encore triangulaire supérieure.

2. ATTENTION, ne pas inventer de résultats en dimension infinie. Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on considère les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \int_1^X P(u)du$ et $v : P \mapsto P'$.

On a : $v \circ u = \text{Id}_E$, donc $v \circ u$ est bijective, ainsi l'injectivité de $v \circ u$ implique celle de u et la surjectivité de $v \circ u$ implique celle de v .

On remarque que si Q est dans $\text{Im}(u)$, alors $Q = \int_1^X P$, pour un certain P de E et donc $Q(1) = 0$. Ainsi tout polynôme de $\text{Im}(u)$ possède 1 comme racine. Ainsi, on a par exemple : $X \notin \text{Im}(u)$. Donc u n'est pas surjective, donc pas bijective.

On constate que $v(1) = 0$, mais comme $1 \neq 0$, alors v n'est pas injective et donc pas bijective.

Proposition 1.8.11 (Rang et composition) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini. Alors on a $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Proposition 1.8.12 (Rang et composition par un isomorphisme) Ici on n'a pas forcément $\dim(E) = \dim(F)$.

1. Soit $g \in GL(E)$, alors $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$.
2. Soit $h \in GL(F)$, alors $\text{rg}(h \circ f) = \text{rg}(f)$.

Le rang d'une application linéaire est conservé par composition par un automorphisme.

1.8.6 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto & (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_{n+1})) \end{cases}$, avec $a_1, \dots, a_{n+1}$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Soient $b_1, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme vérifiant $d^\circ P \leq n$ et :
 $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_i) = b_i$.
3. On note $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On pose $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$. Montrer que $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Expliciter L_k .
5. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \dots, L_{n+1})$.

1. Φ est linéaire et nous avons $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$. Il suffit de montrer que Φ est injective. Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$. On a : $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(a_k) = 0$. Ainsi P possède au moins $n+1$ racines. Comme on a : $d^\circ(P) \leq n$, alors $P = 0$. Ainsi $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ et donc Φ est injective, puis bijective.
2. La condition recherchée est équivalente à $\Phi(P) = (b_1, \dots, b_{n+1})$, avec $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Par bijectivité de Φ , il n'y a qu'un polynôme qui convient : $P = \Phi^{-1}(b_1, \dots, b_{n+1})$.
3. Φ^{-1} étant bijective, elle envoie une base en une base et donc comme $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}^{n+1}$, alors $(L_1, \dots, L_{n+1}) = (\Phi^{-1}(e_1), \dots, \Phi^{-1}(e_{n+1}))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Comme $(L_k(a_1), \dots, L_k(a_{n+1})) = \Phi(L_k) = e_k = (0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-ème position}}, \dots, 0)$, alors $\forall p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\}, L_k(a_p) = 0$. Cela

nous donne n racines distinctes de L_k : $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n+1}$ et comme L_k est de degré au plus n , nous avons la factorisation suivante :

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n+1} (X - a_p), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}. \text{ Par ailleurs } L_k(a_k) = 1 \text{ et donc : } \lambda \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n+1} (a_k - a_p) = 1 \text{ et donc : } \lambda = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n+1} \frac{1}{a_k - a_p}. \text{ Ainsi : } L_k = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n+1} \frac{X - a_p}{a_k - a_p}.$$

5. Comme $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que : $P = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k$. En appliquant cette dernière somme

à a_j pour un $j \in \{1, \dots, n+1\}$, on a : $P(a_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k L_k(a_j) = \lambda_j$, grâce aux calculs des $L_k(a_p)$ de la question précédente. Ainsi on obtient :

$$P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k.$$

Exemple 1.8.8 1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

2. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

On considère que $\mathbb{K}_n[X]$ les formes linéaires $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P$ et $\psi_k : P \mapsto P(a_k)$, pour $0 \leq k \leq n$.

Montrer que : $\varphi \in \text{vect}(\psi_0, \dots, \psi_n)$.

1.9 Somme d'espaces vectoriels et applications

1.9.1 Somme de plusieurs sous-espaces vectoriels (programme de spé)

Définition 1.9.1 (Somme de sous-espaces vectoriels) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$

des sous-espaces vectoriels de E . On appelle somme des E_i que l'on note $\sum_{i=1}^p E_i$ l'ensemble

$$E_1 + \dots + E_p = \sum_{i=1}^p E_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_p, \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

On pose $\Phi : \begin{cases} \prod_{i=1}^p E_i & \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \sum_{i=1}^p x_i \end{cases}$, qui est linéaire. On remarque que $\text{Im } \Phi = \sum_{i=1}^p E_i$.
On utilisera Φ pour les preuves qui suivent.

Remarque 1.9.1 1. On a : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E_j \subset \sum_{i=1}^p E_i$, car : pour $x \in E_j$, on a :

$$x_j = \underset{\in E_1}{0} + \dots + \underset{\in E_{j-1}}{0} + \underset{\in E_j}{x_j} + \underset{\in E_{j+1}}{0} + \dots + \underset{\in E_p}{0}.$$

2. Comme l'addition est commutative, l'ordre des E_i n'a pas d'importance.

Proposition 1.9.1 (L'espace vectoriel $\sum_{i=1}^p E_i$) Dans les conditions de la définition précédente, $\sum_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration : Φ est linéaire, donc son image $\text{Im } \Phi = \sum_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 1.9.2 $\sum_{i=1}^p E_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i .

Exemple 1.9.1 Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E . On a alors :
 $\text{vect}(x_1) + \text{vect}(x_2) + \dots + \text{vect}(x_p) = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Définition 1.9.2 (Somme directe) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E . La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si pour tout $x \in \sum_{i=1}^p E_i$, l'écriture sous la forme

$x = \sum_{i=1}^p x_i$, avec les x_i dans E_i est unique, ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, x = \sum_{i=1}^p x_i.$$

La somme est alors notée $\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_i$.

Remarque 1.9.3 La somme est directe si et seulement si Φ est injective.

Exemple 1.9.2 Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . On note $E_i = \text{vect}(e_i)$, pour i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, alors :
 $E = \sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, car tout vecteur se décompose de manière unique dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Proposition 1.9.2 (Caractérisation des sommes directes) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E . Nous avons les équivalences suivantes :

$$1. \sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i;$$

$$2. \text{ Pour tout } (x_1, \dots, x_p) \text{ de } \prod_{i=1}^p E_i, \text{ on a : } \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_E;$$

$$3. \forall j \in \llbracket 2, p \rrbracket, (E_1 + \dots + E_{j-1}) \cap E_j = \{0\}.$$

Démonstration : La somme est directe si et seulement si Φ est injective si et seulement si $\text{Ker } \Phi = \{0\}$ si et seulement si : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \Phi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Rightarrow [(x_1, \dots, x_p) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_E]$.

Cela prouve les deux premières équivalences.

Supposons le dernier point.

Supposons le deuxième point.

Exemple 1.9.3 Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ des réels et pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $E_k = \{x \mapsto P(x)e^{\alpha_k x}, P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que la somme des E_k est directe.

Remarque 1.9.4 1. *ATTENTION :* pour $p \geq 3$, si on a $\bigcap_{i=1}^p E_i = \{0\}$, cela n'implique pas que $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe ! Contreexemple : dans $\mathbb{K}^2$, on pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. On note $E_1 = \text{vect}(e_1)$; $E_2 = \text{vect}(e_2)$ et $E_3 = \text{vect}(e_1 + e_2)$.

2. *ATTENTION :* si pour tout i, j distincts de $\llbracket 1, p \rrbracket$, on a : $E_i \cap E_j = \{0\}$, cela n'implique pas que $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe ! Voir le contre-exemple précédent.

3. Si vous voulez montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, vous pouvez procéder par analyse-synthèse. Pour mettre cela en place, vous fixez un x quelconque de E . Ensuite vous montrez par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\prod_{i=1}^p E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

4. Pour montrer qu'une somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe, il suffit de prouver que $E_1 + E_2$ est directe, puis que $(E_1 \oplus E_2) + E_3$ est aussi directe, et ainsi de suite...

Exemple 1.9.4 Soient E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F' et G' de E tels que :
 $F = (F \cap G) \oplus F'$ et $G = (F \cap G) \oplus G'$. Montrer que : $F + G = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$.

Proposition 1.9.3 (Définition d'une application linéaire sur une somme directe) Soient

$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u_k \in \mathcal{L}(E_k, F)$. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u|_{E_k} = u_k$.

Démonstration : Analyse : si un tel u existe, alors pour $x = \sum_{k=1}^p x_k$ dans E , avec

$(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, on a par linéarité : $u(x) = \sum_{k=1}^p u(x_k) = \sum_{k=1}^p u_k(x_k)$. Ceci prouve l'unicité.

Examen : Soit $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tels que : $x = \sum_{k=1}^p x_k$. On pose $u(x) = \sum_{k=1}^p u_k(x_k)$.

L'unicité de la décomposition de x dans $\bigoplus_{k=1}^p E_k$ assure que l'application u est définie sans ambiguïté.

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $z \in E_i$. La décomposition de z dans $\bigoplus_{k=1}^p E_k$ est $z = 0 + \dots + 0 + \underset{\in E_i}{z} + 0 + \dots + 0$ et

donc $u(z) = u_1(0) + \dots + u_{i-1}(0) + u_i(z) + u_{i+1}(0) + \dots + u_p(0) = u_i(z)$ et donc $u|_{E_i} = u_i$.

Reste à montrer que u est bien linéaire.

Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $x = \sum_{k=1}^p x_k$ et $y = \sum_{k=1}^p y_k$ avec $(x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

Ainsi $x + \lambda y = \sum_{i=1}^p (x_i + \lambda y_i)$, avec : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i + \lambda y_i \in E_i$. Par définition, on a donc :

$$u(x + \lambda y) = \sum_{i=1}^p u_i(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i=1}^p u_i(x_i) + \lambda \sum_{i=1}^p u_i(y_i) = u(x) + \lambda u(y).$$

Remarque 1.9.5 $\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_p, F) \\ u & \mapsto (u|_{E_1}, \dots, u|_{E_p}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Proposition 1.9.4 (Base adaptée à $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des

sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\mathcal{B}_i$ une base de E_i . Alors la

famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ obtenue en juxtaposant les $\mathcal{B}_i$ est une base de E . Cette base est dite **adaptée**

$$\text{à } E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Autrement dit pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, si $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{n_i}^i)$ est une base de E_i , alors

$(e_1^1, e_2^1, \dots, e_{n_1}^1, e_1^2, e_2^2, \dots, e_{n_2}^2, \dots, e_1^p, e_2^p, \dots, e_{n_p}^p)$ (on regroupe toutes les bases) est une base de E adaptée à

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Démonstration : On pose $E_i = \text{vect}(\mathcal{B}_i)$, avec $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$, pour i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Les $(0, \dots, 0, \dots, e_j^i, \dots, 0, \dots, 0)$

avec e_j^i en position i constituent une base de $\prod_{i=1}^p E_i$. Nous avons $\Phi(0, \dots, 0, \dots, e_j^i, \dots, 0, \dots, 0) = e_j^i$, pour

i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et j dans $\llbracket 1, n_i \rrbracket$. Ainsi Φ envoie une base de $\prod_{i=1}^p E_i$ en une base de E . Ainsi Φ est un

isomorphisme. Comme Φ est injective, la somme $\sum_{i=1}^p \text{vect}(\mathcal{B}_i)$ est directe. La surjectivité nous donne

$$E = \text{Im } \Phi = \sum_{i=1}^p \text{vect}(\mathcal{B}_i), \text{ d'où le résultat.}$$

Proposition 1.9.5 (Dimension d'une somme) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

$$1. \text{ On a : } \dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

$$2. \text{ La somme } \sum_{i=1}^p E_i \text{ est directe si et seulement si :}$$

$$3. \text{ Si } E \text{ est de dimension finie et la somme } \sum_{i=1}^p E_i \text{ est directe, alors :}$$

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_i) = \dim \left(\bigoplus_{i=1}^p E_i \right) \leq \dim(E).$$

Démonstration :

$$1. \text{ L'application } \Phi : \begin{cases} \prod_{i=1}^p E_i & \rightarrow \sum_{i=1}^p E_i \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto \sum_{i=1}^p x_i \end{cases} \text{ est surjective. Grâce au théorème du rang :}$$

$$\dim \text{Im } \Phi \leq \dim \text{Im } \Phi + \dim \text{Ker } \Phi = \dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right), \text{ soit } \dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

$$2. \text{ En reprenant l'application } \Phi, \text{ la somme est directe ssi } \Phi \text{ est injective ssi } \dim \text{Ker } \Phi = \{0\} \text{ ssi}$$

$$\dim \text{Im } \Phi = \dim \left(\prod_{i=1}^p E_i \right) \text{ ssi } \dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

$$3. \text{ L'inégalité vient du fait que } \sum_{i=1}^p E_i \text{ soit un sous-espace vectoriel de } E \text{ et donc}$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \dim(E). \text{ Comme } \sum_{i=1}^p E_i \subset E, \text{ on a } E = \bigoplus_{i=1}^p E_i \text{ si et seulement si}$$

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) = \dim(E).$$

1.9.2 Cas particulier : somme de deux sous-espaces vectoriels

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E .

Proposition 1.9.6 (Somme directe de deux sous-espaces vectoriels) *La somme $E' + E''$ est direct si et seulement si $E' \cap E'' = \{0\}$.*

Remarque 1.9.6 *À ne pas confondre avec $E' \cap E'' = \emptyset$.*

Définition 1.9.3 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) *On dit que E' et E'' sont supplémentaires dans E si : $E' \oplus E'' = E$.*

Remarque 1.9.7 *Il y a deux informations contenues dans $E' \oplus E'' = E$. D'une part $E' + E'' = E$ et d'autre part la somme est directe.*

Exemple 1.9.5 *Si on note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques), c'est-à-dire vérifiant $M^T = M$ (resp. $M^T = -M$). On a : $S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$.*

Montrons que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists!(S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}), M = S + A$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Analyse (unicité) : Soit $M = S + A$, avec $(S, A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K})$, une éventuelle décomposition. On a donc : $M^T = S^T + A^T = S - A$. On en déduit que : $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Examen (existence) : On pose : $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

- On a bien : $M = S + A$.
- $A^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$, donc : $A \in A_n(\mathbb{K})$.
- $S^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$, donc : $S \in S_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.9.7 (Existence d'un supplémentaire) *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F possède au moins un supplémentaire dans E (c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel S de E tel que : $E = F \oplus S$).*

Théorème 1.9.1 (Formule de Grassmann) *Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $E' + E''$ est de dimension finie et : $\dim(E' + E'') = \dim(E') + \dim(E'') - \dim(E' \cap E'')$.*

Exemple 1.9.6 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.*

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E , donc : $\dim(F + G) \leq \dim(E) = n$. Ainsi la formule de Grassmann nous donne : $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) > 0$.

Ainsi : $F \cap G \neq \{0\}$.

Proposition 1.9.8 (Caractérisation d'espaces supplémentaires par la dimension) *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .*

1. $F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
2. $F \oplus G = E \iff F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exemple 1.9.7 1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E \iff \text{Im } f = \text{Im } (f^2)$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que :
- $$F \oplus H = G \oplus H = E.$$
- On pourra raisonner par récurrence décroissante.

Remarque 1.9.8 ATTENTION, erreurs à ne pas faire :

- Ne pas confondre réunion de sous espaces vectoriels et somme de deux sous-espaces vectoriels. Dans $\mathbb{R}^2$, si $E_1 = \text{vect}(1, 0)$ et $E_2 = \text{vect}(0, 1)$, alors $E_1 + E_2 = \text{vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$, mais $E_1 \cup E_2 \neq \mathbb{R}^2$, par exemple il ne contient pas $(1, 1)$.
- Le complémentaire $E \setminus F$ d'un sous-espace vectoriel F de E n'est pas un sous-espace vectoriel, car : 0 est dans F (en tant que sous-espace vectoriel de E), donc $0 \notin E \setminus F$. Ainsi il ne faudra pas confondre la notion de complémentaire et de supplémentaire, car le premier n'est pas un sous-espace vectoriel de E tandis que l'autre oui.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $E' + F = E'' + F$ n'implique pas : $E' = E''$. On ne fait pas d'opérations sur les sous-espaces vectoriels.

Proposition 1.9.9 (Supplémentaire du noyau) Soient E et F deux espaces $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit S un sous-espace vectoriel de E tel que $S \oplus \text{Ker}(f) = E$. Ainsi $f|_S$ induit un isomorphisme de S dans $\text{Im}(f)$.

Exemple 1.9.8 (Lemme de factorisation) Soient E, F, G , trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $g = h \circ f$ si et seulement si $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
2. Soient $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $g = h \circ f$.

2. La condition nécessaire est : $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(h)$. Vérifions qu'elle est suffisante et on suppose que : $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(h)$.

Soit S un sous-espace vectoriel de S tel que $\text{Ker}(g) \oplus S = F$. Ainsi g induit un isomorphisme g' de S dans $\text{Im}(g)$. Soit $(g_1, \dots, g_r)$ une base de $\text{Im}(g)$. Il existe $e_1, \dots, e_r \in S$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(e_i) = g_i$. La famille $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de S en tant qu'image de la base $(g_1, \dots, g_r)$ par l'isomorphisme $(g')^{-1}$.

De plus, $g_1, \dots, g_r$ sont dans $\text{Im}(h)$, alors il existe $f_1, \dots, f_r \in S$ tels que $h(f_i) = g_i$.

On construit f telle que $f|_{\text{Ker}(g)} = 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(e_i) = f_i$, ce qui définit f sur S .

On a : $\forall x \in \text{Ker}(g), g(x) = 0 = h \circ f(x)$ et $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(e_i) = g_i = h(f_i) = h \circ f(e_i)$, donc $g = h \circ f$.

1.9.3 Projecteurs

Définition 1.9.4 (Projection) E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($E' \oplus E'' = E$). Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec (x', x'') dans $E' \times E''$. On appelle la projection sur E' parallèlement à E'' l'application

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x' + x'' & \mapsto x' \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi } x = \underbrace{p(x)}_{\in E'} + \underbrace{x - p(x)}_{\in E''}.$$

Proposition 1.9.10 (Propriétés des projections) Soit p la projection sur E' parallèlement à E'' .

1. $\text{Im } p = E'$ et $\text{Ker } p = E''$
Ainsi on a : $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$.
2. $x \in \text{Im}(p) \iff p(x) = x \iff x \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$
3. $p^2 (= p \circ p) = p$

Définition 1.9.5 (Projecteurs) On appelle projecteur de E tout endomorphisme qui coïncide avec une projection sur un sous-espace vectoriel de E parallèlement à un supplémentaire de celui-ci.

Remarque 1.9.9 1. Si f est un projecteur, alors $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$, mais attention la réciproque est fausse, voir l'exemple ci-dessous.

2. Si p est un projecteur, on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p^n = p$.

Proposition 1.9.11 (Caractérisation des projecteurs) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$. Dans ce cas f est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$.

Exemple 1.9.9 1. Soient E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que : $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$. On pose $r = p + q - pq$. Montrer que r est le projecteur sur $\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $G = \{g_1, \dots, g_q\}$ un sous-groupe fini de $GL(E)$.

(a) On pose $p = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q g_i$. Montrer que p est un projecteur.

(b) Montrer que $\text{Im}(p) = \bigcap_{i=1}^q \text{Ker}(g_i - \text{Id}_E)$.

Définition 1.9.6 (Projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $E_1, \dots, E_q$ des sous-

espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$. Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. On note p_k l'application telle que

$p_k|_{E_k} = \text{Id}_{E_k}$ et $p_k|_{E_i} = 0$, si $i \neq k$.

Autrement dit pour $x = x_1 + \dots + x_q$, avec $(x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$, on a $p_i(x) = x_i$.

Les applications $p_1, \dots, p_q$ sont appelés projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$.

Proposition 1.9.12 (Propriétés des projecteurs associés à $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$) En reprenant les notations précédentes, pour tout k de $\llbracket 1, q \rrbracket$ l'application p_k est un projecteur. En particulier, c'est une projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}} E_i$.

Démonstration : On pose $F_k = \bigoplus_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}} E_i$. Montrons que $E_k \oplus F_k = E$. Soit $x \in E$. Il existe

$(x_1, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_q$ tel que $x = x_1 + \dots + x_q$ et donc $x = x_k + \sum_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}} x_i$ qui est dans $E_k + F_k$.

Ainsi $E = E_k + F_k$.

Soit $x \in E_k \cap F_k$. Il existe $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_q) \in E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \dots \times E_q$ tel que

$\sum_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}} x_i = x$, soit $x_1 + \dots + x_{k-1} - x + x_{k+1} + \dots + x_q = 0$, ainsi grâce à la proposition 1.9.2, on a $x = 0$.
Ainsi $E_k \cap F_k = \{0\}$.
Pour $x = x_k + \sum_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}} x_i$ qui est dans $E_k + F_k$, on a $p_k(x) = x_k$, ce qui fait de p_k la projection sur E_k parallèlement à $\bigoplus_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket \setminus \{k\}}^q E_i$.

Remarque 1.9.10 1. Pour $i, j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on a $p_i \circ p_j =$

2. On a $\sum_{i=1}^q p_i =$

1.9.4 Symétries vectorielles

Définition 1.9.7 (Symétrie) E' et E'' désignent deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires ($E' \oplus E'' = E$). Tout élément x de E s'écrit de façon unique sous la forme $x = x' + x''$ avec (x', x'') dans $E' \times E''$. On appelle la symétrie sur E' parallèlement à E'' l'application

$$s : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x = x' + x'' & \mapsto x' - x'' \end{cases}.$$

Remarque 1.9.11 Soit p la projection sur E' parallèlement à E'' . Alors $s = 2p - Id_E$, car $x' - x'' = 2x' - (x' + x'')$.

Proposition 1.9.13 (Propriétés des symétries) Soit s la symétrie sur E' parallèlement à E'' . Alors :

1. $E' = \{x \in E / s(x) = x\} = \text{Ker}(s - Id_E)$ et $E'' = \{x \in E / s(x) = -x\} = \text{Ker}(s + Id_E)$.
2. $s^2 (= s \circ s) = Id_E$.

Définition 1.9.8 (L'ensemble des symétries) On appelle symétrie de E tout endomorphisme qui coïncide avec une symétrie sur un sous-espace vectoriel de E parallèlement à un supplémentaire de celui-ci.

Proposition 1.9.14 (Caractérisation des symétries) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une symétrie si et seulement si $f^2 = Id_E$. Dans ce cas f est la symétrie sur $\text{Ker}(f - Id_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + Id_E)$ et on a : $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + Id_E)$.

Exemple 1.9.10 Soit $s : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto A^T \end{cases}$. L'application s est une symétrie car elle est linéaire et :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), s^2(A) = s(s(A)) = s(A^T) = (A^T)^T = A$. De plus :

$\text{Ker}(s + Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, car : $s(A) + A = 0 \Leftrightarrow A^T = -A$.

$\text{Ker}(s - Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, car : $s(A) - A = 0 \Leftrightarrow A^T = A$.

Ainsi s est la symétrie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Grâce à la proposition précédente, on retrouve : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.10 Hyperplans

Soient E un espace $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On suppose $E \neq \{0_E\}$.

Définition 1.10.1 (Hyperplan) Soit H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est un hyperplan de E s'il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle, telle que $H = \text{Ker } \varphi$.

Dans ce cas, $H = \{x \in E, \varphi(x) = 0\}$, ce qui définit une équation de l'hyperplan H .

Proposition 1.10.1 (Hyperplans et équations en dimension finie) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un n -uplet non nul $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $H = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right\}$.

Exemple 1.10.1 Le plan P d'équation $x + y + z = 0$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 1.10.2 (Caractérisation géométrique des hyperplans) Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propositions suivantes sont équivalences :

- H est un hyperplan de E .
- H est supplémentaire d'une droite de E , c'est-à-dire il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Dans ce cas, toute droite D' non contenue dans H vérifie : $E = H \oplus D'$.

Exemple 1.10.2 Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E, f(3) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $E = F \oplus G$.

F est un hyperplan de E , car $F = \text{Ker}(\varphi)$ avec φ la forme linéaire non nulle de $E : \varphi : f \mapsto f(3)$ ($\varphi(1) = 1 \neq 0$).

On note $f_0 : x \mapsto x$ et donc G est la droite vectorielle $G = \text{vect}(f_0)$. Nous avons $f_0 \notin F$, donc grâce à la proposition précédente : $E = F \oplus G$.

Corollaire 1.10.1 (Caractérisation géométrique des hyperplans en dimension finie) Si E est de dimension n (avec n dans $\mathbb{N}^*$), alors les hyperplans sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Exemple 1.10.3 Déterminer une base de $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P = 0\}$.

Proposition 1.10.3 (Comparaison de deux équations d'hyperplan) Soit H un hyperplan de E

1. Soient φ et ψ deux formes linéaires telles que $H = \text{Ker} \varphi = \text{Ker} \psi$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.
2. Si E est de dimension finie n et H est un hyperplan ayant pour équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et

$\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_i = \lambda a_i$.

Proposition 1.10.4 (Caractérisation des espaces de dimension $n - p$) Soit E un espace vectoriel de dimension n .

- Si $(H_1, \dots, H_p)$ est une famille d'hyperplans de E , alors

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^p H_k \right) \geq n - p.$$

- Si F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$, il existe $(H_1, \dots, H_p)$ des hyperplans tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^p H_k.$$

Exemple 1.10.4 Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que $\bigcap_{l \in A} \text{Ker}(l) = \{0\}$. Montrer que $A = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

1.11 Algèbres

Définition 1.11.1 (Structure d'algèbre) Un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux lois de composition interne $+$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et $\times$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, et d'une loi $\cdot$: $\mathbb{K} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ externe, est une $\mathbb{K}$ -algèbre lorsque :

1. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.
2. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
3. Les lois $\times$ et $\cdot$ sont compatibles : $\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, (a \cdot x) \times (b \cdot y) = (ab) \cdot (x \times y)$.

On note usuellement $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$.

Exemple 1.11.1 Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$ -algèbres usuelles : $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$, où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X un ensemble non vide.

Définition 1.11.2 (Sous-algèbre) Un ensemble $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{A}$ lorsque $\mathcal{B}$ est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

Exemple 1.11.2

1. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie et intègre, alors c'est un corps.

Soit $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. On pose $f : x \mapsto ax$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est intègre, il est donc injectif, puis bijectif, en tant qu'endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi il existe $b \in \mathcal{A}$ tel que $ab = 1_{\mathcal{A}}$. De même il existe $c \in \mathcal{A}$ tel que $ca = 1_{\mathcal{A}}$. De la première relation, on a $cab = c$ et de la deuxième $cab = b$, donc $b = c$ et a possède un inverse. Ainsi dans l'anneau $\mathcal{A}$, tout élément non nul admet un inverse.

Définition 1.11.3 (Morphisme d'algèbres) Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux $\mathbb{K}$ -algèbres. Une application $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est un morphisme d'algèbre lorsque f est un morphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels.

Exemple 1.11.3

1. Fixons $a \in \mathbb{K}$. L'application $\text{ev}_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K} \\ P & \mapsto P(a) \end{cases}$, est un morphisme de la $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ dans la $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathbb{K}, +, \cdot, \cdot)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $g \in GL(E)$ fixé. L'application $\varphi_g : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ h & \mapsto g \circ h \circ g^{-1} \end{cases}$, est un morphisme de la $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ dans elle-même, car :

2 Matrices

2.1 Rappels de sup sur calcul matriciel

2.1.1 Opérations sur les matrices

Notation : Pour (i, j) dans $\mathbb{N}^2$, on note δ_{ij} le symbole de Kronecker défini par $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Définition 2.1.1 (Matrice) On appelle matrice de type (n, p) sur $\mathbb{K}$ toute application

$$A : \begin{cases} \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket & \rightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) & \mapsto a_{i,j} \end{cases}$$

On la note $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Elle est représentée par un tableau avec n lignes et p colonnes :

$$\begin{matrix} & & & j & & \\ & & & \uparrow & & \\ & & & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{ij} & & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nj} & \cdots & a_{np} \\ & & & \uparrow & & \\ i & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $n = p$, on parle de matrice carrée d'ordre n . Dans ce cas on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 2.1.2 (Opérations) 1. Soient $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ dans $\mathbb{K}$. On définit les opérations

(a) **Addition :** $A + B = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} + [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

(b) **Multiplication par un scalaire :** $\lambda A = \lambda \cdot [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = [\lambda a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

2. **Multiplication de deux matrices** Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et

$B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On appelle produit matriciel de A par B la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ notée

$$AB \text{ définie par } AB = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 2.1.1 1. **ATTENTION :** le produit matriciel n'est pas commutatif, on n'a pas $AB = BA$.

2. **ATTENTION :** $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$.

Disposition pratique :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & \boxed{a_{i,k}} & \cdots & \boxed{a_{i,q}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,k} & \cdots & a_{r,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & \boxed{b_{k,j}} & \cdots & b_{k,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & \cdots & \boxed{b_{q,j}} & \cdots & b_{q,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots & c_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r,1} & \cdots & c_{r,j} & \cdots & c_{r,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.1.1 1. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto MD - DM \end{cases}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

2. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Définition 2.1.3 (Matrice identité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a aussi $I_n = [\delta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. On appelle cette matrice la matrice identité.

Exemple 2.1.2 Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}$. Alors on a $I_n A = A$ et $B I_n = B$.

2.1.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 2.1.4 (Base canonique) Pour (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose

$$E_{ij} = \begin{matrix} & & & j & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & , \\ i & \end{matrix}$$

c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
 $E_{ij} = [\delta_{i,k} \delta_{l,j}]_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$. On appelle $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.1.1 (Décomposition de matrices suivant E_{ij}) 1. Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors on a une unique combinaison linéaire de A avec les matrices $(E_{ij}) : A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$.

2. $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.1.2 (Multiplication des éléments de la base canonique) Soient $(i, j, k, l) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket^2 \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On a $E_{ij} E_{kl} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

Exemple 2.1.3 Déterminer $C = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Remarque 2.1.2 On aurait pu utiliser l'exemple 1.4.1 : si E est un espace vectoriel (ici de dimension fini) et $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que pour tout x de E , la famille $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in \mathcal{L}(E), fg = gf$ (on retraduit notre propriété matricielle en endomorphismes)

Soit $x \in E$ non nul. Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = \text{vect}(x) \oplus F$. Soit p la projection sur $\text{vect}(x)$ parallèlement à F . On a donc $fp = pf$, puis f laisse stable $\text{Im}(p) = \text{vect}(x)$. Ainsi $(x, f(x))$ est liée, puis f est une homothétie.

2.1.3 Transposition

Définition 2.1.5 (Transposée) Soit $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée A^T et définie par $A^T = [a'_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$.

Proposition 2.1.3 (Opération et transposition) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. $(A^T)^T = A$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Exemple 2.1.4 1. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & a_{ij} \\ & -a_{ij} & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & 1 \\ & -1 & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$. Ainsi toute matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, se décompose de façon unique suivant la famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$, qui est donc une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Cette famille possède $n(n-1)/2$ éléments. Ainsi : $\dim_K(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.

De même $((E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}, (E_{ii})_{1 \leq i \leq n})$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et donc $\dim_K(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2 + n = n(n+1)/2$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Montrer que $X^T A Y = Y^T A^T X$.

$A Y$ est une matrice colonne et X^T est une matrice ligne, ainsi $X^T A Y$ est une matrice scalaire 1×1 . Elle est donc invariante par transposition : $(X^T A Y)^T = Y^T A^T (X^T)^T = Y^T A^T X$.

2.1.4 Trace

Définition 2.1.6 (Trace d'une matrice) Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle trace de A le scalaire $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, qui est la somme des éléments diagonaux de A .

Exemple 2.1.5 1. Soit $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $tr(\overline{M}^T M)$ ($\overline{M}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de M).

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $X + X^T = tr(X)A$.

Proposition 2.1.4 (Trace de la transposée) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $tr(A) = tr(A^T)$.

Proposition 2.1.5 (Opérations sur la trace)

1. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) \text{ (la trace est une forme linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{)}.$$
2. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a : $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Remarque 2.1.3

1. ATTENTION, on ne peut pas généraliser la proposition précédente avec trois matrices. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $ABC = 0$ et $BAC = C$ et donc $\text{tr}(ABC) = 0$ et $\text{tr}(BAC) = 1$ donc $\text{tr}(ABC) \neq \text{tr}(BAC)$.
2. ATTENTION : $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$ (prendre par exemple $A = B = I_n$).

Exemple 2.1.6

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Peut-on avoir : $AB - BA = I_n$?
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note Φ_A la forme linéaire $M \mapsto \text{Tr}(AM)$. Montrer que l'application $\Phi : A \mapsto \Phi_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1.5 Matrices inversibles

Définition 2.1.7 (Matrice inversible) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une matrice inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que l'on ait : $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. La matrice B est appelée l'inverse de la matrice A et est notée A^{-1} . L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et on l'appelle groupe linéaire d'ordre n .

Remarque 2.1.4

1. Ne jamais écrire $1/A$.
2. Soient $A, B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. Alors
 - $AB_1 = AB_2 \Rightarrow B_1 = B_2$.
 - $B_1A = B_2A \Rightarrow B_1 = B_2$.
 - (IMPORTANT) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel qu'il existe B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou C dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $AB = 0$ ou $CA = 0$ (on dit que A est un diviseur de 0)
 Alors A n'est pas inversible. En effet si A est inversible et si on a $AB = 0$ par exemple, alors on a $A^{-1}AB = A^{-1}0$ et donc $B = 0$, ce qui est impossible.

Exemple 2.1.7

1. $I_n^{-1} = I_n$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in GL_n(\mathbb{K}), (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer J^2 puis en déduire que J n'est pas inversible.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ. \text{ Ainsi } J(J - nI_n) = 0. \text{ Or } J - nI_n \neq 0, \text{ donc grâce à la remarque précédente, } J \text{ n'est pas inversible.}$$

4. **IMPORTANT** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. On a : $(PAP^{-1})^k =$
car

Remarque 2.1.5 1. **ATTENTION** : La matrice J montre que si une matrice carrée A est non nulle ou que tous ses coefficients sont non nuls, alors elle n'est pas forcément inversible.

2. **ATTENTION**, pour $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ inversible, l'exemple précédent montre que A^{-1} n'est pas égale à $[1/a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 2.1.6 (Opérations sur l'inverse) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
4. Pour tout k de $\mathbb{N}$, la matrice A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Définition 2.1.8 (Déterminant d'une matrice 2×2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le scalaire $ad - bc$.

Proposition 2.1.7 (Inverse d'une matrice 2×2) A est inversible si et seulement si $\det(A)$ est non nul. Dans ce cas, nous avons $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.1.6 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 2.1.9 (Matrice diagonale) $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale, quand :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{ij} = 0, \text{ c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \text{ On note celle-ci}$$

$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n .

Proposition 2.1.8 (Opération et matrice diagonale) Soit $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D' = \text{diag}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\lambda D = \text{diag}(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n)$
2. $D + D' = \text{diag}(\alpha_1 + \alpha'_1, \dots, \alpha_n + \alpha'_n)$
3. $DD' = D'D = \text{diag}(\alpha_1 \alpha'_1, \dots, \alpha_n \alpha'_n)$
4. $\forall k \in \mathbb{N}, D^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$
5. $D \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i \neq 0$ et dans ce cas, $D^{-1} = \text{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$.

Définition 2.1.10 (Matrices antisymétriques et symétriques) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est symétrique si $A^T = A$ et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ est symétrique, alors : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} = a_{ji}$.
- On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ est antisymétrique, alors : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ij} = -a_{ji}$.

Remarque 2.1.6 1. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

2. Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétriques sont nuls, car :
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$.

3. Le produit de matrices symétriques n'est pas toujours symétrique en effet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1.11 (Matrices triangulaires) 1. $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure, quand :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j < i \implies a_{ij} = 0, \text{ c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.

2. $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure, quand :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j \implies a_{ij} = 0, \text{ c'est-à-dire } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures à coefficient dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.1.9 (Opérations et matrices triangulaires)

1. Soient A et B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(a) $A + B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

(b) $\lambda A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

(c) $AB \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

2. On a les mêmes propriétés pour les matrices triangulaires inférieures.

Remarque 2.1.7 $\begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$

On a le même type de produit pour les matrices triangulaires inférieures.

Proposition 2.1.10 (Matrices triangulaires inversibles)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

(a) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{kk} \neq 0$.

(b) Si A est inversible, alors A^{-1} est dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et A^{-1} est de la forme $\begin{pmatrix} 1/a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix},$

attention on ne peut rien dire pour les coefficients en dehors de la diagonale !

2. On a les mêmes types de résultats pour $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Exemple 2.1.8 Déterminer $C = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \forall M \in GL_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

Remarque 2.1.8 On aurait pu utiliser l'exemple 1.4.1 : si E est un espace vectoriel (ici de dimension fini) et $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que pour tout x de E , la famille $(x, u(x))$ est liée, alors u est une homothétie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall g \in GL(E), fg = gf$ (on retraduit notre propriété matricielle en endomorphismes)

Soit $x \in E$ non nul. Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que $E = \text{vect}(x) \oplus F$. Soit s la symétrie vectorielle sur $\text{vect}(x)$ parallèlement à F . Ainsi s est bijective, donc on a donc $fs = sf$, puis f laisse stable $\text{Im}(s) = \text{vect}(x)$. Ainsi $(x, f(x))$ est liée, puis f est une homothétie.

2.1.7 Matrices par blocs

Définition 2.1.12 (Matrices par blocs) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_m = n$ et $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_q = p$ tels que pour tout $r \leq \min(m, q)$, on ait $i_r = j_r$. Pour $1 \leq r \leq m$ et $1 \leq s \leq q$, on pose $A_{rs} = (a_{i,j})_{\substack{i_{r-1} < i \leq i_r \\ j_{s-1} < j \leq j_s}}$.

Les matrices A_{rs} sont des sous-matrices de A , appelées blocs et l'écriture $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mq} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.11 (Combinaison linéaire de matrices par blocs) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mq} \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mq} \end{pmatrix}$, avec des blocs de même taille. On a alors on a :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \dots & \lambda A_{1q} + \mu B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} + \mu B_{m1} & \dots & \lambda A_{mq} + \mu B_{mq} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1.12 (Produit par blocs) Soient $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$. Alors on a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Démonstration : Écrivons le produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ sous forme de blocs $\begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix}$. On

pose $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$. Regardons le bloc B'' par exemple qui doit être dans $\mathcal{M}_{n_1,q_2}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \llbracket 1, q_2 \rrbracket$. On note $[B'']_{i,j}$ le coefficient (i, j) de B'' et on adoptera la

même notation pour les autres matrices. On a : $[B'']_{i,j} = [UV]_{i,q_1+j} = \sum_{k=1}^{p_1+p_2} [U]_{i,k} [V]_{k,p_1+j} =$

$$\sum_{k=1}^{p_1} [U]_{i,k} [V]_{k,p_1+j} + \sum_{k=p_1+1}^{p_1+p_2} [U]_{i,k} [V]_{k,p_1+j} = \sum_{k=1}^{p_1} [A]_{i,k} [B']_{k,j} + \sum_{k=1}^{p_2} [B]_{i,k} [D']_{k,j} = [AB' + BD']_{i,j}.$$

On procède de même pour les autres blocs.

Remarque 2.1.9 On peut généraliser ce produit avec plus de blocs.

Proposition 2.1.13 (Transposition) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T =$

Démonstration : On pose $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$,

$D \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ et $V = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$.

Soit $j \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, p_1 \rrbracket$. On a $[U]_{j,i} = [A]_{j,i} = [A^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.

Soit $j \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket p_1 + 1, p_1 + p_2 \rrbracket$. On a $[U]_{j,i} = [B]_{j,i} = [B^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.

Soit $j \in \llbracket n_1 + 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, p_1 \rrbracket$. On a $[U]_{j,i} = [C]_{j,i} = [C^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.

Soit $j \in \llbracket n_1 + 1, n_1 + n_2 \rrbracket$ et $i \in \llbracket p_1 + 1, p_1 + p_2 \rrbracket$. On a $[U]_{j,i} = [D]_{j,i} = [D^T]_{i,j} = [V]_{i,j}$.

Exemple 2.1.9 1. Calculer les puissances successives de $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A*B$ la matrice carrée d'ordre np , dont la représentation par blocs carrés d'ordre p est :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

On appelle cela le produit d'Hadamard.

- (a) Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A * B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$.

- (b) Montrer que :

$$\forall (A, A') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \forall (B, B') \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2, (A * B)(A' * B') = (AA') * (BB').$$

- (c) On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont inversibles. Montrer que $A*B$ est inversible et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1} .

3. Montrer que si A et D sont dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Cherchons un inverse de la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & B' \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$ On a :

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & B' \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B + B'D \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \text{ Il suffit d'avoir } A^{-1}B + B'D = 0, \text{ soit}$$

$$-A^{-1}B = B'D, \text{ soit } B' = -A^{-1}BD^{-1}. \text{ Ainsi } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ est inversible et } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

En en déduit que si on a une matrice digonale par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et si A et D sont inversibles

$$\text{alors } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & 2A \end{pmatrix}$, avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible et expliciter M^{-1} .

2.2 Rappels de sup sur les représentations matricielles

2.2.1 Lien entre matrices et applications linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soient $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour j dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on a $f(u_j)$ dans $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_n)$ et on peut écrire $f(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$, où a_{ij} est la i -ème coordonnée du vecteur $f(u_j)$ dans la base $\mathcal{V}$.

Définition 2.2.1 (Matrice d'une application linéaire) La matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et est notée $\text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f)$. On a :

$$\begin{matrix} & f(u_1) & f(u_2) & & f(u_j) & & f(u_p) \\ v_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_i & \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{matrix} \quad .$$

On note $Mat_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f) = Mat_{\mathcal{U}}(f)$.

Remarque 2.2.1 Le nombre de colonnes est donné par la dimension de l'espace de départ et le nombre de lignes par la dimension de l'espace d'arrivée.

Définition 2.2.2 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice) On peut identifier ca-

noniquement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que l'on identifie la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec le n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. L'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$ s'identifie canoniquement à une application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On dit que f est l'application linéaire canoniquement associée à A . Ainsi A est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2.2.1 (Correspondance entre matrice et application linéaire) L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \rightarrow Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque 2.2.2 1. À une matrice A , on ne peut donc associer qu'une seule application f telle que $A = Mat_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$.

2. On retrouve que $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$.

Exemple 2.2.1 1. Pour toute base $\mathcal{U}$ de E , on a : $Mat_{\mathcal{U}}(Id_E) = I_n$.

2. On suppose que E' et E'' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Soit

$\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base adaptée à $E = E' \oplus E''$, avec $(u_1, \dots, u_r)$ une base de E' et $(u_{r+1}, \dots, u_p)$ une base de E'' , p la projection sur E' parallèlement à E'' et s la symétrie sur E' parallèlement à E'' .

Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On a $p(u_j) = u_j$ et $s(u_j) = u_j$. Soit $j \in \llbracket r+1, p \rrbracket$. On a : $p(u_j) = 0$ et

$$s(u_j) = -u_j. \text{ Ainsi } Mat_{\mathcal{U}}(p) = \begin{matrix} & \begin{matrix} p(u_1) & \cdots & p(u_r) & p(u_{r+1}) & \cdots & p(u_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & (0) & & & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ et}$$

$$Mat_{\mathcal{U}}(s) = \begin{matrix} & \begin{matrix} s(u_1) & \cdots & s(u_r) & s(u_{r+1}) & \cdots & s(u_p) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \\ u_{r+1} \\ \vdots \\ u_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & (0) & & & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer un plan vectoriel stable par f .

Interprétation d'une matrice triangulaire

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension n , $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.2 (Matrices triangulaires) A est dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, le sous-espace vectoriel $E_k = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$ de E est stable par f ($f(E_k) \subset E_k$).

$$\begin{matrix} & f(u_1) \dots & f(u_k) & \dots & f(u_n) \\ u_1 & \left(\begin{array}{cccc} * & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & * & \\ & & & \ddots \end{array} \right) & \\ \vdots & & & & \\ u_k & & & & \\ \vdots & & & & \\ u_n & & (0) & & \end{matrix}.$$

Interprétation d'une matrice diagonale

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension n , $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.3 (Matrices diagonales) A est dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si :

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{K}, f(u_k) = \lambda_k u_k$.

$$\begin{matrix} & f(u_1) \dots & f(u_k) & \dots & f(u_n) \\ u_1 & \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & (0) \\ & & \lambda_k & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{array} \right) & \\ \vdots & & & & \\ u_k & & & & \\ \vdots & & & & \\ u_n & & & & \end{matrix}.$$

Interprétation de certaines matrices par blocs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension n , E' un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E telle que $(u_1, \dots, u_r)$ soit une base de E' et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$.

Proposition 2.2.4 (Matrices par blocs) E' est stable par f (c'est-à-dire $f(E') \subset E'$) si et seulement si A est de la forme :

Dans ce cas $\mathcal{U}_1 = (u_1, \dots, u_r)$ est une base de E' et si on note f_1 l'endomorphisme induit par f sur E' $\left(f_1 : \begin{cases} E' & \rightarrow E' \\ x & \mapsto f(x) \end{cases} \right)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{U}_1}(f_1) =$

Remarque 2.2.3 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\mathcal{B}_i$ une base de E_i . On a vu que si $\mathcal{B}$ est la famille obtenue en

juxtaposant les $\mathcal{B}_i$, alors c'est une base de E adaptée à $\bigoplus_{i=1}^p E_i$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Chaque sous-espace vectoriel E_i est stable par f si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) =$

Dans ce cas f induit des endomorphismes sur les E_i et la matrice de $f|_{E_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ est A_i .

Exemple 2.2.2 1. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = -\text{Id}$.

(a) Montrer que si $a \neq 0$, $(a, f(a))$ est libre ; on pose $F(a) = \text{vect}(a, f(a))$.

(b) Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^n F(a_i)$.

(c) En déduire que E est de dimension paire et trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de matrices 2×2 .

2. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $2n$ et f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.5 (Lien entre opérations matricielles et applications linéaires) 1. En reprenant les notations de la définition 2.2.1, pour f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$ et λ dans $\mathbb{K}$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(g) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f).$$

2. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$, $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{W} = (w_j)_{1 \leq j \leq q}$.

$$\text{Soient } f \in \mathcal{L}(E, F), g \in \mathcal{L}(F, G) \text{ et } A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } B = \text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(g) = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

$$\text{Alors } BA = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(g \circ f) = [c_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}.$$

$$\text{Ainsi on a } \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{W}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f).$$

Exemple 2.2.3 1. Soit $C = \left[\binom{j-1}{i-1} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer C^p , pour p dans $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer M_n^n .

Proposition 2.2.6 (Matrice inversible) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible. Dans ce cas : $\text{Mat}_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}(f^{-1}) = A^{-1}$

Exemple 2.2.4 Soit $C = \left[\binom{j-1}{i-1} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer C^{-1} .

2.2.2 Lien entre matrices et familles de vecteurs

Définition 2.2.3 (Matrice d'une famille de vecteurs) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de vecteurs de E .

On a : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$, où a_{ij} est la i -ème coordonnée du vecteur x_j dans la base $\mathcal{U}$.

On appelle matrice de la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$ dans la base $\mathcal{U}$ la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_p) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_p \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Remarque 2.2.4 Si on n'a qu'un seul vecteur x de E dans cette famille, alors $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(x) = X$ est la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{U}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i u_i \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

On peut ainsi identifier les vecteurs de E avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices colonnes de taille n via l'isomorphisme $\begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x) \end{cases}$.

Proposition 2.2.7 (Matrice inversible et base) Soit $\mathcal{U}$ une base de E . Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de E et on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_p)$.

Alors $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de E si et seulement si A est inversible.

2.2.3 Noyau et Image d'une matrice

Proposition 2.2.8 (Image d'un vecteur par une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. Il existe $x_1, \dots, x_p$ et $y_1, \dots, y_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{j=1}^p x_j u_j$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$. On

pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{V}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On a : $y = f(x) \iff Y = AX$

Remarque 2.2.5 Si f est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F , ne pas oublier que la matrice de f représente des coordonnées dans une certaine base de vecteurs de E ou F . Donc quand on travaille avec les vecteurs de E ou F à partir de la matrice, il faut bien retranscrire les vecteurs dans la base de E ou F et ne pas les écrire comme éléments de $\mathbb{K}^p$ ou $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire ne pas considérer $(x_1, \dots, x_p)$ ou $(y_1, \dots, y_n)$ comme des vecteurs de E ou F , mais les retranscrire dans les bonnes bases : $\sum_{i=1}^p x_i u_i$ et $\sum_{i=1}^n y_i v_i$.

Définition 2.2.4 (Image et noyau d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On appelle noyau de A qui est noté $\text{Ker } A$ l'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}$ que l'on peut identifier à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
2. On appelle image de A que noté $\text{Im}(A)$ l'ensemble $\{AX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ (qui est inclus dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) et que l'on identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 2.2.6 1. L'image et le noyau de A s'identifient donc au noyau et à l'image de l'application canoniquement associée à A .

2. Si la matrice d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est A dans une certaine base, nous pouvons trouver les coordonnées des éléments de $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ grâce à $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$. Cependant ne pas oublier de retranscrire les éléments de $\text{Ker}(A)$ en vecteurs de E grâce aux coordonnées et de même pour les éléments de $\text{Im}(A)$ qu'il faudra retraduire en vecteurs de F .

Définition 2.2.5 (Rang) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ ses vecteurs colonnes. On pose $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Exemple 2.2.5 Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. Déterminer le rang de $M = [\cos(i+j)]_{1 \leq i,j \leq n}$, pour $n \geq 2$.

2. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que B est de rang un si et seulement s'il existe $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls telles que : $B = VU^T$.
- (b) En déduire que pour toute matrice B de rang un, on a : $B^2 = \text{tr}(B)B$.

Proposition 2.2.9 (Image et colonnes d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\text{Im}(A)$ est engendré par les colonnes de A ($\text{Im}(A) = \text{vect}(C_1, \dots, C_p)$ avec $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A).
2. $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Exemple 2.2.6 L'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est le projecteur sur } \text{vect}(1 - X^2, X - X^3) \text{ parallèlement à } \text{vect}(1 + X^2, X + X^3).$$

On remarque que $B^2 = B$, donc $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

$$\bullet \text{Ker}(f) : B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ -x + z = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi } \text{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \text{ Ainsi } \text{Ker}(f) = \text{vect}(1 + X^2, X + X^3).$$

$$\bullet \text{Im}(f) : \text{Im}(B) = \text{vect} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Donc } \text{Im}(f) = \text{vect}(1 - X^2, X - X^3).$$

Proposition 2.2.10 (Caractérisation de l'inversibilité par le noyau et l'image) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

Remarque 2.2.7 Ceci est à rapprocher de la situation d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie qui est bijectif si et seulement si il est injectif.

Proposition 2.2.11 (Rang d'une matrice/rang d'une application linéaire) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respective p et n et de base respective $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f)$. Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Remarque 2.2.8 (IMPORTANT) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous avons aussi un théorème du rang pour les matrices : $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) =$
Ceci provient de l'application du théorème du rang à l'application canoniquement associée à $X \mapsto AX$ qui va de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.2.7 Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec A inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{rg}(M) = n + \text{rg}(D - CA^{-1}B)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer son inverse dans ce cas.

Proposition 2.2.12 (Rang d'une matrice/rang d'une famille de vecteurs) *Le rang d'une famille finie $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie est égale au rang de la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_p)$ de ces vecteurs dans n'importe quelle base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E , c'est-à-dire : $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}(A)$.*

2.2.4 Matrices de passage

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{U} = (u_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de E . Soit $\mathcal{U}' = (u'_j)_{1 \leq j \leq n}$ une autre base de E .

Ainsi pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut écrire : $u'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$. On a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(u'_1, \dots, u'_n) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_j & \cdots & u'_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{matrix}.$$

Définition 2.2.6 (Matrice de passage) On note $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{U}'$.

En particulier, nous avons $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = \text{Mat}_{\mathcal{U}', \mathcal{U}}(Id_E)$, car : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, Id_E(u'_j) = u'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_j$.

Proposition 2.2.13 (Inversibilité de la matrice de passage) La matrice $P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} = P_{\mathcal{U}'}^{\mathcal{U}}$.

Exemple 2.2.8 Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

que l'on appelle matrice de Vandermonde.

Montrer que V est inversible et déterminer son inverse. On pourra interpréter V comme la matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Proposition 2.2.14 (Changement de base pour des vecteurs) Soit x dans E . Il existe $x_1, \dots, x_n$ et $x'_1, \dots, x'_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$x = \sum_{j=1}^n x_j u_j = \sum_{j=1}^n x'_j u'_j$. On pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{U}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Alors on a :
 $X = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} X'$.

Exemple 2.2.9 Décomposer X^3+1 dans la base $\mathcal{V} = ((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3)$ (voir exemple 1.8.3). On posera $\mathcal{U} = (1, X, X^2, X^3)$ et $M = P_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}$. On pourra constater que $M^2 = 8I_4$.

Proposition 2.2.15 (Changement de base pour une application linéaire) Soient F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux bases de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{U}', \mathcal{V}'}(f)$.
 $A' = \text{Mat}_{\mathcal{U}', \mathcal{V}'}(f) = P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} \text{Mat}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}(f) P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} = (P_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{V}})^{-1} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$.

En particulier si nous avons $E = F$, en général on choisit $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ et $\mathcal{U}' = \mathcal{V}'$ et on a : $A' = (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} A P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ ou $A = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'} A' (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1}$.

Exemple 2.2.10 Pour P dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 3XP$. On reprend les notations de l'exemple 2.2.9. On admet que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Soit $Z = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(\varphi)$.

1. Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{V}}(\varphi)$.
2. Comment calculer simplement Z^n pour n dans $\mathbb{N}$.

2.2.5 Matrices semblables

Définition 2.2.7 (Matrices semblables) Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible telle que : $A = P A' P^{-1}$.

Remarque 2.2.9

1. (IMPORTANT) Grâce à la proposition précédentes, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
2. Deux matrices semblables ont le même rang : on ne change pas le rang par multiplication par des matrices inversibles.
3. Toute matrice A est semblable à elle-même : $A = I_n A I_n^{-1}$.

Exemple 2.2.11 1. Quelles sont les matrices semblables à λI_n , avec λ dans $\mathbb{K}$?

$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}), P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_n$: il n'y a que λI_n .

2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ tel que $A^3 = 0$ et $\text{rg}(A) = 2n$.

Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\text{tr}(M) = 0$.

(a) Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur sa diagonale.

(b) Montrer qu'il existe $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = RS - SR$.

2.2.6 Trace d'un endomorphisme

Proposition 2.2.16 (Trace de matrices semblables) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a : $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$. Ainsi deux matrices semblables ont la même trace.

Exemple 2.2.12 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Non, car $\text{tr}(A) = 3 \neq 4 = \text{tr}(B)$.

Proposition 2.2.17 (Invariance de la trace par changement de base) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f))$ est indépendant de la base $\mathcal{U}$.

Définition 2.2.8 (Trace d'un endomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\text{tr}(f)$ que l'on appelle trace de l'endomorphisme f , le scalaire $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f))$ qui est indépendant de la base $\mathcal{U}$.

Proposition 2.2.18 (Trace d'un projecteur) Soit p un projecteur de rang r . Alors $\text{tr}(p) = r$.

Exemple 2.2.13 1. On suppose que $E = F \oplus G$ et on considère s la symétrie sur F parallèlement à G . Alors $\text{tr}(s) = \dim(F) - \dim(G)$.

On a vu que dans une certaine base $\mathcal{U}$ adaptée à $E = F \oplus G$, on a : $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

le nombre de 1 étant $\dim(F)$ et le nombre de -1 est $\dim(G)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme Q défini par :

$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$. Soit f l'application qui au polynôme P associe le polynôme Q . Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $\text{tr}(f)$.

Par linéarité de l'intégrale, f est linéaire.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$f(X^k) = \frac{(X+1)^{k+1}}{k+1} - \frac{X^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \left(X^{k+1} + \binom{k+1}{1} X^k + \dots + X^{k+1} \right) = X^k + \dots + \frac{1}{k+1}$. Donc : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $f(P) = \sum_{k=0}^n a_k f(X^k)$ reste dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, si on note

$\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$, le calcul des $f(X^k)$ donne : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & f(1)\dots & f(X^k) & \dots & f(X^n) \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ X^k & & & 1 & (*) \\ \vdots & & & & \ddots \\ X^n & (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\text{tr}(f) = n+1$, car la matrice est

de taille $n+1$.

Proposition 2.2.19 Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \text{tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda \text{tr}(u) + \mu \text{tr}(v)$.
2. $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

Exemple 2.2.14 Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soient $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E . Montrer que si $p = p_1 + \dots + p_k$ est un projecteur, alors : $\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.

2.3 Rappels de sup sur l'obtention du rang d'une matrice

2.3.1 Opérations élémentaires

Définition 2.3.1 (Opérations élémentaires sur une matrice) On appelle opération élémentaire sur les

lignes d'une matrice $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ (les L_i étant les vecteurs lignes de A) l'une des opérations suivantes.

1. Type I : Addition à une ligne de la combinaison linéaire d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j, i \neq j$, avec λ dans $\mathbb{K}$. Cela correspond à une multiplication à gauche par $I_n + \lambda E_{i,j}$.
2. Type II : Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul : $L_i \leftarrow \alpha L_i, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Cela correspond à une multiplication à gauche par $\text{diag}(1, \dots, \alpha, \dots, 1)$, avec α en position i .
3. Type III : Échange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j, i \neq j$. Cela correspond à une multiplication à gauche par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

On appelle opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A = (C_1 \ \dots \ C_n)$ (les C_i étant les vecteurs colonnes de A) l'une des opérations suivantes.

1. Type I : Addition à une colonne de la combinaison linéaire d'une autre : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j, i \neq j$, avec λ dans $\mathbb{K}$. Cela correspond à une multiplication à droite par $I_n + \lambda E_{j,i}$.
2. Type II : Multiplication d'une colonne par un scalaire non nul : $C_i \leftarrow \alpha C_i, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Cela correspond à une multiplication à droite par $\text{diag}(1, \dots, \alpha, \dots, 1)$, avec α en position i .
3. Type III : Échange de deux colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j, i \neq j$. Cela correspond à une multiplication à droite par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Remarque 2.3.1 1. Les opérations élémentaires sur les lignes se traduisent par des multiplications à gauche par des matrices inversibles P et celles sur les colonnes par des multiplications à droite par P . Pour savoir quelles sont les matrices inversibles P correspondantes, il suffit d'appliquer l'opération élémentaire voulue sur I_n et le résultat obtenu donne directement P , car $PI_n = P = I_n P$.

2. Les matrices du type $I_n + \lambda E_{i,j}$, avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées matrices de transvection. Les matrices $\text{diag}(1, \dots, \alpha, \dots, 1)$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$ sont appelées matrices de dilatation.

Proposition 2.3.1 (Invariance du noyau et de l'image par opérations élémentaires) 1. Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image d'une matrice.

2. Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau d'une matrice.

Proposition 2.3.2 (Invariance du rang) 1. On ne change pas le rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes.

2. On ne change pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \dots, L_n$ ses vecteurs lignes. On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n)$.

Remarque 2.3.2 (IMPORTANT) Pour trouver le rang d'une matrice, on se ramène par la méthode du

pivot de Gauss soit par des opérations sur les lignes à une matrice du type
$$\begin{pmatrix} * & \dots & & & \\ & * & \dots & & \\ (0) & & \ddots & & \\ & & & * & \dots \\ & & & & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

soit par des opérations sur les colonnes à une matrice du type
$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ \vdots & * & & (0) & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & & & * & \\ & & & \vdots & 0 \\ & & & & \vdots \end{pmatrix}.$$
 Dans le premier

cas, on compte le nombre de lignes non nulles et dans le deuxième cas, le nombre de colonnes non nulles.

Exemple 2.3.1 1. Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss, dont les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.

$$A \xrightarrow[C_1 \leftrightarrow C_3]{\sim_C} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + aL_2]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a(a+1) \end{pmatrix}.$$

- Si $a \neq 0$ et $a \neq -1$: la matrice est de rang 3.
- Si $a = 0$: on a $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{rg}(A) = 2$, car les lignes sont engendrées par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$ qui sont indépendantes.
- Si $a = -1$: on a $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{rg}(A) = 2$, car les lignes sont engendrées par $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$ qui sont indépendantes.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe des matrices de transvection $U_1, \dots, U_r, V_1, \dots, V_s$ telles

$$\text{que } A = U_r \dots U_1 D_n(\det(A)) V_1 \dots V_s, \text{ avec } D_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K}.$$

En déduire que l'ensemble des matrices de transvection engendrent le groupe $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(M) = 1\}$.

Remarque 2.3.3 ATTENTION : Le rang n'est pas égal en général au nombre de lignes ou de colonnes non nulles d'une matrice. Ceci est vrai seulement dans le cas d'une matrice échelonnée, il suffit de voir la matrice J de l'exemple 2.2.5.

Proposition 2.3.3 (Rang d'un produit) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors on a : $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.

Proposition 2.3.4 (Matrices inversibles) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$.

Nous adoptons la disposition suivante : on pose $(A|I_n)$ et nous appliquons l'algorithme de Gauss QUE SUR LES LIGNES à la matrice A jusqu'à obtenir I_n et nous appliquons simultanément les opérations successives dans le même ordre sur I_n . Ainsi on répercute les opérations successives sur $(A|I_n)$.

Exemple 2.3.2 Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2/3]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & | & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & | & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3/3]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 2/3 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Matrices équivalentes

Définition 2.3.2 (Matrice J_r) Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$. On note J_r la matrice définie par blocs par $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, p-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, p-r} \end{pmatrix}$.

Proposition 2.3.5 (Changement de base et matrice J_r) Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension respectives p et n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r . Alors pour une certaine base $\mathcal{B}$ de E et une certaine base $\mathcal{C}$ de F , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_r$.

Exemple 2.3.3 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(F, E)$ pour lesquels : $fgf = 0$. Déterminer $\dim(\mathcal{G})$.

Corollaire 2.3.1 (Matrices équivalentes à J_r) Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \llbracket 0, \min\{n, p\} \rrbracket$. Alors $\text{rg } M = r$ si et seulement s'il existe deux matrices $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $M = QJ_rP$.

Remarque 2.3.4 Ce résultat s'obtient manuellement en appliquant la méthode du pivot de Gauss, dans laquelle, chaque opération élémentaire correspond à une multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.

Définition 2.3.3 (Matrices équivalentes) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. Les matrices A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = PBQ.$$

Corollaire 2.3.2 (Caractérisation des matrices équivalentes) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Exemple 2.3.4 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a :
 $\text{rg } D = \text{rg } A + \text{rg } B$.

2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ une application non constante telle que :
 $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(A)f(B)$.
 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

2.3.3 Matrices extraites

Définition 2.3.4 (Matrice extraite) Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$. La matrice $B = (a_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ est une matrice extraite de A .

Proposition 2.3.6 (Rang et matrices extraites) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées extraites inversibles de A .

Exemple 2.3.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Montrer que le rang de A en tant que matrice de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{C}$ est le même.

2.3.4 Systèmes linéaires

Définition 2.3.5 (Systèmes linéaires) On appelle système linéaire de n équations linéaires, à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, un système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases} ; \text{ avec } a_{ij}, b_i \in \mathbb{K} \text{ donnés pour } (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket.$$

La matrice $A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée matrice associée au système (S) .

Lorsque tous les b_i sont nuls, on obtient le système homogène associé.

On note $L(S)$ l'ensemble des p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$ qui vérifient chaque ligne de (S) . C'est l'ensemble des solutions de (S) qui est une partie de $\mathbb{K}^p$.

Définition 2.3.6 (Système compatible) Si le système possède des solutions, il est dit compatible, sinon les équations du système sont dites incompatibles.

Remarque 2.3.5 (IMPORTANT) Sur un système, on peut effectuer les mêmes opérations élémentaires que sur les lignes d'une matrice. Le but est d'arriver par la méthode du pivot de Gauss à un système dont la matrice est échelonnée. Ceci est licite car on a la proposition suivante.

Proposition 2.3.7 (Opérations élémentaires sur un système) Tout système linéaire S' obtenu à partir de S par un nombre fini d'opérations élémentaires ont exactement les mêmes solutions.

Proposition 2.3.8 (Interprétation matricielle) On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ la matrice associée au système (S) et on pose B la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Résoudre (S) revient à chercher $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ tel que l'on ait $AX = B$. La matrice B s'appelle second membre du système.

Le système homogène associé est : $AX = 0$.

Proposition 2.3.9 (Rang et dimension de l'espace des solutions d'un système homogène) En reprenant les notations de la proposition précédente, si on note $r = \text{rg}(A)$, on dit que r est le rang du système.

$\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX = 0\} = \text{Ker}(A)$ est un espace vectoriel de dimension $p - r$.

Proposition 2.3.10 (Structure de l'espace des solutions) L'espace des solutions du système $AX = B$ est l'espace affine $X_0 + \text{Ker}(A)$, avec X_0 une solution particulière de $AX = B$.

Proposition 2.3.11 (Systèmes et matrices inversibles) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. Pour tout B de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.

Dans ce cas le système $AX = B$ admet une unique solution : $X = A^{-1}B$ et on dit que ce système est de Cramer.

Exemple 2.3.6 Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $AX = 0$, alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{ii}||x_i| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} |a_{ij}||x_j|$, puis que si X est non nul alors il existe i_0 tel que : $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} |a_{i_0 j}|$.
2. En déduire une condition suffisante pour que A soit inversible.

Inverser une matrice à l'aide d'un système linéaire

Cette méthode est utile pour inverser une matrice $n \times n$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On veut déterminer A^{-1} .

On considère le système $AX = Y$ avec $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ quelconque fixé dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

l'inconnue, qui admet une unique solution grâce à la proposition 2.3.11. Celle-ci est donnée par $X = A^{-1}Y$.

En pratique on résout le système $AX = Y$ avec Y quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que l'on exprime les x_i en fonction des y_i . On écrit ensuite cette solution à l'aide d'un produit matriciel de la forme BY (la solution trouvée dépend de Y). On lit ensuite les coefficients de A^{-1} sur la solution trouvée, car on aura $B = A^{-1}$

Exemple 2.3.7 Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1} avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$.

3 Endomorphismes et matrices particulières (spé)

3.1 Polynômes d'un endomorphisme ou de matrices

Dans ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.1.1 Morphisme $P \mapsto P(u)$; noyau et image de ce morphisme

Définition 3.1.1 (Polynôme d'endomorphisme/matrices) Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$,

- on définit l'endomorphisme : $P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$ où $u^0 = Id_E$.
- on définit la matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$ où $A^0 = I_n$.

Remarque 3.1.1 1. *ATTENTION : soit $x \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u^4 + 3u^2 + id_E$ est un endomorphisme de E , donc $u^4(x) + 3u^2(x) + x$ a un sens, mais $(u(x))^4 + 3(u(x))^2 + x$ ne veut rien dire, car multiplier les vecteurs $u(x)$ entre eux n'a pas de sens.*

2. *ATTENTION : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A^3 + 5A = A(A^2 + 5I_n)$, mais ne pas écrire $A^3 + 5A = A(A^2 + 5)$, car additionner une matrice et un nombre n'a pas de sens pour des raisons d'incompatibilité de taille.*

Proposition 3.1.1 (Morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$) L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ dans l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$:

- $1_{\mathbb{K}[X]}(u) = Id_E$;
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$;
- $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

De même $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times) & \rightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot) \\ M & \mapsto & P(M) \end{array} \right.$ définit un morphisme d'algèbre.

Démonstration : Montrons le dernier point.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et on pose $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$ et $Q = \sum_{q=0}^m b_q X^q$. On a donc : $PQ = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q X^{p+q})$.

Donc : $(PQ)(u) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q u^{p+q})$.

$$\text{Or : } P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{p=0}^n a_p u^p \right) \circ \left(\sum_{q=0}^m b_q u^q \right) = \sum_{p=0}^n \left(a_p u^p \circ \sum_{q=0}^m b_q u^q \right).$$

$$\text{Par linéarité de } u, \text{ on a : } P(u) \circ Q(u) = \sum_{p=0}^n a_p \left(\sum_{q=0}^m u^p \circ b_q u^q \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m (a_p b_q u^{p+q}).$$

Remarque 3.1.2 (IMPORTANTE) $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

En effet, soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. D'après la proposition précédente, on a :

$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$, en réutilisant la proposition précédente.

3.1.2 Polynômes annulateur

Définition 3.1.2 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme) Les polynômes P tels que $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$) sont appelés polynômes annulateurs de u (resp. de A).

L'ensemble des polynômes annulateurs est donc le noyau du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ (resp. $P \mapsto P(A)$) allant $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ dans $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ (resp. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$).

Proposition 3.1.2 (Idéal annulateur de u/A) L'ensemble des polynômes annulateurs de u (resp. A) forment un idéal $I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\}$ (resp. $I = \{P \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0\}$) de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, appelé idéal annulateur de u (resp. A).

Ceci implique que : $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \Rightarrow (PQ)(u) = 0$

(resp. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0 \Rightarrow (PQ)(A) = 0$).

Démonstration : Faisons la démonstration pour u (pour A c'est la même chose).

Montrons que $(I, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

• $0 \in I$.

• Soient $P, Q \in I$. On a : $(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0 - 0 = 0$. Donc $P - Q$ est dans I .

Montrons que si P est dans I et Q dans $\mathbb{K}[X]$, alors $(PQ)(u) = 0$.

On a : $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$, grâce à l'exemple précédent. Or $P(u) = 0$, donc $(PQ)(u) = 0$.

Proposition 3.1.3 (Existence d'un polynôme minimal d'un endomorphisme/matrice) On suppose E de dimension finie et u et A non nuls. Parmi les polynômes annulateurs de u (resp. A), il en existe un unique noté $\mu_u(X)$ ou $\pi_u(X)$ (resp. $\mu_A(X)$ ou $\pi_A(X)$) qui est celui de degré minimal et unitaire.

Démonstration : Grâce à l'exemple 1.8.2, il existe un polynôme annulateur de A non nul. L'ensemble des polynôme annulateurs étant un idéal de $\mathbb{K}[X]$, alors celui-ci est de la forme $P\mathbb{K}[X]$, avec P unitaire. La minimalité du degré de μ_A et le fait qu'il soit unitaire, nous permet de dire que $P = \mu_A$.

Définition 3.1.3 (Polynôme minimal d'un endomorphisme/matrice) On suppose E de dimension finie.

Ce polynôme $\mu_u(X)$ (resp. μ_A) est appelé le polynôme minimal de u (resp. A).

Remarque 3.1.3 (IMPORTANTE) $\mu_u(u) = 0$ et $\mu_A(A) = 0$.

Corollaire 3.1.1 On a :

• $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \Rightarrow \mu_u | P$.

• $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(A) = 0 \Rightarrow \mu_A | P$.

Démonstration : On a vu dans la preuve de la proposition précédente, que l'ensemble des polynôme annulateurs de u est $\mu_u \mathbb{K}[X]$.

Ainsi : $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \Rightarrow \mu_u | P$, car P est dans $\mu_u \mathbb{K}[X]$ en tant que polynôme annulateur de u .

On a la même chose pour les polynômes annulateurs de A .

Exemple 3.1.1 1. Quel est le polynôme minimal d'un projecteur p différent de l'identité et non nul ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $(X - 1)^2$ est le polynôme minimal de A .

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$ et en déduire A^n .

(c) Déterminer A^{-1} .

(a) On a : $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0$. Ainsi $(X - 1)^2$ annule A , donc : $\mu_A | (X - 1)^2$. Si $\mu_A = X - 1$, alors $A - I_3 = 0$, ce qui est faux donc :

$$\mu_A = (X - 1)^2.$$

(b) Par division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que :

$X^n = (X - 1)^2 Q + R$. Le degré de R nous indique qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$. On a donc : $X^n = (X - 1)^2 Q + aX + b$ (*). En remplaçant X par 1, on a : $1 = a + b$, puis après dérivation de (*) et en remplaçant X par 1, on a : $n = a$. Ainsi $R = nX + 1 - n$.

Dans (*), en remplaçant X par A , comme $(X - 1)^2$ annule A , on a : $A^n = aA + bI_3 = nA + (1 - n)I_3$.

(c) Pour $n = 2$, on a : $A^2 = 2A - I_3$, donc : $I_3 = A(2I_3 - A)$ et donc $A^{-1} = 2I_3 - A$.

Corollaire 3.1.2 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit) On suppose E de dimension finie. Soit F un sous-espace stable par u et on note $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F . Alors : $\mu_{\tilde{u}}$

Démonstration : Comme μ_u est un polynôme annulateur de u , on a : $\forall x \in E, \mu_u(u)(x) = 0$. Donc : $\forall x \in F, \mu_u(u)(x) = 0$, ce qui signifie que $\mu_u(\tilde{u}) = 0$. Donc μ_u est un polynôme annulateur de $\tilde{u}$ et donc grâce au corollaire précédent : $\mu_{\tilde{u}} | \mu_u$.

3.1.3 L'algèbre $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$

Définition 3.1.4 ($\mathbb{K}[u], \mathbb{K}[A]$) On note :

- $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $\mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$

Proposition 3.1.4 (L'algèbre $\mathbb{K}[u], \mathbb{K}[A]$) $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.

Démonstration : $\mathbb{K}[u]$ est l'image de l'application linéaire $P \mapsto P(u)$ allant de l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ dans l'espace vectoriel $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$, donc $\mathbb{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Ainsi $(\mathbb{K}[u], +)$ est aussi un sous-groupe de $(\mathcal{L}(E), +)$. Par ailleurs $Id_E = u^0$ est dans $\mathbb{K}[u]$ et enfin pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a : $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[u]$. Ainsi $\mathbb{K}[u]$ est un sous-anneau de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. On en déduit que $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$.

C'est la même chose pour $\mathbb{K}[A]$.

Proposition 3.1.5 (Base de $\mathbb{K}[u], \mathbb{K}[A]$ en dimension finie) Si d est le degré du polynôme minimal de u (resp. A), alors $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ (resp. $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$) est une base de $\mathbb{K}[u]$ (resp. $\mathbb{K}[A]$).

Ainsi $\dim \mathbb{K}[u] = d^\circ(\mu_u)$ (resp. $\dim \mathbb{K}[A] = d^\circ(\mu_A)$).

Démonstration : La preuve a de forte similitude avec les nombres algébriques vus dans le chapitre 2.

• La famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre : soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que : $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$. Ainsi $P = \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$

est un polynôme annulateur de u . Or $d^\circ P < d = d^\circ \mu_u$. Ainsi par minimalité de μ_u , on a : $P = 0$, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{d-1} = 0$.

• La famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ engendre $\mathbb{K}[u]$: soit P un polynôme. Sa division euclidienne par $\mu_u(X)$ donne

$$P = \mu_u(X)Q + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k. \text{ En évaluant en } u : P(u) = \mu_u(u) \circ Q(u) + R(u) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k.$$

Ainsi $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ et $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\mu_u)$.

Raisonnement analogue pour la matrice A .

Exemple 3.1.2 Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que A^{-1} est dans $\mathbb{K}[A]$.

3.1.4 Lemme des noyaux

Proposition 3.1.6 (Lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors :

$$\text{Ker } A(u) \oplus \text{Ker } B(u) = \text{Ker } (AB)(u).$$

Démonstration :

Remarque 3.1.4 1. *ATTENTION ne pas écrire $\text{Ker } (A) \oplus \text{Ker } (B) = \text{Ker } (AB)$, car A et B ne sont pas des applications linéaires.*

2. *On se place dans le cas où $AB(u) = 0$. Ainsi $\text{Ker } A(u) \oplus \text{Ker } B(u) = E$. Grâce à la preuve précédente, la projection sur $\text{Ker } A(u)$ parallèlement à $\text{Ker } B(u)$ est un polynôme de u à savoir $B(u) \circ Q(u) = (BQ)(u)$.*

Corollaire 3.1.3 (Généralisation du lemme de décomposition des noyaux) Soient $A_1, \dots, A_p$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors :

$$\text{Ker } (A_1 \cdots A_p)(u) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker } A_i(u).$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur p .

On vient de voir $p = 2$ dans la proposition suivante.

Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq 2$ et on suppose le résultat pour p . Soient $p+1$ polynômes $A_1, \dots, A_{p+1}$ premiers entre eux deux à deux. Les polynômes $C = \prod_{k=1}^p A_k$ et A_{p+1} sont premiers entre eux. Grâce à la proposition précédente : $\text{Ker } (A_1 \cdots A_p A_{p+1})(u) = \text{Ker } (CA_{p+1})(u) = \text{Ker } C(u) \oplus \text{Ker } A_{p+1}(u)$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $\text{Ker } C(u) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker } A_i(u)$, donc :

$$\text{Ker } (A_1 \cdots A_p A_{p+1})(u) = \bigoplus_{i=1}^{p+1} \text{Ker } A_i(u), \text{ d'où le résultat pour } p+1.$$

Exemple 3.1.3 1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que 0 soit racine simple de P et $P(f) = 0$. Montrer que $\text{Ker } (f) \oplus \text{Im } (f) = E$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose $\Delta_\lambda : \begin{cases} \mathbb{C}^\mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{C}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1} - \lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$, $T : \begin{cases} \mathbb{C}^\mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{C}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$
et $\psi : \begin{cases} \mathbb{C}^\mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{C}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (\lambda^n u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$.
On rappelle que $\text{Ker}(\Delta_1^k) = \{(P(n))_{n \in \mathbb{N}}, P \in \mathbb{C}_{k-1}[X]\}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que $\psi^{-1} \circ T \circ \psi = \lambda T$.
(b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Ker}(\Delta_\lambda^k) = \{(\lambda^n P(n))_{n \in \mathbb{N}}, P \in \mathbb{C}_{k-1}[X]\}$.
(c) Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{C}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \neq 0$.
On pose $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}\}$. Déterminer E .

3.1.5 Complément : polynôme minimal local

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout x de E , on pose $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u)(x) = 0\}$.

1. Montrer que pour tout x de E , I_x est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. On note μ_x le polynôme unitaire tel que $\mu_x \mathbb{K}[X] = I_x$.
2. Montrer que $\mu_x | \mu_u$.
3. On suppose que $\mu_u = P^r$, avec P irréductible sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu_u$.
4. Montrer que si μ_x et μ_y sont premiers entre eux, alors $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.

5. On suppose que la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ de μ_u est $\mu_u = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$.

Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on pose $E_i = \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$. Soit u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i . Montrer que le polynôme minimal de u_i est $P_i^{\alpha_i}$.

6. En déduire l'existence d'un élément x de E tel que $\pi_u = \mu_x$.

1. On a $\mu_u \in I_x$, donc $I_x \neq \{0\}$.

$(I_x, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$, car :

- 0 est dans I_x .

- Soient $P, Q \in I_x$. On a $(P - Q)(u)(x) = P(u)(x) - Q(u)(x) = 0$, donc : $P - Q \in I_x$.

Soit $P \in I_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. On a : $(PQ)(u)(x) = [Q(u) \circ P(u)](x) = Q(u)[P(u)(x)] = Q(u)(0) = 0$.

Ainsi on a : $PQ \in I_x$.

2.

3.

4.

5. Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Montrons que le polynôme minimal de u_j est $P_j^{\alpha_j}$. On constate que :

$\forall x \in E_j$, $P_j^{\alpha_j}(u_j)(x) = P_j^{\alpha_j}(u)(x) = 0$. Ainsi $P_j^{\alpha_j}(u_j) = 0$, puis $\mu_{u_j} | P_j^{\alpha_j}$. On suppose que $\mu_{u_j} = P_j^{\delta_j}$, avec $\delta_j < \alpha_j$.

On a : $\text{Ker}(P_j^{\delta_j}(u)) \subset \text{Ker}(P_j^{\alpha_j - \delta_j}(u) \circ P_j^{\delta_j}(u)) = \text{Ker}(P_j^{\alpha_j}(u)) = E_j$.

Cependant : $\forall x \in E_j$, $P_j^{\delta_j}(u)(x) = \mu_{u_j}(u_j)(x) = 0$, donc $E_j \subset \text{Ker}(P_j^{\delta_j}(u))$ puis

$E_j = \text{Ker}(P_j^{\delta_j}(u))$.

Soit $Q = P_j^{\delta_j} \prod_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{j\}} P_i^{\alpha_i}$. Par le lemme des noyaux,

$\text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}(P_j^{\delta_j}(u)) \bigoplus_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{j\}} E_i = E_j \bigoplus_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{j\}} E_i = \bigoplus_{i=1}^r E_i = E$. Ainsi $Q(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité de μ_u . Ainsi $\delta_j = \alpha_j$ et cela pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$.

6. Décomposons μ_u en facteurs irréductibles $\mu_u = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$.

Pour i dans $\llbracket 1, k \rrbracket$, on pose $E_i = \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$. Grâce au lemme des noyaux, on a : $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$. Sur chaque E_i , l'endomorphisme u induit un endomorphisme est noté u_i .

Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ Grâce à la deuxième question il existe $x_j \in E_j$ tel que $\mu_{x_j} = \mu_{u_j} = P_j^{\alpha_j}$ (le polynôme minimal μ_{x_j} de u_j en x_j sur E_j est aussi le polynôme minimal de u en x_j sur E car : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x_j) = P(u_j)(x_j)$). Grâce à la troisième question, si $x = \sum_{i=1}^k x_i$, alors $\mu_x = \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i} = \mu_u$.

3.2 Matrices et endomorphismes nilpotents

E désignera un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

Définition 3.2.1 (Nilpotence) 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$.

Remarque 3.2.1 Une matrice nilpotente ou un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible, car

Exemple 3.2.1 1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifient $M^2 = N^2 = 0$ et sont donc nilpotentes.
2. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, l'endomorphisme $D : P \mapsto P'$ vérifie $D^{n+1} = 0$.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ nilpotente et qui commutent entre elles. Montrer que AB et $A + B$ sont nilpotentes.
On a le même résultat pour les endomorphismes.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^n = 0$. Montrer que $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM - MA \end{cases}$ est nilpotent.

5. Soit $E_n = \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que l'endomorphisme f de $E_n : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme et déterminer f^{-1} .

On peut généraliser ce raisonnement : pour f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f^p = 0$, alors $\text{Id}_E - f$ est bijectif et $(\text{Id}_E - f)^{-1} =$

Définition 3.2.2 (Indice de nilpotence) 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est d'indice de nilpotence p si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. On dit que f est d'indice de nilpotence p si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

Proposition 3.2.1 (Majoration de l'indice de nilpotence)1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'indice de nilpo-tence p . Alors $p \leq n$.En particulier $A^n = 0$.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence p . Alors $p \leq \dim(E)$.En particulier $f^{\dim(E)} = 0$.*Démonstration :*

- Il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$, car $f^{p-1} \neq 0$.
- $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre :

- Ainsi : $p \leq \dim(E)$ car $\mathcal{F}$ est une famille libre à p éléments.

Exemple 3.2.2 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $u_1, \dots, u_n$ des éléments nilpotents de E commutant deux à deux (c'est-à-dire que $u_i^n = 0$, pour $1 \leq i \leq n$). Calculer $u_n u_{n-1} \dots u_1$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ d'indice de nilpotence $n = \dim(E) \geq 2$.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer μ_f .(c) Montrer que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\dim \text{Ker}(f^k) = k$.(d) Déterminer les endomorphismes g tels que $g^2 = f$.

(e) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $hf = fh$. Montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = I + N$.

4 Révisions de sup sur le déterminants

4.1 Déterminant d'une matrice

Définition 4.1.1 (Déterminant d'une matrice) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Le déterminant de A , noté $\det(A)$, le scalaire défini par $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

On note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 4.1.1 1. *ATTENTION : pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et λ et μ dans $\mathbb{K}$:*
 $\det(\lambda A + \mu B) \neq \lambda \det(A) + \mu \det(B)$.

2. Dans le cas $n = 3$ et seulement pour $n = 3$, on a une règle qui s'applique uniquement dans ce cas là et que l'on utilise si vraiment on a pas mieux à faire que l'on appelle la (mauvaise) règle

de Sarrus :
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + y_1 z_2 x_3 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - y_1 x_2 z_3.$$

Proposition 4.1.1 (Opérations) Soit $A = [C_1, \dots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (Multilinéarité) Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'application ϕ_i , définie pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par $\phi_i(X) = \det([C_1, \dots, C_{i-1}, X, C_{i+1}, \dots, C_n])$ est une forme linéaire (il y a linéarité du déterminant sur une colonne, autrement dit $\det([C_1, \dots, C_{i-1}, \lambda Y + \mu Y', C_{i+1}, \dots, C_n]) = \lambda \det([C_1, \dots, C_{i-1}, Y, C_{i+1}, \dots, C_n]) + \mu \det([C_1, \dots, C_{i-1}, Y', C_{i+1}, \dots, C_n])$).
Donc si une colonne de A est nulle, alors : $\det(A) = 0$.
- Si il existe $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et $C_i = C_j$, alors $\det(A) = 0$ (un déterminant est nul si deux colonnes sont identiques).
- Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,
 $\det([C_1, \dots, C_n]) = \det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i+1}, \dots, C_n])$ (un déterminant reste inchangé si à une certaine colonne on lui rajoute une autre colonne multipliée par un scalaire.
Plus généralement, on ne change pas un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
- (Antisymétrie) Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, alors on a :
 $\det([C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n]) = -\det([C_1, \dots, C_n])$ (on change le signe d'un déterminant en permutant deux colonnes).
- (Forme n -alternée) Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\det([C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}]) = \varepsilon(\sigma) \det([C_1, \dots, C_n])$.
- Pour les cinq premiers points, nous avons les mêmes opérations sur les lignes
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.
- Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
En particulier on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \det(A^n) = (\det(A))^n$.

Exemple 4.1.1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{rg}(B) = 1$. Montrer que :
 $\det(A+B) \det(A-B) \leq \det(A^2)$.

Proposition 4.1.2 (Déterminants et matrices inversibles)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)$ est non nul. Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
2. On a $\text{rg}(A) < n \iff \det(A) = 0$.
3. Si A est dans $GL_n(\mathbb{K})$, alors : $\forall k \in \mathbb{Z}, \det(A^k) = (\det(A))^k$.

Exemple 4.1.2 1. Soit n un entier naturel impair. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A n'est pas inversible.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elles sont semblables dans $\mathbb{C}$, autrement dit, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. On pose $P = R + iS$, avec R, S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.3 (Déterminant d'une matrice triangulaire) On a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}.$$

En particulier : $\det(\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \prod_{i=1}^n \alpha_i$.

Remarque 4.1.2 Pour calculer un déterminant, il est intéressant de faire des opérations élémentaires pour se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire (à l'aide de la méthode du pivot de Gauss par exemple). En particulier cette méthode permet d'avoir un déterminant sous forme factorisée, ce qui est très pratique pour voir quand est-ce que celui-ci peut s'annuler. La méthode de Sarrus, n'est vraiment pas une bonne idée pour avoir un déterminant sous forme factorisé.

Exemple 4.1.3 Calculer le déterminant de $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $a_{i,j} = i \wedge j$. On rappelle que : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ avec φ l'indicatrice d'Euler.

Proposition 4.1.4 (Développement selon une ligne ou une colonne)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ (on a retiré la i -ème ligne et la j -ème colonne).

Alors :

1. Pour tout $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} (-1)^{i+j_0} \Delta_{i,j_0}$ (développement par rapport à la j_0 -ème colonne).
2. Pour tout $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} (-1)^{i_0+j} \Delta_{i_0,j}$ (développement par rapport à la i_0 -ème ligne).

Définition 4.1.2 (Cofacteurs) Le cofacteur d'indice i, j de A est $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Remarque 4.1.3 Cette méthode sert à calculer des petits déterminants (4×4 par exemple) ou des déterminants avec beaucoup de zéros.

Exemple 4.1.4 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{0} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Calculer $D_n(\theta) = \begin{vmatrix} 2\cos(\theta) & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 2\cos(\theta) \end{vmatrix}$, ce déterminant étant de taille $n \times n$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = (\det A)(\det C)$.

2. Plus généralement, si nous avons une matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_p \end{pmatrix}$ une matrice trian-

gulaire par blocs, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$.

Démonstration : Le deuxième point se déduit du premier par récurrence. Montrons le premier point.

On remarque que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Remarque 4.1.4 1. ATTENTION, en général, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$.

2. (IMPORTANTE) En transposant, on a : $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D$, en effet :

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \right)^T \right) = \det \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ 0 & D^T \end{pmatrix} = \det(A^T) \det(D^T) = \det(A) \det(D).$$

Exemple 4.1.5 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0$.

4.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 4.2.1 (Déterminant d'une famille de vecteurs) $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E , on note $a_{i,j}$ la i ème coordonnée de x_j dans $\mathcal{U}$ $\left(x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}u_i\right)$. On

$$\text{pose } \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n)) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proposition 4.2.1 (Déterminants et bases) Soit $\mathcal{U}$ une base de E qui est de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors

1. $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si on a $\det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
2. $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée si et seulement si on a $\det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Remarque 4.2.1 Pour $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :

1. $\det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \mu \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors, $\det_{\mathcal{U}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n)$.
Ceci est équivalent à pour tout $i, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_n) = -\det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_i, \dots, x_n)$, car toute permutation de $\mathcal{S}_n$ est une composition de transpositions.
3. On a $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) = \det(I_n) = 1$.

Exemple 4.2.1 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de scalaires. On note $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour que $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$ soit libre.

Proposition 4.2.2 (Expression des formes multilinéaires alternées) 1. Une application

$f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les deux premiers points de la remarque précédente est appelée n -forme linéaire alternée et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{U}}$.

2. En particulier, il existe une unique application $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois points de la remarque précédente, c'est $f = \det_{\mathcal{U}}$.

Exemple 4.2.2 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E .

1. Montrer qu'il existe τ_f dans $\mathbb{K}$ vérifiant : pour toute base $\mathcal{B}$ de E et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E :

$$\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) = \tau_f \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

2. Montrer que $\tau_f = \text{tr}(f)$ (ainsi τ_f ne dépend pas de la base choisie).

1. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\psi : \begin{cases} E^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, f(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$

Par multilinéarité du déterminant et linéarité de f , l'application ψ est multilinéaire.

Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ et $k, l \in [1, n]$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k, i \neq l}} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_i), \dots, x_l, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_k), \dots, x_l, \dots, x_n) + \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_k, \dots, f(x_l), \dots, x_n) = \\ &= -\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_l, \dots, f(x_i), \dots, x_k, \dots, x_n) - \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_l, \dots, f(x_k), \dots, x_n) - \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, f(x_l), \dots, x_k, \dots, x_n) \\ &= -\psi(x_1, \dots, x_l, \dots, x_k, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ainsi ψ est une forme multilinéaire alternée, donc il existe $\tau_f \in \mathbb{K}$ tel que : $\psi = \tau_f \det_{\mathcal{B}}$, grâce à la proposition précédente.

2. Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Soit $j \in [1, n]$. On a : $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ et :

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, f(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_n) =$$

$$a_{jj} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n) = a_{jj}, \text{ car dans } \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_n), \text{ on retrouve deux vecteurs identiques } e_i, \text{ si } i \neq j. \text{ Ainsi}$$

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \tau_f \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \tau_f \text{ et donc : } \tau_j = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{j-1}, f(e_j), e_{j+1}, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n a_{jj} = \text{tr}(f).$$

Proposition 4.2.3 (Changement de base) Soient $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux bases de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . Alors : $\det_{\mathcal{U}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{U}'}(\mathcal{U}) \cdot \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n)$.

4.3 Déterminant d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe E désigne un espace vectoriel de dimension n .

Définition 4.3.1 (Déterminant d'un endomorphisme) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{U}$ une base de E . Le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)) = \det_{\mathcal{U}}(f(\mathcal{U}))$ est appelé déterminant de f et on le note $\det(f)$. Il est indépendant de la base $\mathcal{U}$ choisie.

Proposition 4.3.1 (Opérations) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
- $\det(\lambda \text{Id}_E) = \lambda^n$.
- $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
- On a : $\det(u) \neq 0$ si et seulement si on a : $u \in GL(E)$. Si $u \in GL(E)$, alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

Remarque 4.3.1 Dans ce cas $\det(u) \neq 0$ est équivalent à u injective ou u surjective, car u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 4.3.1 1. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n . Montrer que si $f^2 = -\text{id}_E$, alors n est pair.

2. Soient $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$. Déterminer $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Proposition 4.3.2 (Effet d'une application linéaire sur le déterminant d'une famille) Soient $\mathcal{U}$ une base de E , $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\det_{\mathcal{U}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{U}}(x_1, \dots, x_n)$.

4.4 Comatrice

Définition 4.4.1 (Comatrice) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $\text{Com}A = [(-1)^{i+j}\Delta_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est appelée comatrice de A .

Proposition 4.4.1 (Relation avec la comatrice et inversibilité) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
 $A(\text{Com}A)^T = (\text{Com}A)^T A = \det(A)I_n$.

En particulier, si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{Com}A)^T$.

Exemple 4.4.1 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversible. Montrer que M^{-1} est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $|\det(M)| = 1$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer $\text{rg}(\text{Com}(A))$.

4.5 Déterminant de Vandermonde

Proposition 4.5.1 (Déterminant de Vandermonde) Soient $n \geq 2$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

On considère le déterminant d'ordre n suivant : $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ que l'on appelle déterminant de Vandermonde. On a :

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Démonstration : Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant a deux lignes identiques et le résultat est donc vrai.

On suppose maintenant que les x_i sont deux à deux distincts. On pose $P_n(X) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, X)$.

Exemple 4.5.1 Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $P_i = (X + a_i)^n$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.