

1 Rappels de sup sur les fonctions usuelles

1.1 Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

Définition 1.1.1 (Fonction Arc sinus) La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ainsi la fonction sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ et donc elle admet donc une fonction réciproque appelée **Arc sinus** définie de $[-1; 1]$ dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est notée Arcsin.

De plus Arcsin est continue sur $[-1, 1]$.

Remarque 1.1.1 Ainsi pour tout $x \in [-1; 1]$, Arcsin x est l'unique élément de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dont le sinus vaut x .

Définition 1.1.2 (Fonction Arc cosinus) La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$. Elle réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et donc elle admet une fonction réciproque appelée **Arc cosinus** définie de $[-1; 1]$ dans $[0; \pi]$. Cette fonction est notée Arccos. De plus Arccos est continue sur $[-1, 1]$.

Remarque 1.1.2 Ainsi, pour tout $x \in [-1; 1]$, Arccos x est l'unique élément de $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut x .

Définition 1.1.3 (Fonction Arc tangente) La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Elle réalise donc une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ et donc elle admet une fonction réciproque appelée **Arc tangente** définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Cette fonction est notée Arctan.

Remarque 1.1.3 Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, Arctan x est l'unique élément de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut x .

Proposition 1.1.1 (Limites de Arctan) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 1.1.2 (Imparité) Les fonctions Arcsin et Arctan sont impaires.

Remarque 1.1.4 Arccos n'est ni paire ni impaire.

Proposition 1.1.3 (Dérivée de ces fonctions) Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont dérivables sur $] -1; 1[$ et pour tout $y \in] -1; 1[$,

$$\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arccos}'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Exemple 1.1.1 1. Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$, on a : $\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$. Soit $f : x \mapsto$

$\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ qui est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. On a : $\forall x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Ainsi f est constante sur $] -1, 1[$ et par continuité elle l'est aussi sur $[-1, 1]$. Enfin : $f = f(0) = \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

2. Résoudre (E) : $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$.

3. (**Polynômes de Tchebychev**) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \text{Arccos}(x))$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

(b) En déduire que T_n est une fonction polynomiale, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

(d) Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation précédente.

(e) Montrer que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, T_n \circ T_m = T_{nm}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser T_n dans $\mathbb{R}[X]$.

(g) Montrer que $\sup_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| = 1$.

(h) Soit $n \geq 2$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} , tel que : $M = 1$, avec $M = \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$. Montrer que $P = T_n$.

(a)

(b) Soit $x \in [-1, 1]$. On constate que $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, puis :

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n) : T_n$ est une fonction polynomiale de degré n , à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de coefficient dominant 2^{n-1} (attention $\mathcal{P}(0)$ est fausse pour le coefficient dominant).

Montrons le résultat par récurrence double.

$\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe Q_{n+1} et Q_n dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que : $\forall x \in [-1, 1], T_n(x) = 2^{n-1}x^n + Q_n(x)$ et $T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)$.

On a : $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) = 2x(2^n x^{n+1} + Q_{n+1}(x)) - (2^{n-1}x^n + Q_n(x)) = 2^{n+1}x^{n+2} + \underbrace{2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)}_{\text{polynôme de degré au plus } n+1 \text{ dans } \mathbb{Z}[X]}$. Ainsi

T_{n+2} est bien une fonction polynôme par opérations, qui est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1} , d'où $\mathcal{P}(n+2)$, ce qui achève la récurrence.

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

1.2 Les fonctions ch, sh et th

Définition 1.2.1 (Cosinus, Sinus, Tangente hyperboliques) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Proposition 1.2.1 (Formule de trigonométrie hyperbolique) On a : $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

Proposition 1.2.2 (Parité de ch, sh et th) La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.

Proposition 1.2.3 (Dérivation de ch, sh et th) Les dérivées des fonctions hyperboliques sont données par

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \quad \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

Proposition 1.2.4 (Limites de ch, sh et th en $\pm\infty$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.

Corollaire 1.2.1 (Monotonie de ch, sh et th) La fonction sh est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction ch est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1; +\infty[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1; +\infty[$.

La fonction th est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$.

Exemple 1.2.1 Déterminer sh^{-1} .

1.3 Quelques inégalités

Proposition 1.3.1 (Inégalités) On a :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1+x$.

2 Rappels de sup sur les théorèmes de continuité

Définition 2.0.1 (Continuité) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction avec I un intervalle. On dit que f est continue en $x_0 \in I$, si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
autrement dit :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha > 0 ; \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.0.1 (Caractérisation séquentielle) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction avec I un intervalle. f est continue en $x_0 \in I$ si et seulement si pour toute suite (u_n) de limite x_0 et à valeurs dans I , la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$.

Théorème 2.0.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tout a, b appartenant à I , avec $a < b$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $y = f(c)$.

Corollaire 2.0.1 (Image d'un intervalle) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 2.0.1 Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de signe constant. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c) \int_a^b f(t)dt$.

Corollaire 2.0.2 (Annulation d'une fonction continue) On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tel que l'on ait : $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. Ainsi si f change de signe, alors elle s'annule au moins une fois.

Corollaire 2.0.3 (Signe d'une fonction continue) On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et qu'elle ne s'annule jamais sur I . Alors f est de signe constant sur I .

Exemple 2.0.2 Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Un tel x_0 s'appelle **point fixe** de f .

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$ qui est continue par opération. On a : $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, car $f(0)$ et $f(1)$ sont dans $[0, 1]$. Comme g change de signe, alors il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que : $g(x_0) = 0$, puis $f(x_0) = x_0$.

Théorème 2.0.2 (Théorème de la bijection) On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I)$ et elle est strictement monotone. Soit $J = f(I)$ qui est donc un intervalle. Alors :

1. f est une bijection de I sur J .
2. $f^{-1} : J \rightarrow I$ est une fonction continue sur J et de même monotonie.

Proposition 2.0.2 (Fonctions injectives et monotonie) Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

Exemple 2.0.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(f(x)) = ax + b$ (*). Montrer que $a > 0$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1$ vérifiant (*).

Théorème 2.0.3 (Théorème de la borne atteinte) *Toute fonction continue f sur $[a, b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.*

Exemple 2.0.4 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}}$.*

3 Rappels de sup sur les théorèmes de dérivation

3.0.1 Dérivation de la réciproque

Proposition 3.0.1 (Dérivation de la réciproque) *On suppose f continue et strictement monotone et on note $J = f(I)$ (qui est un intervalle). Ainsi f réalise une bijection de I dans J .*

1. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a)$ est non nul. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ (et $a = f^{-1}(b)$) et on a : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.
2. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} existe et est définie sur l'intervalle $J = f(I)$ et f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.

Exemple 3.0.1 (Fonction de Lambert)

1. Montrer que $f : x \mapsto xe^x$ admet une fonction réciproque sur $[-1 + \infty[$, que l'on notera W (fonction de Lambert). On précisera son ensemble de définition I . Montrer que W est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par W .
3. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{W(-e^{-1} + h) - W(-e^{-1})}{h}$.
4. Montrer que W admet un $DL_3(0)$ que l'on donnera.
5. Donner un développement asymptotique à deux termes de W en $+\infty$ et en $-e^{-1}$.

3.0.2 Théorème de Rolle

Théorème 3.0.1 (Théorème de Rolle) Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Exemple 3.0.2 1. (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ s'annulant en $k + 1$ points $a_0 < a_1 < \dots < a_k$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(c) = 0$.
(b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ s'annulant en k points $a_1 < \dots < a_k$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k) \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

2. (**Théorème de Rolle généralisé**) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f'(c) = 0$.

3.0.3 Inégalité et égalité des accroissements finis

Théorème 3.0.2 (Égalité des accroissements finis (EAF)) Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Exemple 3.0.3 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, avec $f : x \mapsto \left(\sin \left(\frac{x+1}{x} \right) - \sin \left(\frac{x}{x+1} \right) \right) x$.

2. Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\Delta f : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta)$.

Théorème 3.0.3 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) Soit $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe des réels m et M tels que sur $]a, b[$, on ait : $m \leq f' \leq M$. Alors on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Corollaire 3.0.1 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivable sur I . On suppose qu'il existe k dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. Alors f est k -lipschitzienne : $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Exemple 3.0.4 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

f' est donc continue sur le segment $[a, b]$, donc elle y est bornée, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k$. Ainsi f est dérivable sur $[a, b]$ et sur cet intervalle $|f'| \leq k$. Ainsi grâce aux IAF, f est k -lipschitzienne.

3.0.4 Théorème de la limite de la dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Définition 3.0.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si $f^{(n)}$ existe et est continue sur I .

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est indéfiniment dérivable sur I , c'est-à-dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, f est n fois dérivable.

Théorème 3.0.4 (Théorème de la limite de la dérivée) 1. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

2. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que : $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Exemple 3.0.5 1. ATTENTION, la réciproque est fausse : f dérivable en x_0 n'implique pas que f' a une limite finie en x_0 . Voici un contreexemple : $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(a) Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

3.0.5 Complément : application aux suites récurrentes avec une fonction contractante

Dans ce paragraphe, on considère $f : I \rightarrow I$ une fonction et on définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 3.0.2 (Fonction contractante) On dit que $f : I \rightarrow I$ est contractante, si elle est k -lipschitzienne $(\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$, avec k dans $[0; 1[$.

Proposition 3.0.2 (Convergence des suites récurrente dans le cas contractant) Soit $f : I \rightarrow I$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que l'on ait : $f(\alpha) = \alpha$. Alors f est contractante et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$

et donc la suite (u_n) converge vers α .

Démonstration : À refaire à chaque fois : grâce aux IAF, f est k -lipschitzienne. Montrons par récurrence le deuxième résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.

$\mathcal{P}(0) : |u_0 - \alpha| = k^0 |u_0 - \alpha|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme f est k -lipschitzienne, alors :

$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha| \leq k^{n+1}|u_0 - \alpha|$, grâce à $\mathcal{P}(n)$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 3.0.1 1. Il faut avoir absolument $k < 1$, avec l'inégalité stricte.

2. **ATTENTION!** si on a : $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$ cela n'implique pas : $\exists k \in [0, 1[, \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. Par exemple si $f'(x) = x/2$ sur $I = [0, 2[$, on a bien $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$, sans avoir : $\exists k \in [0, 1[, \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.

3. On peut aussi démontrer que f admet un unique point fixe.

- Pour l'unicité : si β est un autre point fixe, alors comme f est contractante on a : $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ et donc on a : $(1 - k)|\alpha - \beta| \leq 0$. Comme $(1 - k)$ est strictement positif, alors $|\alpha - \beta|$ est négatif et donc nul. Ainsi on a : $\alpha = \beta$.

- Pour l'existence : on reprend la suite (u_n) . On montre par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$. Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge. Ainsi la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. Ainsi la suite (u_n) converge vers une limite ℓ . Par continuité de f , quand on passe à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve $\ell = f(\ell)$.

Donc si vous trouvez un point fixe de f , c'est le seul.

4. Pour trouver un point fixe d'une fonction f contractante, nous nous fixons un u_0 de son ensemble de définition, puis nous étudions la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le seul point fixe de la fonction f .

Ainsi l'étude se déroule de la façon suivante :

- Vérifier que : $f(I) \subset I$, pour que la suite soit bien définie.
- Dériver f et majorer $|f'|$ par un réel dans $[0; 1[$ sur un intervalle qui contient tous les u_n à partir d'un certain rang.
- Trouver le point fixe de f .
- Conclure à l'aide de la proposition précédente que l'on aura redémontrée.

Exemple 3.0.6 1. Montrer que le polynôme $X^3 + 2X - 2$ admet une unique racine x_0 réelle qui de plus est dans $[0, 1]$. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 2}$. Montrer que (u_n) converge et en déduire une approximation rationnelle de x_0 à 10^{-2} près.

Soit $g : x \mapsto x^3 + 2x - 2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (somme de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 2x$ qui sont strictement croissantes et d'une constante).

De plus $\lim_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$. Grâce au théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 . De plus $g(0) = -2 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$, donc $x_0 \in [0, 1]$.

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{x^2 + 2}$. On a : $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

On constate que $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{\alpha^2 + 2} \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha = 2 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = x_0$, donc x_0 est point fixe de f . On a : $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 2)^2}$. Si on majore brutalement, on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{2^2} = 1$, ce qui n'est pas intéressant, donc il faut étudier plus finement sa dérivée en regardant ses variations. On a :

$\forall x \in [0, 1]$, $f''(x) = -\frac{4(x^2 + 2)^2 - 4x \times 4x(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^4} = -\frac{4(x^2 + 2) - 16x^2}{(x^2 + 2)^3} = 4\frac{3x^2 - 2}{(x^2 + 2)^3}$. Ainsi f'' est négative sur $[0, \sqrt{2/3}]$ et positive sur $[\sqrt{2/3}, 1]$, donc f' est décroissante sur $[0, \sqrt{2/3}]$ et croissante sur $[\sqrt{2/3}, 1]$. Comme f' est négative, alors $|f'|$ est maximal en $\sqrt{2/3}$. Or :

$|f'(\sqrt{2/3})| = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{3} + 2\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \frac{8^2}{3^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{16} = k$. On a $k < 1$, donc f est dérivable sur $[0, 1]$ et $|f'| \leq k$ sur cet intervalle, alors, f est k -lipschitzienne grâce aux IAF.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathcal{P}(n) : |u_n - x_0| \leq k^n |u_0 - x_0|$.

$\mathcal{P}(0) : |u_0 - x_0| = k^0 |u_0 - x_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme f est k -lipschitzienne, alors :

$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| \leq k |u_n - x_0| \leq k^{n+1} |u_0 - x_0|$, grâce à $\mathcal{P}(n)$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence. Comme $u_0 = 0$ et x_0 est dans $[0, 1]$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_0| \leq k^n$, et comme k est dans $[0, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$.

Nous allons approcher x_0 à l'aide du calcul de certains termes u_n , mais de combien de termes a-t-on besoin pour avoir une approximation à 10^{-2} près ?

Pour avoir $|u_n - x_0| \leq 10^{-2}$, il suffit d'avoir $k^n \leq 10^{-2}$, soit $n \ln(k) \leq \ln(10^{-2})$, soit $n \geq \frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3\sqrt{6}}{16}\right)}$, car $\ln(k) < 0$ et donc il suffit de prendre

$n_0 = \left\lceil \frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\frac{3\sqrt{6}}{16}\right)} \right\rceil + 1 = 6$. On calcule $u_6 = \frac{35703798642}{46588338883}$ qui approche x_0 à 10^{-2} près.

2. Soient $\lambda \in]0, 1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda$. On définit (u_n) par $u_0 \in [0, 1]$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, si u_0 est non nul et assez près de 0, alors (u_n) converge vers 0 et qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim C\lambda^n$.

4 Fonctions convexes

4.1 Fonctions convexes d'une variable réelle

Définition 4.1.1 (Fonctions convexes et concaves) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

2. Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave, autrement dit :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Proposition 4.1.1 (Inégalité de Jensen) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $x_1, \dots, x_n \in I$. Alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 4.1.1 Si f est concave, alors dans les mêmes conditions que le corollaire précédent, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Exemple 4.1.1 1. La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $\ln$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\sin$ définie sur $[0, \pi/2]$ sont concaves.

2. p et q sont deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1.

(a) Soient x et y deux réels positifs. Montrer que : $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.

(b) Soient $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ des réels. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n b_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On pourra d'abord envisager le cas où $\sum_{n=1}^N |a_n|^p = \sum_{n=1}^N |b_n|^q = 1$.

(c) Soient $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ des réels. Montrer que pour tout $p \geq 1$, on a l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On pourra remarquer que $|a_n + b_n|^p \leq |a_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1} + |b_n| \cdot |a_n + b_n|^{p-1}$.

(a)

(b)

(C) Ici on pose $\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{1/p}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |a_n| \cdot \underbrace{|a_n + b_n|^{p-1}}_{=b'_n} &\leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &\leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder avec les a_n et b'_n .
On procède de même avec l'autre membre de l'indication d'où, en additionnant

$$\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \leq [\|a\|_p + \|b\|_q] \left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{1/q}.$$

On divise alors les deux membres par $\left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{1/q}$ (que l'on suppose non nul, le cas de nullité étant trivial) pour obtenir l'inégalité de

$$\text{Minkowski : } \left(\sum_{n=1}^N |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^N |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ car } 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}.$$

3. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue.

$$\text{Montrer que : } \varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(g(t)) dt.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe. Montrer d'abord que :

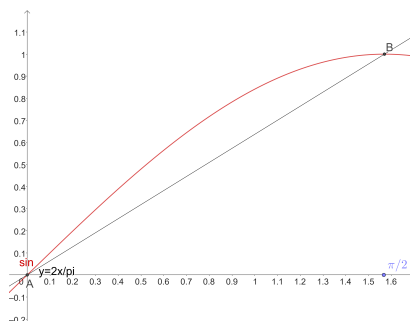
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket, \forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{p}{2^n}x + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{p}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{p}{2^n}\right)f(y).$$

Proposition 4.1.2 (Arc sous la corde) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient M_1 et M_2 sur $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f . Tous les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés sous la corde $[M_1M_2]$.

Si f est concave, alors les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés au dessus la corde $[M_1M_2]$.

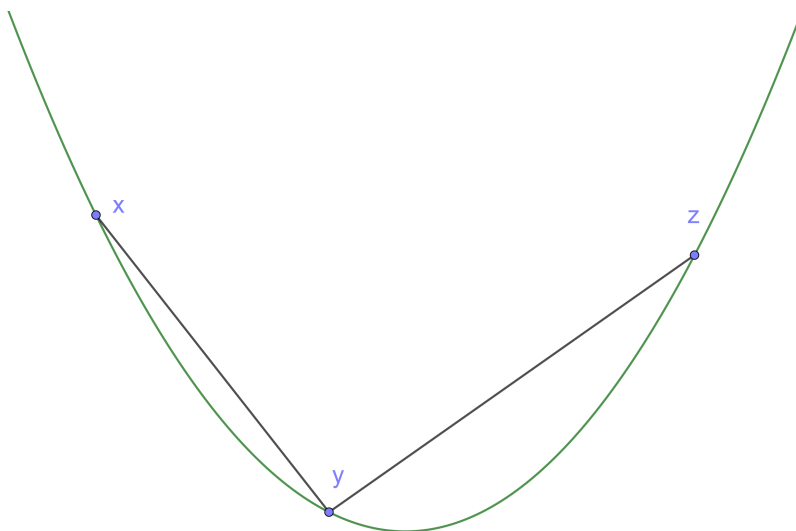
Exemple 4.1.2 Montrer que : $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

La fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi/2]$ ($\sin'' = -\sin$ qui est négative sur $[0, \pi/2]$). Les points $A(0, 0)$ et $B(\pi/2, 1)$ sont sur le graphe de $\sin$. Ainsi la corde $[AB]$ est sous le graphe de $\sin$ sur $[0, \pi/2]$. L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = ax$ (droite passant par A). Pour passer par B , on doit avoir $1 = a \times \frac{\pi}{2}$ et donc $a = \frac{2}{\pi}$, donc : $\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.



Proposition 4.1.3 (Caractérisation de la convexité par le taux d'accroissement) Une fonction f est convexe sur I si et seulement si les taux d'accroissements sont croissants :

$$\forall (x, y, z) \in I^3, \quad x < y < z \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$



Remarque 4.1.2 1. (IMPORTANT) Soient f une fonction convexe définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

2. Soient f une fonction concave définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est décroissante sur $I \setminus \{a\}$.

Exemple 4.1.3 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$. Montrer que f est positive.

4.2 Fonctions convexes et dérivabilité

Proposition 4.2.1 (Caractérisation de la convexité par la croissance de la dérivée) Soit

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I . Alors : f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Remarque 4.2.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors : f est concave si et seulement si f' est décroissante.

Proposition 4.2.2 (Caractérisation de la convexité par la position courbe/tangente) Soit

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I . Alors : f est convexe sur I si et seulement si son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \overset{\circ}{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Remarque 4.2.2 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I . Alors : f est concave sur I si et seulement si son graphe est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \overset{\circ}{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \leq f(a) + (x - a)f'(a).$$

Proposition 4.2.3 (Caractérisation de la convexité par la positivité de la dérivée seconde) Soit

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

1. La fonction f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .
2. La fonction f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I .

Exemple 4.2.1 1. (a) Montrer que $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que si les a_i et b_i ($1 \leq i \leq n$) sont positifs alors :

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) \right)^{1/n}.$$

2. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$, avec $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive non nulle. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que f s'annule au moins une fois.