

1 Continuité

Proposition 1.0.1 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que

- (i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Démonstration :

Remarque 1.0.1 1. L'hypothèse de domination assure l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$.

2. Bien vérifier que la fonction de domination φ soit indépendante de x .

3. L'hypothèse de domination est essentielle : la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-tx} dt$ n'est pas continue en 0, étant donné que $F(0) = 0$ alors que pour tout $x > 0$: $F(x) = [-e^{-tx}]_{t=0}^{+\infty} = 1$. En fait on ne peut pas dominer $t \mapsto x e^{-tx}$ par une fonction intégrable indépendante de x .

Exemple 1.0.1 1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} dt$.

Parfois l'hypothèse de domination est impossible à obtenir sur I tout entier. Voici une adaptation de la proposition précédente :

Proposition 1.0.2 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ avec domination locale) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que

- (i) [Continuité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (ii) [Régularité par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur I .

Démonstration : Soit $x_0 \in I$. Il existe un segment $[a, b]$ non réduit à un point tel que : $x_0 \in [a, b] \subset I$, avec x_0 dans son intérieur si x_0 n'est pas borne de I . Grâce à la proposition 1.0.1, $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est continue sur $[a, b]$ et donc en particulier en x_0 . Ceci étant valable pour tout x_0 de I , on a donc la continuité sur I tout entier.

Exemple 1.0.2 Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

- 1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2. Étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.0.3 (Continuité de $x \mapsto \int_J f(x, t)$ définie sur un EVN) Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times J$, où A est une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- (i) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- (ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iii) Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in A \times J \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur J , et la fonction F définie sur A par $F(x) = \int_J f(x, t) dt$ est continue sur A .

L'hypothèse de domination peut être remplacée par une hypothèse de domination au voisinage de tout point :

(iii bis) pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a dans A (par exemple une boule fermée $\overline{B}(a, r)$) et une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in V \times J \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Démonstration : Identique aux deux propositions précédentes.

Exemple 1.0.3 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue et bornée.

Montrer que $F : z \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt$ est continue sur $H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Théorème 1.0.1 (Théorème de convergence dominée à paramètre continu) Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in I}$ une famille de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle J . Soit $\lambda_0 \in \bar{I}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. pour tout $\lambda \in I$, la fonction f_λ est continue par morceaux sur J ;
2. pour tout $u \in J$, on a : $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(u) = f(u)$, et la fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur J ;
3. (Domination) il existe une fonction φ continue par morceaux positive et intégrable sur J telle que pour tout $\lambda \in I$ et pour tout $u \in J$: $|f_\lambda(u)| \leq \varphi(u)$ (hypothèse de domination).

Alors, les fonctions f_λ et leur limite f sont intégrables sur J et :

$$\int_J \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(u) du = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f_\lambda(u) du = \int_J f(u) du.$$

Démonstration : Pour $\lambda \in I$, la majoration $|f_\lambda| \leq \varphi$ prouve l'intégrabilité de f_λ sur J .

Utilisons la caractérisation séquentielle d'existence d'une limite et le théorème de convergence dominée. Soit $\lambda_0 \in \bar{I}$ un point adhérent à I (dans $\mathbb{R}$) et $(t_n)_n$ une suite de points de I convergeant vers λ_0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la fonction g_n définie sur J par : $g_n(u) = f_{t_n}(u)$. Alors :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur J ;
2. la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction f ;
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in J$, $|g_n(u)| \leq \varphi(u)$.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction f est intégrable sur J et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J g_n = \int_J f$,

c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_{t_n} = \int_J f$.

D'après la caractéristion séquentielle de l'existence d'une limite : $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f_\lambda = \int_J f = \int_J \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda$.

Remarque 1.0.2 1. (IMPORTANT) Ce résultat sera souvent appliqué lorsque l'on cherchera

$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_J f(\lambda, t) dt$. Il suffira de poser $f_\lambda : t \mapsto f(\lambda, t)$.

2. Ce résultat sert surtout lorsque $\lambda_0 = \pm\infty$, car sinon on pourra appliquer le plus souvent les propositions précédentes.

Si λ_0 est réel, ce théorème permettra par exemple de prolonger par continuité $\lambda \mapsto \int_J f(\lambda, t) dt$ en λ_0 .

3. Si $\lambda_0 = +\infty$ la domination sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, suffit car nous cherchons une limite en $+\infty$.

Exemple 1.0.4 1. Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

Déterminer un équivalent de F au voisinage de $+\infty$ et 0.

2. **(Cesàro version intégrale)** Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que : $\lim_{+\infty} g = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A g(t) dt = \ell$.

Nous proposons deux méthodes.

- Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $u = t/A$, ce qui donne : $\frac{1}{A} \int_0^A g(t) dt = \int_0^1 g(uA) du$.

On pose $f_A : u \mapsto g(uA)$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$.

— Pour $A \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction f_A est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Soit $u \in [0, 1]$. On a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} f_A(u) = f(u) = \begin{cases} \ell & \text{si } u \in]0, 1] \\ g(0) & \text{si } u = 0 \end{cases}$ et f est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

— La fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+$, car elle admet une limite finie en $+\infty$, donc : $\forall (A, u) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 1]$, $|f_A(u)| \leq \|g\|_\infty$ et $u \mapsto \|g\|_\infty$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$.

Grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu, on a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A g(t) dt = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 \ell du = \ell$.

- On a $g(t) - \ell \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Or la fonction $t \mapsto 1$ est continue par morceaux, positive et non intégrable sur $[0, +\infty[$, donc on a :

$$\int_0^A (g(t) - \ell) dt \underset{A \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_0^A dt\right), \text{ soit : } \frac{1}{A} \int_0^A g(t) dt - \ell \underset{A \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{A}{A}\right) \underset{A \rightarrow +\infty}{=} o(1), \text{ donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{A} \int_0^A g(t) dt - \ell\right) = 0.$$

2 Dérivabilité

Proposition 2.0.1 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que

(i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I .

(ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .

(iii) [Régularité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .

(iv) [Domination] Il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration : Soit $x_0 \in I$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite nulle avec tous les h_n non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{f(x_0 + h_n, t) - f(x_0, t)}{h_n} dt$. On note alors f_n la fonction $t \mapsto \frac{f(x_0 + h_n, t) - f(x_0, t)}{h_n}$ définie sur J .

- D'après (i), les fonctions f_n sont continues par morceaux sur J et intégrables.
- D'après (ii), la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $t \in J$ on a : $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ donc $f_n(t) = \frac{1}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx$.

L'hypothèse de domination donne alors :

$$|f_n(t)| \leq \left| \frac{1}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} \varphi(t) dx \right| = \left| \frac{\varphi(t)}{h_n} \int_{x_0}^{x_0+h_n} dx \right| = \varphi(t), \text{ car } \varphi(t) \text{ est indépendant de } x.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_J f_n(t) dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$,

autrement dit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$. Le critère séquentiel montre que g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$.

Exemple 2.0.1 1. Notons $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt$ pour x réel. Montrer que : $f'' - f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$, puis en déduire f sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer le domaine de définition de $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan \theta)}{\tan \theta} d\theta$.

(b) Déterminer F sur son ensemble de définition.

(c) En déduire les valeurs $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta$ et de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) d\theta$.

(a) Posons $f : (x, \theta) \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan \theta)}{\tan \theta}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0; \pi/2[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue par morceaux sur $]0; \pi/2[$ et se prolonge par continuité aux bornes, car :

$$f(x, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} x \quad \text{et} \quad f(x, \theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} 0.$$

Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$.

- (b)
- Soit $\theta \in]0, \pi/2[$, $x \mapsto f(x, \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\theta \mapsto f(x, \theta)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, \pi/2[$, grâce à la première question.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) = \frac{1}{1 + x^2 \tan^2 \theta}$ est continue par morceaux sur $]0; \pi/2[$.
 - On a : $\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times]0; \pi/2[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, \theta) \right| \leq 1 = \varphi(\theta)$ avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, \pi/2[$.

F est de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + x^2 \tan^2 \theta}$.

Grâce au changement de variable C^1 bijectif $t = \tan \theta$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + x^2 t^2)(1 + t^2)}$.

Pour $x^2 \neq 0$ et $x^2 \neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction $\frac{1}{(1 + x^2 X)(1 + X)} = \frac{\frac{x^2}{x^2 - 1}}{1 + x^2 X} + \frac{\frac{1}{1 - x^2}}{1 + X}$ et on en déduit en prenant t^2 au lieu

de X : $\frac{1}{(1 + x^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{\frac{x^2}{x^2 - 1}}{1 + x^2 t^2} + \frac{\frac{1}{1 - x^2}}{1 + t^2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a :

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot [\operatorname{Arctan}(tx)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \frac{1}{1 - x^2} \cdot [\operatorname{Arctan}(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{x + 1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{x}{x^2 - 1} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x + 1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

La fonction F' étant continue et paire, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{|x| + 1} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Or on a : $F(0) = 0$, donc : $F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1 + x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1 - x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(c) Pour $x = 1$, on obtient $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

Par intégration par parties : $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta = \underbrace{[-\theta \ln(\sin \theta)]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta$ et donc : $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

Proposition 2.0.2 (Dérivation de $x \mapsto \int_J f(x, t) dt$) Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.) On suppose que

- (i) [Dérivabilité par rapport au paramètre] Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- (ii) [Régularité de f par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- (iii) [Régularité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iv) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une fonction φ continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I, \quad g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Démonstration : La preuve est semblable à celle de la proposition 1.0.2, car la dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales.

- Exemple 2.0.2**
1. Montrer que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.
 3. En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2.0.1 Ainsi dériver $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ permet d'avoir parfois une expression simple de F' ou d'avoir une équation différentielle vérifiée par F , ce qui nous permet d'avoir F .

Corollaire 2.0.1 ($x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ de classe $\mathcal{C}^k$) Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que

- (i) [Caractère $\mathcal{C}^k$ en le paramètre] Pour tout t dans J , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .
- (ii) [Régularité des dérivées $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
- (iii) [Régularité des dérivées $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- (iv) [Domination] Il existe une fonction φ_k continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

- (iv bis) [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , il existe une fonction φ_k continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi_k(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur k dans le cas (iv) bis avec la domination locale. Pour $k = 1$, c'est la proposition 2.0.2.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la proposition pour k et on se donne f vérifiant les propriétés de l'énoncé pour $k + 1$.

Montrons d'abord que g est de classe $\mathcal{C}^k$. Il ne reste que l'hypothèse de domination locale à vérifier. Soient $[a, b]$ un segment inclus dans I et φ_{k+1} à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que que :

$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| \leq \varphi_{k+1}(t)$. Pour tout (x, t) de $[a, b] \times J$, on a :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) + \int_a^x \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) dx. \text{ Ainsi : } \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^x \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| dx \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^b \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| dx \leq \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + \int_a^b \varphi_{k+1}(t) dx = \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + (b - a)\varphi_{k+1}(t). \text{ On}$$

pose $\varphi_k : t \mapsto \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a, t) \right| + (b - a)\varphi_{k+1}(t)$ et par hypothèses cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur J . Ainsi grâce à l'hypothèse de récurrence au rang k , on a : g de classe $\mathcal{C}^k$ et $g^{(k)} = h = x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$. Montrons que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

- Pour x fixé dans I , la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Pour t fixé dans J , la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Pour x fixé dans I , la fonction $t \mapsto \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- Il existe une fonction φ_{k+1} intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) \right| \leq \varphi_{k+1}(t)$.

La proposition 2.0.2, nous permet de dire que $h : x \mapsto \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I, g^{(k+1)}(x) = h'(x) = \int_J \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x, t) dt.$$

Nous avons démontré la proposition au rang $k + 1$, ce qui achève la récurrence.

Pour montrer la proposition avec l'hypothèse (iv), comme celle-ci implique l'hypothèse de domination locale, on a le résultat.

Corollaire 2.0.2 ($x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ de classe $\mathcal{C}^\infty$) Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telles que

- [Caractère $\mathcal{C}^\infty$ en le paramètre] Pour tout t dans J , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
- [Régularité des dérivées $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ par rapport à la variable d'intégration] Pour tout j dans $\mathbb{N}$ et pour tout x dans I , $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur J .
- [Domination] Pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

OU

- bis [Domination locale] Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , pour tout j de $\mathbb{N}$, existe une fonction φ_j continue par morceaux sur J , à valeurs réelles positives, intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times J, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq \varphi_j(t).$$

Dans ce cas g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et : $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in I, g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$.

Remarque 2.0.2 1. La domination locale s'utilise souvent lorsque I est un intervalle ouvert ou non borné.

- Dans le corollaire précédent, on peut avoir la domination qu'à partir d'un certain rang k , mais il faut montrer alors que les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ sont intégrables sur J pour $j < k$.

Exemple 2.0.3 1. Pour x dans $\mathbb{R}_+$, on pose $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner ses dérivées successives. Est-ce que S est DSE au voisinage de 0 ?

Soit $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

- Soit $t \in \mathbb{R}_+$. $x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $j \in \mathbb{N}$. On a : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) = \frac{e^{-t}(-1)^j j! t^j}{(1+xt)^{j+1}}$ (par récurrence). Ainsi $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $j \in \mathbb{N}$. On a : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \left| \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \right| \leq j! t^j e^{-t} = \varphi_j(t)$. La fonction φ_j est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par croissance comparée $\varphi_j(t) = \frac{1}{t^2} \circ_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$).

S est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, S^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt = (-1)^j j! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^j}{(1+xt)^{j+1}} dt.$$

$$\text{On a : } \forall j \in \mathbb{N}, S^{(j)}(0) = (-1)^j j! \int_0^{+\infty} t^j e^{-t} dt = (-1)^j j! j! \text{ (voir à la fin avec } \Gamma \text{)}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : $\left| \frac{S^{(j)}(0)x^j}{j!} \right| = j! x^j$. On a : $\frac{(j+1)! x^{j+1}}{j! |x|^j} = (j+1)x \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty > 1$. Grâce à la règle de d'Alembert, la série $\sum_{j \geq 0} \frac{S^{(j)}(0)x^j}{j!}$ diverge grossièrement, donc le rayon de convergence de cette série entière est nul et S n'est pas DSE au voisinage de 0.

2. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3 Compléments

3.1 Intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2} du ; \quad H(x) = \left(\int_0^x \exp(-u^2) du \right)^2.$$

1. Montrer que G et H sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées G' et H' . En déduire que la fonction $G + H$ est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\pi/4$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du$.

1. Sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$, on définit $f : (x, u) \mapsto \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2}$.

De plus, on a : $\forall (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = (-2x) e^{-x^2(1+u^2)}$.

- Soit $u \in [0, 1]$. La fonction $x \mapsto f(x, u)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto f(x, u)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$, car on est sur un segment.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.
- Soit $[a, b]$, un segment quelconque inclus dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall (x, u) \in [a, b] \times [0, 1], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| = |-2x| e^{-x^2(1+u^2)} \leq 2|x| \leq 2 \max(|a|, |b|).$$

Or la fonction $t \mapsto 2 \max(|a|, |b|)$ est continue (c'est une constante) et intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = \int_0^1 (-2x) e^{-x^2(1+u^2)} du$.

$h : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2} du$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto e^{-u^2}$. h est donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^{-x^2}$. Comme $H = h^2$, H est

C^1 sur $\mathbb{R}$ et $H' = 2hh'$ donc : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$.

Le changement de variable $u = tx$ (qui est C^1 bijectif de $[0, 1]$ dans $[0, x]$) donne : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} x dt = -G'(x)$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) + G'(x) = 0$. En intégrant on en déduit que $H + G$ est constante. Or $H(0) = 0$ et $G(0) = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\text{Arctan}(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc on a : $H + G = \frac{\pi}{4}$.

2. G est une fonction positive comme intégrale d'une fonction positive, les bornes étant dans le bon sens.

On remarque que : $\forall (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \frac{\exp(-x^2(1+u^2))}{1+u^2} = e^{-x^2} \frac{e^{-x^2 u^2}}{1+u^2}$.

De plus comme : $\forall (x, u) \in \mathbb{R} \times [0, 1], e^{-x^2 u^2} \leq 1$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq G(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Donc par encadrement : $\lim_{+\infty} G = 0$.

Et donc comme $G + H = \pi/4$ on a : $H = \pi/4$, ce qui montre au passage l'existence de I , car $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ est positif et donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\lim_{+\infty} H} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.2 Fonction Gamma

On pose : $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. On rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $\Gamma^{(j)}(x)$ sous forme d'intégrale, pour $j \in \mathbb{N}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
4. En déduire :
 - (a) $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
 - (b) un équivalent de Γ en 0^+ .
5. Étudier les variations de Γ .
6. Déterminer $\lim_{+\infty} \Gamma$.
7. Montrer que $\ln(\Gamma)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
8. Déterminer $\Gamma(1/2)$.

3.3 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $g \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) e^{ixt} dt = 0$.

Ce résultat est encore valable pour g continue par morceaux sur $[a, b]$.

Applications : (**Séries de Fourier**) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π -périodique.

On pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $S_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)}{2 \sin(u/2)} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right) du.$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$.

Montrons que $\phi : u \mapsto \frac{f(x+u) - f(x) + f(x-u) - f(x)}{2 \sin(u/2)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$. On a :

$$\phi(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{f(x) + u f'(x) - f(x) + f(x) - u f'(x) - f(x) + o(u)}{u + o(u)} \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{o(1)}{1 + o(1)} \underset{u \rightarrow 0}{\rightarrow} 0.$$

Ainsi ϕ se prolonge en une fonction continue sur $[0, \pi]$.

Grâce à ce qui précède, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) e^{i(N+\frac{1}{2})u} du = 0$ et comme $\bar{\phi}$ est aussi continue, on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{\phi(u)} e^{i(N+\frac{1}{2})u} du = 0$, puis

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \phi(u) e^{-i(N+\frac{1}{2})u} du = 0$ en passant au conjugué. Ainsi comme $\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) u \right) = \left(e^{i(N+\frac{1}{2})u} - e^{-i(N+\frac{1}{2})u} \right) / 2i$, alors on obtient :

$\lim_{N \rightarrow +\infty} [S_N(f)(x) - f(x)] = 0$, ce qui donne la convergence simple vers f .

3.4 Produit de convolution

Soient f une fonction continue, à valeurs réelles et intégrable sur $\mathbb{R}$ et g une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs réelles telle que pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction $g^{(k)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$.

1. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que : $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = (g * f)(x)$.
3. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées successives.
4. Montrer que si $\lim_{+\infty} g = 0$, alors $\lim_{+\infty} f * g = 0$.
5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont bornées. Montrer que l'application $T : g \mapsto f * g$ est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
6. Montrer que si f et g sont nulles en dehors d'un segment $[-A, A]$, alors $f * g$ est nulle en dehors d'un segment $[-B, B]$.
7. (**Approximation de l'unité**)

Soit une suite de fonctions $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \delta_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1 \\ \forall \varepsilon > 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \delta_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \delta_n = 0 \end{cases}$$

On appelle une telle suite de fonctions approximation de l'unité.

- (a) Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée. Montrer que $(\delta_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
- (b) Nous allons donner une autre preuve du théorème de Weierstrass.
 - i. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

ii. Pour tout entier naturel n , on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $h_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n}$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule $\lambda_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$.

Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

iii. Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$

est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

iv. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition et produit.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)| \times \|g\|_\infty$. Or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $t \mapsto f(t)g(x-t)$ l'est aussi, par comparaison. Ainsi $f * g(x)$ existe.

De plus, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_\infty$. La constante $\|f\|_1 \|g\|_\infty$ majore $|f * g|$ sur $\mathbb{R}$, donc :
 $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

2.

3.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $k_x : t \mapsto f(t)g(x-t)$.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction k_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} k_x(t) = 0$ et la fonction nulle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |k_x(t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$ et la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Grâce au théorème de convergence dominé à paramètre continu, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = 0.$$

5.

6. Comme f est nulle en dehors de $[-A, A]$, alors $f * g(x) = \int_{-A}^A f(t)g(x-t) dt$. Soit t dans $[-A, A]$, alors : $-A \leq -t \leq A$.

Ainsi

- si on a : $x > 2A$, alors $x-t > 2A-A = A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.
- si on a : $x < -2A$, alors $x-t < -2A+A = -A$, donc : $g(x-t) = 0$ et donc $f * g(x) = 0$.

7. (a)

- (b) i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est uniformément continue sur le segment $[-A, A]$, donc il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x, y \in [-A, A], |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x - y| \leq \eta$. On peut supposer $x \leq y$. Si on a : $x \leq y \leq -A$, alors $|f(x) - f(y)| = 0$. Si on a $x \leq -A \leq y \leq A$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-A)| + |f(-A) - f(y)| = |f(A) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $-A \leq x \leq y \leq A$, alors : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $-A \leq x \leq A \leq y$, alors $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| = |f(x) - f(A)| \leq \varepsilon$. Enfin si $A \leq x \leq y$, alors $|f(x) - f(y)| = 0$. Ainsi dans tous les cas, on a : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Le caractère borné vient du fait que f soit continue sur le compact $[-A, A]$.
- ii. • Il est clair que $h_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{-1}^1 h_n = 1$.
• Soit $\varepsilon > 0$, alors :
- si $\varepsilon \geq 1$, $\int_{|t| > \varepsilon} h_n = 0$.
- si $\varepsilon \in]0, 1[$, par parité de h_n , on obtient $\int_{|t| \geq \varepsilon} h_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_{\varepsilon}^1 (1 - t^2)^n dt \leq \frac{2}{\lambda_n} (1 - \varepsilon^2)^n$, or
 $\lambda_n = 2 \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{2}{n+1}$, ce qui entraîne que :
 $\int_{|t| \geq \varepsilon} h_n \leq (n+1)(1 - \varepsilon^2)^n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- iii. • Pour le fait d'être nulle en dehors de $[-3/2, 3/2]$, cela provient de la question 6.
• $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_n(x - t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (1 - (x - t)^2)^n dt$, or
 $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $x \mapsto (1 - (x - t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t) x^k$, avec a_k des fonctions continues (polynomiales en t) donc :
 $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) a_k(t) dt \right) x^k$.
- iv. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $[c, d]$ contenant strictement $[a, b]$.
On peut prolonger f en une fonction continue, nulle en dehors de $[c, d]$ et soit
 $\varphi : t \mapsto (d - c)t + \frac{c + d}{2}$, alors $g = f \circ \varphi$ est continue, nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et d'après 7.(a) est limite uniforme d'une suite $g * h_n$ qui est, polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc comme φ est affine non constante, alors φ^{-1} est aussi affine, donc la fonction polynôme $(g * h_n) \circ \varphi^{-1}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

3.5 Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $s \in \mathbb{C}$, lorsque cela a un sens on pose :

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-xs} f(x) dx.$$

- On suppose que $L(f)(s_0)$ converge pour une certain $s_0 \in \mathbb{C}$. On pose $\alpha_0 = \Re(s_0)$.
Montrer que pour s dans $\mathbb{C}$ si on a : $\Re(s) > \alpha_0$, alors $L(f)(s)$ converge.

On pose $\sigma(f) = \inf \left\{ \Re(s) \mid \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \text{ converge} \right\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $\sigma(f) = +\infty$ si l'intégrale ne converge jamais et $\sigma(f) = -\infty$ si l'intégrale converge tout le temps.

- Montrer que :
(a) si $\Re(s) > \sigma(f)$, $L(f)(s)$ est défini ;
(b) si $\Re(s) < \sigma(f)$, $L(f)(s)$ n'est pas défini.
- On note $H = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \sigma(f)\}$. Montrer que $L(f)$ est continue sur H .
- (a) On suppose que $\int_0^{+\infty} f$ converge, donc $\sigma(f) \leq 0$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f$ (avec $x \in \mathbb{R}$), ce qui assure la continuité de $L(f)$ sur $[0 + \infty[$.

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

- (Un théorème taubérien) On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} L(f)(\alpha) = \mu \in \mathbb{C}$.

L'exemple 1.0.4 permet de dire que : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A} \int_0^A x |f(x)| dx = 0$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f$ converge et que $\mu = \int_0^{+\infty} f$.

2.

3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $H_r = \{s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > \sigma + r\}$. On utilise l'expression $\mathcal{L}(f)(s) = (s - \sigma - r) \int_0^{+\infty} e^{-x(s-\sigma-r)} F(x) dx$ pour montrer la continuité comme dans l'exemple 1.0.3.

4. (a)

(b) Dans l'exemple 2.0.2, on a vu que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$.

Or $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, donc on a la continuité en 0 dans l'expression précédente, d'où quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

5. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \geq M$, $|tf(t)| \leq \varepsilon$ et : $\forall \alpha \in]0, \eta]$, $\left| \mu - \int_0^{+\infty} f(x)e^{-\alpha x} dx \right| \leq \varepsilon$.

On rappelle que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 - u \leq e^{-u}$, soit : $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-u} \leq u$.
Soient $A \geq M$ et $\alpha \in]0, \eta]$.

$$\begin{aligned} \left| \mu - \int_0^A f(x) dx \right| &\leq \left| \mu - \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\alpha x} dx \right| + \left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\alpha x} dx - \int_0^A f(x) dx \right| \leq \varepsilon + \int_0^A (1 - e^{-\alpha x}) |f(x)| dx + \int_A^{+\infty} |f(x)| e^{-\alpha x} dx \\ &\leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x |f(x)| dx + \int_A^{+\infty} |f(x)| e^{-\alpha x} dx \leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x |f(x)| dx + \varepsilon \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} dx \\ &\leq \varepsilon + \alpha \int_0^A x |f(x)| dx + \varepsilon \int_A^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{A} dx = \varepsilon + \alpha \int_0^A x |f(x)| dx + \varepsilon \frac{e^{-\alpha A}}{A\alpha}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $A \geq M' = \max(M, 1/\eta)$ et on prend $\alpha = \frac{1}{A}$ qui est dans $]0, \eta]$ et on a :

$$\left| \mu - \int_0^A f(x) dx \right| \leq \varepsilon(1 + e^{-1}) + \frac{1}{A} \int_0^A x |f(x)| dx.$$

Grâce au rappel, il existe $M'' \geq M'$ tel que : $\forall A \geq M''$, $\frac{1}{A} \int_0^A x |f(x)| dx \leq \varepsilon$, puis : $\forall A \geq M''$, $\left| \mu - \int_0^A f(x) dx \right| \leq \varepsilon(2 + e^{-1})$, ainsi $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f = \mu$.