

1 Rappels de sup sur les espaces préhilbertiens

1.1 Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1.1.1 Définition

Définition 1.1.1 (Symétrie, bilinéarité, positivité, séparation) Soit φ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

1. On dit que φ est **symétrique** lorsque : $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
2. On dit que φ est **bilinéaire** lorsque pour tout u, v dans E , les applications $\varphi(\cdot, v) : u \mapsto \varphi(u, v)$ et $\varphi(u, \cdot) : v \mapsto \varphi(u, v)$ sont linéaires. Ce ceci est équivalent à pour tout $x, y, z \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x, z) + \mu\varphi(y, z)$ et $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x, y) + \mu\varphi(x, z)$.
3. On dit que φ est **positive** si : $\forall u \in E, \varphi(u, u) \geq 0$.
4. On dit que φ est **définie positive** si φ est positive et de plus : $\forall u \in E, \varphi(u, u) = 0 \implies u = 0$ (φ « sépare » les vecteurs).

Définition 1.1.2 (Produit scalaire) On dit que φ est un produit scalaire lorsqu'elle vérifie les quatre points de la définition précédente. Le produit scalaire se note aussi : $(u, v) \mapsto (u|v)$ ou $(u, v) \mapsto \langle u|v \rangle$ ou $(u, v) \mapsto u \cdot v$.

Remarque 1.1.1 Si φ est un produit scalaire alors :

1. On a : $\forall u \in E, \varphi(0, u) = \varphi(u, 0) = 0$. Ainsi $\varphi(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
2. Si on montre que φ est symétrique, pour la bilinéarité il suffit de montrer que $\varphi(\cdot, v)$ ou $\varphi(u, \cdot)$ est linéaire.

Définition 1.1.3 (Espace euclidien, espace préhilbertien) Si φ est un produit scalaire, on dit que E muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien. De plus, si E est de dimension finie, alors E est un espace euclidien.

Rappelons les produits scalaires usuels sur certains espaces :

1. $E = \mathbb{R}^n$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

2. En identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\text{et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : X^T Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Après identification, on retrouve le même produit scalaire que sur $\mathbb{R}^n$ et donc on définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, défini par $(X, Y) \mapsto X^T Y$.

On remarque donc que pour toute matrice colonne X , on a : $X^T X = 0 \Leftrightarrow X = 0$, car : $(X|X) = 0$ et on utilise la propriété de séparation du produit scalaire.

3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$. C'est un produit scalaire car :
 - Symétrie : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(B^T A) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(A^T B)$.

- Bilinéarité : * linéaire à gauche : $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \text{tr}((\lambda A + \mu C)^T B) = \lambda \text{tr}(A^T B) + \mu \text{tr}(C^T B)$.
- * On a la linéarité à droite par symétrie.
- Positivité : $\forall A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$ (voir chapitre 4).
- Séparation : $\text{tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0$, car dans la somme précédente, tous les termes sont nuls.

On a aussi $\text{tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$, car le coefficient d'indice (j, j) de $A^T B$ est $\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

4. On note $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour f et g dans $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \int_I fg$. Ainsi $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, muni de $(|)$ est un espace préhilbertien (voir le chapitre 1).

1.1.2 Normes

Définition 1.1.4 (Norme euclidienne) Pour x dans E , on note $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ que l'on appelle norme euclidienne de x .

On dit que x est unitaire ou normé quand : $\|x\| = 1$.

Exemple 1.1.1 On rappelle le résultat vu au chapitre 12 : que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$ (on effectue des intégrations par partie).

1. Montrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^{+\infty} R(t) e^{-t} dt$ a un sens.

2. On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \|P\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne.

1. Si on pose $R = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+, R(t) e^{-t} = \sum_{k=0}^d a_k t^k e^{-t}$ et donc $t \mapsto R(t) e^{-t}$ est combinaison linéaire des fonctions $t \mapsto t^k e^{-t}$ qui sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

2. On pose : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], (P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$. Cela est bien défini, grâce à la première question.

On a la symétrie, bilinéarité et positivité. Pour la séparation, si pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$, comme $t \mapsto P^2(t) e^{-t}$ est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, elle y est nulle et donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+, P(t) = 0$. Comme $\mathbb{R}_+$ est infini, alors $P = 0$. On a donc bien un produit scalaire.

Proposition 1.1.1 (Séparation et homogénéité de la norme) Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$; 2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Proposition 1.1.2 (Développement d'une norme) Soient $x, y, x_1, \dots, x_n \in E^2$. On a :

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$. 3. $(x|y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ (identité de polarisation)
2. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$. 4. $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \middle| \sum_{i=1}^n x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (x_i | x_j)$.

Exemple 1.1.2 Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p vecteurs d'un espace préhilbertien E , avec $p \geq 2$. On suppose que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow (x_i | x_j) < 0$. Montrer que $p - 1$ vecteurs parmi eux forment toujours une famille libre.

Que déduire de p si $\dim(E) = n$?

1.1.3 Vecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.1.5 (Vecteurs orthogonaux) Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si : $(x|y) = 0$.

Exemple 1.1.3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si f conserve l'orthogonalité : $(x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y))$, alors : $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

Théorème 1.1.1 (Théorème de Pythagore) Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

Définition 1.1.6 (Famille de vecteurs orthogonales et orthonormales) Une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est :

1. orthogonale si : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies (x_i|x_j) = 0$.
2. orthonormale si : $\forall (i, j) \in I^2, (x_i|x_j) = \delta_{ij}$ ($\|x_i\| = 1$ et $(x_i|x_j) = 0$ si $i \neq j$).

Exemple 1.1.4 1. La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

2. La base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^T B)$.

3. Sur $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ on définit le produit scalaire $(f|g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} fg$.

Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose les fonctions $f_n : x \mapsto \sin(nx)$ et $g_m : x \mapsto \cos(mx)$. La famille $(f_n, g_m)_{(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est orthogonale. Déterminer la norme des vecteurs de cette famille.

4. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

5. Soit E un espace vectoriel préhilbertien, et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . On suppose que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$.
Montrer que $\mathcal{E}$ est une famille orthonormée de E si : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_i\| \geq 1$.

Proposition 1.1.3 Une famille finie orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre.

Remarque 1.1.2 IMPORTANTE :

1. Dans un espace euclidien de dimension n , une famille orthogonale constituée de n vecteurs non nuls est une base de E , car c'est une famille libre ayant $n = \dim(E)$ éléments.
2. Toute famille orthonormale est libre, car elle est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls.

Proposition 1.1.4 (Théorème de Pythagore généralisé) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille orthogonale. Alors on a : $\left\| \sum_{i=1}^p x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2$.

1.1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . Alors on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y)^2 \leq \|x\|^2 \times \|y\|^2 \text{ soit : } \forall (x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus on a : $|(x|y)| = \|x\| \times \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exemple 1.1.5 1. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| = |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

$$2. \text{ Pour } f \text{ et } g \text{ dans } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \text{ on a : } \left| \int_a^b fg \right| = |(f|g)| \leq \|f\| \times \|g\| = \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

3. Soit E un espace préhilbertien. Montrer que $U = \{(x, y) \in E^2, (x, y) \text{ est libre}\}$ est un ouvert de E^2 .

Corollaire 1.1.1 (Norme euclidienne) Une norme découlant d'un produit scalaire vérifie les propriétés des normes : positivité, séparation, homogénéité et inégalité triangulaire.

Remarque 1.1.3 Toute norme ne découle par forcément d'une norme euclidienne. Par exemple, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, avec $n \geq 2$.

Si cette norme découle d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, alors on aurait :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (x|y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|_\infty^2 - \|x\|_\infty^2 - \|y\|_\infty^2).$$

On pose $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$. On a : $e_1 + e_2 = (1, 1, \dots, 0)$ et $2e_1 + e_2 = (2, 1, \dots, 0)$. On a : $\|e_1\|_\infty = \|e_2\|_\infty = \|e_1 + e_2\|_\infty = 1$ et $\|2e_1 + e_2\|_\infty = 2$.

On a : $(e_1 + e_2|e_1) = \frac{1}{2}(\|2e_1 + e_2\|_\infty^2 - \|e_1 + e_2\|_\infty^2 - \|e_1\|_\infty^2) = 1$, puis $(e_1|e_1) = \|e_1\|_\infty^2 = 1$ et $(e_1|e_2) = -\frac{1}{2}$ et donc $(e_1 + e_2|e_1) \neq (e_1|e_1) + (e_2|e_1)$, d'où une contradiction avec la bilinéarité d'un produit scalaire.

Cette norme ne découle pas d'un produit scalaire.

Exemple 1.1.6 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T A)$ et $\text{Im}(AA^T) = \text{Im}(A)$.

Corollaire 1.1.2 (Inégalités triangulaires) Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski ou triangulaire)

On a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

2. $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$.

1.2 Bases orthonormales dans un espace euclidien

$(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace euclidien de dimension n avec n dans $\mathbb{N}^*$.

1.2.1 Existence de bases et expression du produit scalaire

Théorème 1.2.1 (Existence d'une base orthonormée) Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Théorème 1.2.2 (Théorème de la base orthonormée incomplète) Toute famille orthonormée de E peut se compléter en une base orthonormée de E .

Proposition 1.2.1 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormée)

$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E . Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i u_i$, où $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont dans $\mathbb{R}$. On a :

$$1. (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$$2. \text{ On a } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

$$3. \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = (x|u_k) \text{ et donc } x = \sum_{i=1}^n (x|u_i) u_i.$$

$$4. \text{ Pour } X = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : (x|y) = X^T Y. \|x\| = \sqrt{X^T X}.$$

Remarque 1.2.1 (IMPORTANTE) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de E . Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f) = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} =$

En particulier $\text{tr}(f) =$

Exemple 1.2.1 1. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\text{tr}(u) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que : $(u(x)|x) = 0$.

2. (**Matrice de Gram**) Soit $x_1, \dots, x_p$ sont p vecteurs de E et on pose la matrice $G(x_1, \dots, x_p) = [(x_i|x_j)]_{1 \leq i, j \leq p}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
- (a) Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^T A$.
- (b) Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_p)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

1.3 Orthogonalité

$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 1.3.1 (Orthogonalité)

1. Soit $x \in E$. L'ensemble $\{y \in E, (x|y) = 0\}$ est appelé l'orthogonal de x et il est noté $x^\perp$.
2. Soit $X \subset E$ une partie de E non vide. L'ensemble $\{y \in E / \forall x \in X, (x|y) = 0\} = \bigcap_{x \in X} x^\perp$ est appelé orthogonal de X et il est noté $X^\perp$.

Exemple 1.3.1 1. $\{0\}^\perp = E$. 2. $E^\perp = \{0\}$.

Remarque 1.3.1 1. Si on a : $\forall (x, y) \in F \times G, (x|y) = 0$, on n'a pas forcément $G = F^\perp$. On a seulement : $G \subset F^\perp$.

$$y \in G \Rightarrow \forall x \in F, (x|y) = 0 \Rightarrow y \in F^\perp.$$

2. (IMPORTANT) Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de E . On a : $X^\perp = \{x_1, \dots, x_n\}^\perp = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp = \text{Vect}(X)^\perp$, cela signifie que : $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x|x_i) = 0$.
3. $x^\perp = (\mathbb{R}x)^\perp = \text{Vect}(x)^\perp$.

Proposition 1.3.1 (L'orthogonal est un sous-espace vectoriel) Soit $X \subset E$ une partie non vide de E . Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1.3.2 (Orthogonalité et somme directe) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors on a : $F \cap F^\perp = \{0\}$. Ainsi la somme $F + F^\perp$ est directe.

Exemple 1.3.2 1. Soit $F_1, \dots, F_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Montrer que : $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

2. Soit $F_1, \dots, F_p$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Montrer que : $\bigcap_{i=1}^p F_i^\perp = \left(\sum_{i=1}^p F_i \right)^\perp$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^p F_i^\perp$. Soit $z = \sum_{i=1}^p f_i$, avec : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_i$. On a donc $(x|z) = \sum_{i=1}^p (x|f_i) = 0$, donc on a : $x \in \left(\sum_{i=1}^p F_i \right)^\perp$, puis : $\bigcap_{i=1}^p F_i^\perp \subset \left(\sum_{i=1}^p F_i \right)^\perp$.

Soit $x \in \left(\sum_{i=1}^p F_i \right)^\perp$. Soient $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $f_k \in F_k$. On a : $f_k \in \sum_{i=1}^p F_i$, donc : $(x|f_k) = 0$, puis : $x \in F_k^\perp$ et enfin : $x \in \bigcap_{i=1}^p F_i^\perp$, d'où : $\left(\sum_{i=1}^p F_i \right)^\perp \subset \bigcap_{i=1}^p F_i^\perp$.

Définition 1.3.2 (Supplémentaire orthogonal) Si on a $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans E .

Remarque 1.3.2 ATTENTION, en dimension infinie, F et $F^\perp$ ne sont pas toujours supplémentaires.

Exemple 1.3.3 Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ et pour $f, g \in E$, on pose :

$$(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt. \text{ On considère les sous-espaces } V = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) / f'' = f\}$$

et $W = \{f \in E / f(0) = f(1) = 0\}$. On admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

Montrer que : $V^\perp = W$.

Proposition 1.3.3 (Orthogonal en dimension finie) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors $F \oplus F^\perp = E$.

Corollaire 1.3.1 (Expression de la décomposition suivant $F \oplus F^\perp = E$) 1. Soit $x \in E$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormale de F . La décomposition suivant $F \oplus F^\perp$ est donnée par :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i}_{\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^p (x|f_i) f_i}_{\in F^\perp}.$$

2. Si E est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a :

- $F \oplus F^\perp = E$.
- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$

En effet F est de dimension finie en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exemple 1.3.4 1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$, déterminer $(A_n(\mathbb{R}))^\perp$.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On a : $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), (A|S) = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA) = -\text{tr}(S^T A) = -(S|A) = -(A|S)$. Ainsi : $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), (A|S) = 0$ et donc on a : $S_n(\mathbb{R}) \subset (A_n(\mathbb{R}))^\perp$. Par ailleurs, on a : $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(A_n(\mathbb{R})) = \dim((A_n(\mathbb{R}))^\perp)$. On en déduit que : $(A_n(\mathbb{R}))^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

2. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que : $(F^\perp)^\perp = F$

3. Attention $(F^\perp)^\perp = F$ n'est pas toujours vraie. Soit l'espace ℓ^2 des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que

$$\sum_{n \geq 0} x_n^2 \text{ converge, muni du produit scalaire } (x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n, \text{ pour } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Ce produit scalaire a un sens car : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$.

Soit F l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini. Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

4. Soit E un espace vectoriel préhilbertien, et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E telle

$$\text{que : } \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2.$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}$ engendre E .

(b) Si on suppose que $\mathcal{E}$ est libre, montrer que $\mathcal{E}$ est une base orthonormée de E .

5. Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ vérifiant $(I) : \forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow (x_i | x_j) < 0$.

6. Soit E un espace préhilbertien et $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de E . Soit $\psi : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto ((x|u_1), \dots, (x|u_n)) \end{cases}$.
Montrer que ψ est surjective si et seulement si $\mathcal{U}$ est libre.

Soit $F = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$. Comme F est de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$, puis $\text{Im}(\psi) = \psi(F)$. Soit $\varphi = \psi|_F$.

On a $\text{Ker}(\varphi) = \{u_1, \dots, u_n\}^\perp = \text{vect}(u_1, \dots, u_n)^\perp = F^\perp = \{0\}$, en considérant l'orthogonal dans F .

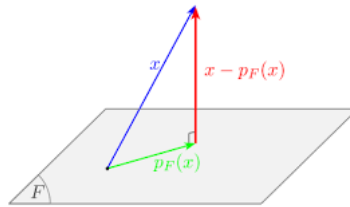
Ainsi φ est injective. Par conséquent ψ est surjective si et seulement si φ est bijective, si et seulement si $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(F)$ si et seulement si $\dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = n$ si et seulement si $\mathcal{U}$ est libre.

1.4 Projections orthogonales

1.4.1 Projecteurs orthogonaux

$(E, (\cdot, \cdot))$ désigne un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On a donc : $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 1.4.1 (Projection orthogonale) On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note p_F et pour $x = y + z$ avec y dans F et z dans $F^\perp$, on a $p_F(x) = y$.



Remarque 1.4.1 1. On a : $\forall x \in E, x - p_F(x) \in F^\perp$.

2. On a : $\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$.

En effet grâce au théorème de Pythagore, on a : $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp}$, puis :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

Définition 1.4.2 (Projecteur orthogonal) Un endomorphisme p de E est dit projecteur orthogonal lorsqu'il coïncide avec une projection orthogonale. Autrement dit, on a :

- $p^2 = p$.
- $\text{Ker}(p) = (\text{Im}(p))^\perp$.

Exemple 1.4.1 Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que si on a : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$, alors p est un projecteur orthogonal.

Proposition 1.4.1 (Formule de la projection orthogonale) Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormée de F . Alors on a :

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{j=1}^p (x|f_j) f_j \text{ et } \|p_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^p (x|f_j)^2.$$

Remarque 1.4.2 (IMPORTANT) Pour obtenir la projection orthogonale d'un vecteur x sur F , on a deux méthodes :

- on dispose d'une base orthonormée $(f_1, \dots, f_p)$ de F (éventuellement obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et dans ce cas, on peut utiliser directement la formule :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^p (x|f_j) f_j.$$

- on dispose d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F qui n'est pas forcément orthonormée. On cherche la projection orthogonale de x sur F sous la forme $p_F(x) = y = \sum_{j=1}^p \lambda_j e_j$ (qui est dans F). On doit donc avoir $x - y$ dans $F^\perp = (\text{Vect}(e_1, \dots, e_p))^\perp$ ce qui revient à avoir : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x - y|e_i) = 0$,

$$\text{soit le système : } \begin{cases} (x|e_1) - \sum_{j=1}^p \lambda_j (e_j|e_1) = 0 \\ \vdots \\ (x|e_p) - \sum_{j=1}^p \lambda_j (e_j|e_p) = 0 \end{cases}, \text{ où l'on doit déterminer les } \lambda_j.$$

Exemple 1.4.2 1. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme un. On pose $A = CC^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.

2. On reprend l'exemple 1.1.1 $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{N}, (X^p|X^q) = (p+q)!$.

$$\begin{aligned} (1, X, X^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]. \text{ Soit } P = aX^2 + bX + c \text{ la projection orthogonale de } X^3 \text{ sur } \mathbb{R}_2[X]. \text{ Ceci est équivalent à avoir } X^3 - P \in (\mathbb{R}_2[X])^\perp = \\ (\text{Vect}(1, X, X^2))^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (X^3 - P|1) = 0 \\ (X^3 - P|X) = 0 \\ (X^3 - P|X^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (X^3|1) = a(X^2|1) + b(X|1) + c(1|1) \\ (X^3|X) = a(X^2|X) + b(X|X) + c(1|X) \\ (X^3|X^2) = a(X^2|X^2) + b(X|X^2) + c(1|X^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2a + b + c \\ 24 = 6a + 2b + c \\ 120 = 24a + 6b + 2c \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2a + b + c \\ 24 = 6a + 2b + c \\ 60 = 12a + 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2a + b + c \\ 18 = 4a + b \\ 54 = 10a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2a + b + c \\ 18 = 4a + b \\ 27 = 5a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = -18 \\ a = 9 \end{cases} \\ P = 9X^2 - 18X + 6. \end{aligned}$$

1.4.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

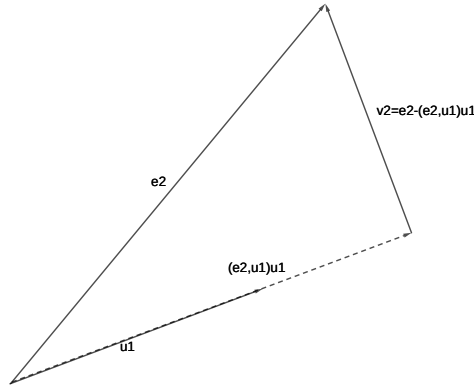
$(E, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

Théorème 1.4.1 (Procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Alors il existe une famille orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ telle que :

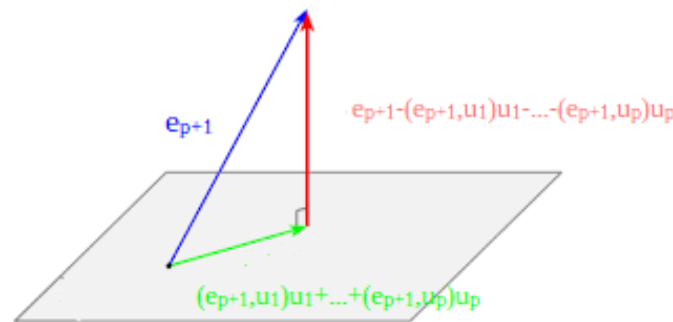
$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Rappel de la méthode : On procède par récurrence, en construisant d'abord, u_1 , puis $u_2, \dots$, jusqu'à u_n .

- On pose $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
- À partir de e_2 , on doit construire u_2 qui doit être orthogonal à u_1 et de norme 1. Ainsi on enlève d'abord la projection orthogonale de e_2 sur u_1 . On pose donc $v_2 = e_2 - (e_2|u_1)u_1$. Ainsi on a bien $(v_2|u_1) = 0$. Ensuite il faut normaliser v_2 et on pose $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$.



- Supposons que l'on ait construit $(u_1, \dots, u_p)$. À partir de e_{p+1} , nous devons construire u_{p+1} qui doit être orthogonal à $u_1, \dots, u_p$ et de norme 1. On commence donc par retrancher à e_{p+1} , sa projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Ainsi on pose : $v_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^p (e_{p+1}|u_i)u_i$. Ainsi on a bien : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, (v_{p+1}|u_j) = 0$. Il reste maintenant à normaliser v_{p+1} et on pose $u_{p+1} = \frac{v_{p+1}}{\|v_{p+1}\|}$. Et on continue ainsi de suite jusqu'à u_n .



Exemple 1.4.3 1. On reprend l'exemple 1.1.1 avec $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X], \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. Appliquer la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire. On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{N}, (X^p|X^q) = (p+q)!$.

2. Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur le plan vectoriel (P) d'équation : $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$.

Déterminons d'abord une base de (P) :

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 2y \\ z = -y \end{cases}.$$

Ainsi (P) est $\{(x, y, -y, x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(\underbrace{(1, 0, 0, 1)}_e, \underbrace{(0, 1, -1, 2)}_f)$. Ainsi (e, f) engendrent (P) . Comme ces deux vecteurs sont indépendants, alors

(e, f) est une base de (P) .

Orthonormalisons cette base :

$$\|e\| = \sqrt{2}, \text{ on pose donc } u_1 = \frac{e}{\|e\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soit $v_2 = f - (f|u_1)u_1 = (0, 1, -1, 2) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0, 1, -1, 2) - (1, 0, 0, 1) = (-1, 1, -1, 1)$. On a $\|v_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2$.

On pose donc $u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ainsi (u_1, u_2) est une base orthonormée de (P) .

Par conséquent : $\forall w \in \mathbb{R}^4, p(w) = (w|u_1)u_1 + (w|u_2)u_2$. On a :

$$p(e_1) = p(1, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = (1/2, 0, 0, 1/2) - (-1/4, 1/4, -1/4, 1/4) = (3/4, -1/4, 1/4, 1/4).$$

$$p(e_2) = p(0, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}u_2 = (-1/4, 1/4, -1/4, 1/4).$$

$$p(e_3) = p(0, 0, 1, 0) = -\frac{1}{2}u_2 = (1/4, -1/4, 1/4, -1/4).$$

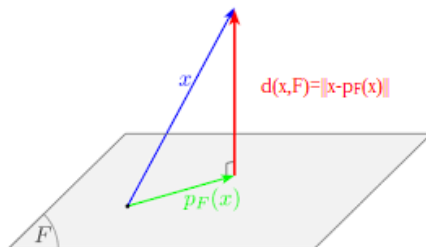
$$p(e_4) = p(0, 0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = (1/4, 1/4, -1/4, 3/4).$$

La matrice de p dans la base canonique est donc : $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Ici, F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ (les espaces ne sont pas forcément de dimension finie).

Définition 1.4.3 (Distance à un sous-espace vectoriel) Soit $x \in E$. On pose $d(x, F) = \inf\{\|x - f\|, f \in F\}$. On appelle ceci distance de x à F .



Proposition 1.4.2 (Projection orthogonale et distance) Soit $x \in E$. Alors on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

L'unique vecteur y_0 de F vérifiant $\|x - y_0\| = d(x, F)$ est : $p_F(x)$.

Remarque 1.4.3 1. (IMPORTANT) Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, alors : $d(x, F) = \|z\|$, car on a : $y = p_F(x)$. Ainsi si on connaît z , on peut calculer directement $d(x, F) = \|z\|$.

2. On a : $\forall x \in E, \forall t \in F, \|x - p_F(x)\| = d(x, F) \leq \|x - t\|$.

Exemple 1.4.4 1. Déterminer la distance de $u = (1, 1, 1, -1)$ au plan (P) d'équation :

$$\begin{cases} x + y - z - t &= 0 \\ x + 3y + z - t &= 0 \end{cases}.$$

Grâce à l'exemple précédent, la matrice de $p(u)$ dans la base canonique est $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc $p(u) = (1/2, -1/2, 1/2, -1/2)$ et

donc $u - p(u) = (1/2, 3/2, 1/2, -1/2)$ et donc :

$$d(u, P) = \|u - p(u)\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$$

2. Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p \leq n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la fonction $X \mapsto \|AX - B\|$ admet un minimum sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et qu'il est atteint en un unique point X_0 .

(b) Montrer que X_0 est l'unique solution de $A^T A X = A^T B$.

3. Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien E .

Soit $x \in E$.

(a) Montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur $p(x) \in C$ tel que : $d(x, C) = \|x - p(x)\|$.

(b) Soit $y \in C$. Montrer que $y = p(x)$ si et seulement si : $\forall c \in C, \langle x - y, c - y \rangle \leq 0$.

(c) Montrer que l'application p définie dans ce qui précède est continue.

(a)

(b)

(c) Soient $x, y \in C$. Comme $p(x)$ et $p(y)$ sont dans C alors la question précédente nous dit que $(x - p(x)|p(y) - p(x)) \leq 0$ et $(p(y) - y|p(y) - p(x)) = (y - p(y)|p(x) - p(y)) \leq 0$. En sommant ces deux inégalités, on a $(x - y + p(y) - p(x)|p(y) - p(x)) \leq 0$, donc :

$(p(y) - p(x)|p(y) - p(x)) \leq (y - x|p(y) - p(x))$, soit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\|p(y) - p(x)\|^2 \leq \|y - x\| \cdot \|p(y) - p(x)\|$. Si $\|p(y) - p(x)\| \neq 0$, alors $\|p(y) - p(x)\| \leq \|y - x\|$ et si $\|p(y) - p(x)\| = 0$ la dernière inégalité reste vraie ($0 \leq \|y - x\|$). Ainsi p est 1-lipschitzienne, donc continue.

Remarque 1.4.4 IMPORTANT : voici une méthode pour calculer une distance. Nous avons besoin de déterminer $p_F(x)$, avec F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Nous avons déjà vu comment calculer $p_F(x)$.

Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormée de F (éventuellement construite par le procédé d'orthonormalisation de Gram Schmidt). Nous avons : $p_F(x) = \sum_{j=1}^p (x|f_j)f_j$. De plus $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ qui est

la décomposition suivant $F \oplus F^\perp$. Ainsi grâce au théorème de Pythagore :

$$d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^p (x|f_j)^2, \text{ car la base } (f_1, \dots, f_p) \text{ est orthonormée.}$$

Alors on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{j=1}^p (x|f_j)^2}.$$

Exemple 1.4.5 1. Déterminer $d = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Nous reprenons le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, défini par $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Nous rappelons que dans l'exemple 1.4.3, nous avons vu que $(u_1 = 1, u_2 = X - 1, u_3 = \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Nous constatons que : $d = \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2 = \inf_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 = (d(X^3, \mathbb{R}_2[X]))^2 =$

$$\|X^3\|^2 - (X^3|u_1)^2 - (X^3|u_2)^2 - (X^3|u_3)^2 = (X^3|X^3) - (X^3|1)^2 - \left((X^3|X) - (X^3|1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(X^3|X^2) - 2(X^3|X) + (X^3|1)\right)^2$$

$$= 6! - (3!)^2 - (4! - 3!)^2 - (5!/2 - 2 \cdot 4! + 3!)^2 = 720 - 36 - 324 - 324 = 36.$$

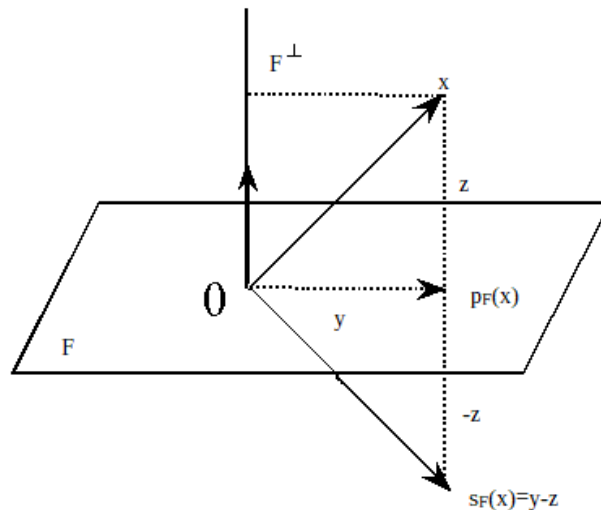
2. Soient $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ et on pose $Z = \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$. Déterminer

$$d = \inf_{f \in Z} \int_0^1 (f^2 + f'^2).$$

3. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel admettant $(e_1, \dots, e_n)$ comme base.
 Pour $x_1, \dots, x_p$ dans E , on pose $G(x_1, \dots, x_p) = [(x_i | x_j)]_{1 \leq i, j \leq p}$ et on pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det(G(x_1, \dots, x_p))$.
 Soit $x \in E$.
- (a) Si x est dans $F^\perp$, exprimer $\Gamma(e_1, \dots, e_n, x)$ à l'aide de x et de $\Gamma(e_1, \dots, e_n)$.
- (b) On revient au cas général pour x . Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 Montrer que $\Gamma(e_1, \dots, e_n, x + \lambda e_i) = \Gamma(e_1, \dots, e_n, x)$.
- (c) Montrer que : $d^2(x, F) = \frac{\Gamma(e_1, \dots, e_n, x)}{\Gamma(e_1, \dots, e_n)}$.

1.4.4 Symétrie orthogonale (programme de spé)

Définition 1.4.4 (Symétrie orthogonale) On appelle *symétrie orthogonale par rapport à F* la symétrie sur F parallèlement à $F^\perp$. On la note s_F et pour $x = y + z$ avec y dans F et z dans $F^\perp$, on a : $s_F(x) = y - z$.



Remarque 1.4.5 $s_F =$

Définition 1.4.5 (Caractérisation des symétrie orthogonales) Une symétrie s de E ($s^2 = id_E$) est dite *orthogonale* lorsqu'elle coïncide avec une symétrie orthogonale. Autrement dit, on a :

- $s^2 = id_E$
- $\text{Ker}(s + id_E)^\perp = \text{Ker}(s - id_E)$, soit $\{x \in E, s(x) = -x\}^\perp = \{x \in E, s(x) = x\}$.

Exemple 1.4.6 Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ l'expression de la symétrie orthogonale s par rapport au plan vectoriel (P) d'équation :
$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}.$$

Grâce à l'exemple 1.4.3, si on note p la projection sur (P) , on a :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, p(x, y, z, t) = \frac{1}{4}(3x - y + z + t, -x + y - z + t, x - y + z - t, x + y - z + 3t).$$

Ainsi comme $s = 2p - Id$, on a :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, s(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(x - y + z + t, -x - y - z + t, x - y - z - t, x + y - z + t).$$

1.5 Applications aux hyperplans et aux formes linéaires

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n .

1.5.1 Description des formes linéaires et hyperplans dans un espace euclidien

Théorème 1.5.1 (Théorème de représentation de Riesz) Soit f une forme linéaire de E . Alors il existe un unique a dans E tel que : $\forall x \in E, f(x) = (x|a) = (a|x)$. On note $f = (\cdot|a) = (a|\cdot)$.

Démonstration :

Remarque 1.5.1 1. À l'aide de ce théorème on peut définir le produit vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour u et v dans E , il existe un unique vecteur w de E tel que : $\forall a \in E, \det_{\mathcal{B}}(u, v, a) = (a|w)$, car : l'application $a \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, a)$ est une forme linéaire.

Cet unique vecteur est appelé produit vectoriel de u et v et on le note $u \wedge v$. Vérifions que ceci coïncide avec le produit vectoriel que vous avez vu en physique ou SI : on note $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $a = (a_1, a_2, a_3)$. On a en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\det_{\mathcal{B}}(u, v, a) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & a_1 \\ u_2 & v_2 & a_2 \\ u_3 & v_3 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$a_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \text{ ainsi } w = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right), \text{ ce qui correspond}$$

aux coordonnées que vous connaissez sur le produit vectoriel.

Si u et v sont orthogonaux, alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Cette définition du produit vectoriel s'étend à un espace euclidien de dimension n .

2. Le théorème de Riesz n'est plus vrai en dimension infinie.

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], (P|Q) = \int_0^1 PQ$. Soit la forme linéaire $\psi : P \mapsto P(0)$.

Montrer qu'il n'existe pas $A \in \mathbb{R}[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \psi(P) = (A|P)$.

Corollaire 1.5.1 (Description des hyperplans dans un espace euclidien) Soit H un hyperplan de E . Il existe a dans E non nul tel que : $H = \{x \in E, (a|x) = 0\} = a^\perp$.

Un tel vecteur a est appelé vecteur normal à l'hyperplan H .

Démonstration : Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. La proposition précédente nous dit qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$. De plus a est non nul, car φ n'est pas nulle, donc $H = \{x \in E, \varphi(x) = 0\} = \{x \in E, (a|x) = 0\}$.

Exemple 1.5.1 Si $E = \mathbb{R}^n$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0\}$ avec $a_1, \dots, a_n$ des réels non tous nuls. Alors $H = (a_1, \dots, a_n)^\perp$ et $(a_1, \dots, a_n)$ est un vecteur normal de H .

Par exemple si on se rappelle du lycée, dans l'espace si H est le plan d'équation $2x - y + 3z = 0$, alors un vecteur normal de ce plan est $(2, -1, 3)$.

1.5.2 Projection orthogonale et réflexion par rapport à un hyperplan

Proposition 1.5.1 (Projection orthogonale sur un hyperplan) Soit $H = a^\perp = (\text{Vect}(a))^\perp$, un hyperplan, avec $a \in E$ non nul. L'expression de la projection orthogonale sur H est : $x \mapsto$

Remarque 1.5.2 La projection sur $\text{Vect}(a)$ est $x \mapsto (x|u)u$, avec $u = \frac{a}{\|a\|}$ qui est unitaire.

Exemple 1.5.2 On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H = a^\perp = (\text{Vect}(a))^\perp$. Quelle est la matrice la projection orthogonale sur H dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$?

Proposition 1.5.2 (Distance à un hyperplan) Soit $a \in E \setminus \{0\}$ et $H = a^\perp$ un hyperplan de E . Soit $x \in E$. On a : $d(x, H) =$

Exemple 1.5.3 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \text{tr}(A^T B)$. Soient $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec que des 1. Déterminer $d(J, H)$.

1.5.3 Réflexions (programme de spé)

Définition 1.5.1 (Réflexion) Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une réflexion lorsque s est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H .

Proposition 1.5.3 (Expression d'une réflexion) Soit $a \in E \setminus \{0\}$. La réflexion par rapport à $H = a^\perp$ est : $s_H : x \mapsto x - 2 \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a$.

Démonstration : Vient de $s_H = 2p_H - \text{Id}_E$.

Remarque 1.5.3 1. On a $E_1(s_H) =$ et $E_{-1}(s_H) =$.

2. Si E est un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base orthonormée de

$H = a^\perp$ ($a \neq 0$), alors $\mathcal{B} = \left(e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{a}{\|a\|} \right)$ est une base orthonormée de E et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_H) =$

Ainsi $\det(s_H) =$

Exemple 1.5.4 Soit $a, b \in E$ unitaires tels que $a \neq b$. Montrer qu'il existe une unique réflexion σ telle que $\sigma(a) = b$.

1.6 Complément : Polynômes orthogonaux

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $\omega \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R}_+^*)$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n \omega(t)$ soit intégrable sur $]a, b[$. On pose $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R}), \int_a^b f^2 \omega < +\infty \right\}$.

On munit E du produit scalaire : $\forall f, g \in E, (f, g) = \int_a^b fg \omega$.

Ce produit scalaire a bien un sens, car : $\forall f, g \in E, |fg \omega| = |f| \sqrt{\omega} \cdot |g| \sqrt{\omega} \leq \frac{1}{2}(f^2 \omega + g^2 \omega)$ et cette dernière fonction est intégrable.

Nous avons aussi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

La symétrie, bilinéarité et positivité sont immédiates. Prouvons la séparation. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $0 = (P|P) = \int_a^b P^2 \omega = 0$. La fonction $P^2 \omega$ étant continue et positive, alors $P^2 \omega$ est nulle sur $]a, b[$ et comme ω est strictement positive, alors : $\forall x \in [a, b], P(x) = 0$. Comme $]a, b[$ est infini, alors P admet une infinité de racines et donc : $P = 0$.

Polynômes orthogonaux :

1. Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires (coefficient dominant qui vaut un) tels que $\deg P_k = k$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], (P_n|Q) = 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = \prod_{i=1}^r (X - \beta_i)$, où $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P_n dans $]a, b[$ de multiplicité impaire. S'il n'y a pas de telles racines, on pose $Q_n = 1$.
 - (a) Montrer que $P_n Q_n$ est de signe constant sur $]a, b[$.
 - (b) Montrer que si on a $d^\circ Q_n < n$, alors on a $P_n Q_n = 0$ et donc une contradiction.
 - (c) En déduire que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont simples et dans $]a, b[$.
4. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$XP_{n+1} = P_{n+2} + b_n P_{n+1} + a_n P_n \text{ avec } a_n = \frac{||P_{n+1}||^2}{||P_n||^2} \text{ et } b_n = \frac{(XP_{n+1}|P_{n+1})}{||P_{n+1}||^2}.$$

(On commencera par écrire $XP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_k P_k$ et on cherchera à calculer les c_k .)

Voici diverses situations classiques de polynômes orthogonaux :

Exemple 1.6.1 Cas $[a, b] = [-1, 1]$ et $\omega = 1$.

On pose $L_n = \frac{d^n}{dX^n}[(X^2 - 1)^n]$ (polynômes de Legendre).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de L_n ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q_n = (X^2 - 1)^n$. Montrer : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_n^{(k)}(1) = Q_n^{(k)}(-1) = 0$.

3. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On suppose $p > q$. Montrer que $(L_p | L_q) = - \int_{-1}^1 Q_p^{(p-1)} Q_q^{(q+1)}$.

4. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

- $(X^2 - 1)^n$ est de degré $2n$ et donc : $d^\circ(L_n) = n$, en dérivant n fois.
- On a $Q_n = (X - 1)^n (X + 1)^n$. Ainsi 1 et -1 sont des racines de multiplicité n de Q_n .
- Par intégration par partie : $(L_p | L_q) = \int_{-1}^1 Q_p^{(p)} Q_q^{(q)} = [Q_p^{(p-1)} Q_q^{(q)}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_p^{(p-1)} Q_q^{(q+1)} = - \int_{-1}^1 Q_p^{(p-1)} Q_q^{(q+1)}$, car $Q_p^{(p-1)}(1) = Q_p^{(p-1)}(-1) = 0$, grâce à la question précédente.
- On a de même $\int_{-1}^1 Q_p^{(p-1)} Q_q^{(q+1)} = [Q_p^{(p-2)} Q_q^{(q+1)}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_p^{(p-2)} Q_q^{(q+2)} = - \int_{-1}^1 Q_p^{(p-2)} Q_q^{(q+2)}$, car $Q_p^{(p-2)}(1) = Q_p^{(p-2)}(-1) = 0$, grâce à la deuxième question. Puis $(L_p | L_q) = (-1)^2 \int_{-1}^1 Q_p^{(p-2)} Q_q^{(q+2)}$. En itérant p fois ce procédé (en validant cela par récurrence), on a : $(L_p | L_q) = (-1)^p \int_{-1}^1 Q_p^{(0)} Q_q^{(p+q)}$.

Or $d^\circ(Q_q) = 2q$ et $p + q > 2q$, donc $Q_q^{(p+q)} = 0$, puis $(L_p | L_q) = 0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a la même résultat si $p < q$. Ainsi pour $p \neq q$, on a : $(L_p | L_q) = 0$. La famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

Exemple 1.6.2 Cas $]a, b[=]-1, 1[$ et $w : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nous avons vu dans le chapitre 5 une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appelés polynômes de Tchebychev telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $d^\circ(T_n) = n$.

Ici on travaille en général plutôt sur $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $f, g \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, on a :

$$(f|g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Cette intégrale est bien définie car :

$$x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est continue sur }]-1, 1[.$$

Par ailleurs fg est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$|fg| \leq M. \text{ Ainsi : } \forall x \in]-1, 1[, \left| \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{M}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}.$$

Or $\frac{M}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \sim_{x \rightarrow -1+} \frac{M}{\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ est intégrable sur $] -1, 0]$, car c'est un intégrale de Riemann avec $1/2 < 1$. Ainsi $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1, 0]$.

De même $x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$, car $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ est intégrable sur $[0, 1[$.

On a aussi : $\forall f, g \in E$, $(f|g) = \int_0^\pi f(\cos \theta)g(\cos \theta)d\theta$, car

Cette dernière expression du produit scalaire et des raisonnements proches des séries de Fourier que l'on a vu en exemple 1.1.4, permettent de montrer que la famille $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthogonale

(on a $(T_n | T_m) = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta)d\theta = 0$ si $n \neq m$).

Exemple 1.6.3 Cas $[a, b[= [0, +\infty[$ et $w : x \mapsto e^{-x}$.

On travaille ici avec l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ converge.

On a : $\forall f, g \in E$, $(f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$, que l'on appelle polynômes de Laguerre.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale de degré n .

2. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormée.

3. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $e_a : x \mapsto e^{-ax}$. Montrer que $\|e_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (L_n | e_a)^2$.

4. Montrer que $\text{Vect} \left((e_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*} \right) \subset \overline{\text{Vect} \left((L_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)}$.

5. On note $E_0 = \{f \in E, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$. Nous avons vu dans le chapitre 8 que

$G = \text{Vect}(x \mapsto e^{-nx}, n \in \mathbb{N}^*)$ est dense dans E_0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Montrer que $\overline{E_0} = E$ (l'adhérence étant au sens de la norme découlant du produit scalaire).

(b) Montrer que $\overline{\text{vect}((L_n)_{n \in \mathbb{N}})} = E$ (l'adhérence étant au sens de la norme découlant du produit scalaire).

1.

2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $(L_n | e_a) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) e^{-ax} dx$, ce qui donne comme dans la question précédente par une série d'IPP : $(L_n | e_a) = a^n \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n e^{-ax} dx = a^n \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(a+1)x} dx$, ce qui donne encore par une série d'IPP : $(L_n | e_a) = (-1)^n \frac{a^n}{(a+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} dx = (-1)^n \frac{a^n}{(a+1)^{n+1}} = \frac{1}{a+1} \left(-\frac{a}{a+1} \right)^n$. Ainsi on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (L_n | e_a)^2 = \frac{1}{(a+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a^2}{(a+1)^2} \right)^n = \frac{1}{(a+1)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{a^2}{(a+1)^2}} = \frac{1}{(a+1)^2 - a^2} = \frac{1}{2a+1} = \int_0^{+\infty} e^{-(2a+1)t} dt$. Ainsi : $\|e_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (L_n | e_a)^2$.

4.

5. (a)

(b) Soient $g \in E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $f \in E_0$ telle que $\|g - f\| \leq \varepsilon$.

Grâce au rappel, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_{a_i} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon. \text{ On a donc :}$$

$$\left\| f - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_{a_i} \right\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \sum_{i=0}^p \lambda_i e^{-a_i t} \right)^2 e^{-t} dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_{a_i} \right\|_{\infty}^2 e^{-t} dt} \leq \varepsilon \sqrt{\int_0^{+\infty} e^{-t} dt} = \varepsilon.$$

On en déduit que $\left\| g - \sum_{i=1}^p \lambda_i e_{a_i} \right\| \leq 2\varepsilon$. On a donc $E \subset \overline{\text{Vect}((e_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*})} \subset \overline{\text{Vect}((L_n)_{n \in \mathbb{N}})} \subset \overline{\text{Vect}((L_n)_{n \in \mathbb{N}})} = \overline{\text{Vect}((L_n)_{n \in \mathbb{N}})} \subset E$, donc : $\overline{\text{Vect}((L_n)_{n \in \mathbb{N}})} = E$.

2 Adjoint d'un endomorphisme

2.1 Définition et propriétés

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension n .

Proposition 2.1.1 (Existence de l'adjoint) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $y \in E$. Il existe un unique vecteur que l'on note $u^*(y)$ tel que :

$$\forall x \in E, (y|u(x)) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (u^*(y)|x).$$

Démonstration :

Définition 2.1.1 (Adjoint d'un endomorphisme) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $y \mapsto u^*(y)$ est appelé adjoint de u et on la note u^* .

Proposition 2.1.2 (Linéarité de u^*) L'application u^* est un endomorphisme de E .

Démonstration : Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall z \in E, (z|u^*(\lambda x + \mu y)) = (u(z)|\lambda x + \mu y) = \lambda(u(z)|x) + \mu(u(z)|y) = \lambda(z|u^*(x)) + \mu(z|u^*(y)) = (z|\lambda u^*(x) + \mu u^*(y)).$$

Ainsi : $\forall z \in E, (z|u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y))) = 0$, soit

$$u^*(\lambda x + \mu y) - (\lambda u^*(x) + \mu u^*(y)) \in E^\perp = \{0\}, \text{ puis : } u^*(\lambda x + \mu y) = \lambda u^*(x) + \mu u^*(y).$$

Exemple 2.1.1 1. On a $(Id_E)^* =$ En effet,

2. De la même manière, on montre que $0^* = 0$.
3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $L_A : M \mapsto AM$ qui est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer L_A^* .
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $[\forall x \in E, (u(x)|x) = 0 \quad (*)] \Leftrightarrow u^* = -u$.

Proposition 2.1.3 (Propriétés de l'adjoint) Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
2. $u^{**} = u$.
3. $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$.

Démonstration :

- 1.
2. Soit $y \in E$. On a : $\forall x \in E, (u^*(x)|y) = (y|u^*(x)) = (u(y)|x)$. Par unicité de l'adjoint pour l'endomorphisme u^* , on trouve que $u^{**}(y) = u(y)$.
3. Soit $y \in E$. On a :

$$\forall x \in E, ((\lambda u + \mu v)(x)|y) = \lambda(u(x)|y) + \mu(v(x)|y) = \lambda(x|u^*(y)) + \mu(x|v^*(y)) = (x|\lambda u^*(y) + \mu v^*(y)).$$

Par unicité de l'adjoint pour $\lambda u + \mu v$, on a : $(\lambda u + \mu v)^*(y) = \lambda u^*(y) + \mu v^*(y)$.

Remarque 2.1.1 Il peut être très pratique d'utiliser la propriété $u^{**} = u$ pour limiter les vérifications, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.1.2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|u\| = \|u^*\|$. On rappelle que : $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

Proposition 2.1.4 (Matrice de l'adjoint) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) =$$

Démonstration :

Remarque 2.1.2 (IMPORTANTE) Grâce à cette proposition, on a les liens suivants entre u et u^* :

-
-
-
-

car toutes ces quantités sont les mêmes pour A et A^T .

Exemple 2.1.3 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Grâce à l'exemple 1.1.6, on a : $\text{Ker}(u^*u) = \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(uu^*) = \text{Im}(u)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Grâce à l'exemple 2.1.1, on a : $[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0] \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, car si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée telle que $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors : $(x|u(x)) = X^T(AX) = X^T A X$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}(u))^{\perp}$ et $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^{\perp}$, puis que $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u^*) = E$.

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* = -u$. Montrer que $\text{rg}(u)$ est pair.

Grâce à l'exemple précédent, comme $\text{Ker}(u^*) = \text{Ker}(-u) = \text{Ker}(u)$, alors : $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = E$.

Soit $v = u|_{\text{Im}(u)}$ l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.

On a : $\forall x, y \in \text{Im}(u), (v(x)|y) = (u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (x|-u(y)) = (x|-v(y))$, donc $v = -v^*$. De plus $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$, donc v est un endomorphisme injective d'un espace vectoriel de dimension fini, donc v est bijective. Grâce à la remarque précédente, on a par ailleurs $\det(v) = \det(v^*) = \det(-v) = (-1)^{\dim(\text{Im}(u))} \det(v)$. Comme $\det(v) \neq 0$, alors $1 = (-1)^{\text{rg}(u)}$, et donc $\text{rg}(u)$ est pair.

Proposition 2.1.5 (Stabilité de l'orthogonale par l'adjoint) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel stable par $u : u(F) \subset F$. On a alors

$$u^*(F^{\perp}) \subset F^{\perp}.$$

Démonstration : Soit $x \in u^*(F^{\perp})$. Il existe $z \in F^{\perp}$ tel que $x = u^*(z)$. On a : $\forall y \in F, (x|y) = (u^*(z)|y) = (\underbrace{(z|u(y))}_{\in F^{\perp}}) = 0$. Ainsi, on a : $x \in F^{\perp}$.

2.2 Compléments : endomorphismes normaux

Définition 2.2.1 • Un endomorphisme u de E est dit normal si $u^*u = uu^*$.
• Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite normale si $A^T A = A A^T$.

Exemple 2.2.1 1. Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
ii. $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
2. Montrer que u est normal si et seulement si : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Remarque 2.2.1 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Ainsi u est normal si et seulement si A est normale.

Nous allons donner un théorème de réduction des endomorphismes normaux. Commençons par un lemme :

Lemme 2.2.1 (Plan ou droite stable dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel F de dimension finie (pas nécessairement euclidien), alors f admet au moins une droite stable ou un plan stable.

Démonstration :

Exemple 2.2.2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

1. Montrer que $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(u^*)$ et que : $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), E_{\lambda}(u) = E_{\lambda}(u^*)$.
2. Montrer que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

3. (a) On suppose qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormée.
- (b) Si $\dim(E) = 2$, montrer que u peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ou $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Soit F un sous-ev de E tel que $u(F) \subset F$. Montrer que $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et que u induit un endomorphisme normal sur F et $F^\perp$.
5. Montrer que u peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, S(a_1, b_1), \dots, S(a_q, b_q))$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_p, a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$.

3 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

3.1 Isométries vectorielles

Dans tout ce paragraphe, E désignera un espace euclidien de dimension n .

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 (Isométrie vectorielle) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une isométrie vectorielle (parfois appelée automorphisme orthogonal), si u conserve la norme :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E , que l'on appelle groupe orthogonal.

Exemple 3.1.1 $Id_E, -Id_E$ sont des isométries vectorielles.

Remarque 3.1.1 Soit $u \in O(E)$, alors $\|u\| =$

Le mot automorphisme employé pour les isométries vectorielles provient de :

Proposition 3.1.1 ($O(E) \subset GL(E)$) Soit $u \in O(E)$. Alors u est bijective.

Démonstration : Il suffit de démontrer que u est injectif puisque u est un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Or, si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(x) = 0$ donc $\|u(x)\| = 0$ et u conserve la norme ; donc $\|x\| = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker } u = \{0\}$, ce qui assure l'injectivité de u et donc sa bijectivité.

Proposition 3.1.2 (Une symétrie orthogonale est une isométrie) Les symétries orthogonales et les réflexions sont des isométries vectorielles.

Démonstration : Il suffit de le faire pour les symétries orthogonales, car les réflexions sont des symétries orthogonales particulières. Soit F un sous-espace vectoriel de E . On a donc $E = F \oplus F^\perp$.

Exemple 3.1.2 Soient $v \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f : x \mapsto x + \lambda(x|v)v$ soit dans $O(E)$.

3.1.2 Les différentes caractérisations des isométries vectorielles

Proposition 3.1.3 (Caractérisation par la conservation du produit scalaire) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :

1. $u \in O(E)$.
2. u préserve les produits scalaires, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Démonstration : • Le sens retour est immédiat en posant $x = y$.

• On suppose que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$. Soit $(x, y) \in E^2$. On a, d'une part,

$$\|u(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2 \quad (*).$$

D'autre part, $\|u(x + y)\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x)|u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x)|u(y)) + \|y\|^2 \quad (**)$. Grâce à (*) et (**), on en déduit que : $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Exemple 3.1.3 1. Soit $H = u^\perp$, avec $u \in E \setminus \{0\}$. Soit $f \in O(E)$ et s la réflexion d'hyperplan H .

(a) Montrer que : $f(H) = (f(u))^\perp$.

(b) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est une réflexion dont on précisera les éléments caractéristiques.

(c) Déterminer toutes les applications $f \in O(E)$ telles que : $\forall g \in O(E), fg = gf$.

2. Soit $f \in O(E)$.

(a) Montrer que : $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = E$.

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^k$.

Proposition 3.1.4 (Caractérisation par l'adjoint) Soit $u \in GL(E)$. On a les équivalences entre les deux propositions suivantes :

1. $u \in O(E)$.
2. $u^* = u^{-1}$.

Démonstration : $u \in O(E)$ si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = (u(x)|u(y)) = (x|u^* \circ u(y)) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, (x|u^* \circ u(y) - y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, u^* \circ u(y) - y \in E^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \forall y \in E, u^* \circ u(y) = y \Leftrightarrow u^* \circ u = \text{Id}_E \Leftrightarrow u^* = u^{-1}$.

Proposition 3.1.5 (Caractérisation par l'image d'une base orthonormée) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On a les équivalences suivantes :

1. u est une isométrie vectorielle.
2. $u(\mathcal{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée.

Démonstration :

Exemple 3.1.4 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_j) = e_{\sigma(j)}$, alors f est isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$, car $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, donc f envoie une base orthonormée en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (on change juste l'ordre des vecteurs), donc f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que : $f^* \circ f = g^* \circ g$.
Grâce à l'exemple 2.1.3, on a $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.
Montrer qu'il existe $u \in O(E)$ tel que $g = u \circ f$.

3.1.3 Les groupes $O(E)$ et $SO(E)$

Proposition 3.1.6 (Structure de $O(E)$) $(O(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration : Nous allons en fait démontrer que $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

- On a : $O(E) \subset GL(E)$.
- Il est clair que Id_E est un automorphisme orthogonal, donc l'élément neutre de $(GL(E), \circ)$ appartient à $O(E)$.
- Soit $(u, v) \in O(E)^2$. On a : $(v \circ u^{-1})^* = (v \circ u^*)^* = u^{**} \circ v^* = u \circ v^{-1} = (v \circ u^{-1})^{-1}$, donc $v \circ u^{-1}$ est dans $O(E)$.

Le couple $(O(E), \circ)$ est bien un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, donc un groupe.

Exemple 3.1.5 Montrer que tout $u \in O(E)$ peut s'écrire comme composée d'au plus r réflexions, avec $r = \text{rg}(u - Id_E)$.

Ainsi les réflexions engendrent $O(E)$.

Procédons par récurrence sur r .

Si $r = 0$, alors $u = Id_E$, il n'y a rien à vérifier.

Soit $r \in \mathbb{R}^*$ et supposons le résultat pour tout $v \in O(E)$ tel que $\text{rg}(v - Id_E) < r$.

Soit $u \in O(E)$ tel que $\text{rg}(u - Id_E) = r > 0$. On a donc $u \neq Id_E$, puis il existe $e \in E$ tel que $u(e) \neq e$. Grâce à l'exemple 1.5.4, la réflexion s d'hyperplan

$H = (u(e) - e)^\perp$ échange e et $u(e)$.

Montrons que $\text{Ker}(u - Id_E) \subset \text{Ker}(s \circ u - Id_E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u - Id_E)$. On a : $s \circ u(x) = s(x)$. On a $s(x) = x$, car x est dans $H : (x|u(e) - e) = (x|u(e)) - (x|e) = (u(x)|u(e)) - (x|e) = 0$.

Cependant l'inclusion $\text{Ker}(u - Id_E) \subset \text{Ker}(s \circ u - Id_E)$ est stricte, car $e \notin \text{Ker}(u - Id_E)$ et $e \in \text{Ker}(s \circ u - Id_E)$. Ainsi grâce au théorème du rang $\text{rg}(s \circ u - Id_E) < r$, donc grâce à l'hypothèse de récurrence il existe des réflexions $s_1, \dots, s_p$ telles que $s \circ u = s_1 \circ \dots \circ s_p$, avec $p \leq \text{rg}(s \circ u - Id_E) \leq r - 1$. Ainsi : $u = s \circ s_1 \circ \dots \circ s_p$, avec $p + 1 \leq r$, ce qui achève la récurrence.

Proposition 3.1.7 (Déterminant d'une isométrie vectorielle) Soit $u \in O(E)$. Alors on a : $\det(u) \in \{1, -1\}$.

Démonstration : On a grâce à la remarque 2.1.2 : $\det(u^*) = \det(u)$, soit : $\det(u^{-1}) = \det(u)$, soit : $\frac{1}{\det(u)} = \det(u)$, soit : $1 = (\det(u))^2$, soit : $\det(u) \in \{1, -1\}$.

Remarque 3.1.2 ATTENTION : $\det(f) = \pm 1$, n'implique pas : $f \in O(E)$.

Contre-exemple : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, y) \end{cases}$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(f) = 1$, mais $\|f((0, 1))\| = \|(1, 1)\| = \sqrt{2} \neq 1 = \|(0, 1)\|$.

Définition 3.1.2 (Le groupe $SO(E)$) On note $SO(E) = \{f \in O(E), \det(f) = 1\}$ appelé groupe spécial orthogonal et ses éléments sont nommés isométries directes.
Les éléments de $O(E) \setminus SO(E)$ sont appelés isométries indirectes.

Proposition 3.1.8 (Structure de $SO(E)$) $(SO(E), \circ)$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O(E)$.

Démonstration :

3.2 Matrices orthogonales

3.2.1 Définition et caractérisations

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous rappelons que nous avons les équivalences :
 $A^T A = I_n \Leftrightarrow A A^T = I_n \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$.

Définition 3.2.1 (Matrice orthogonale) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^T A = I_n$ est dite orthogonale. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n .

Remarque 3.2.1 (IMPORTANTE) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| =$

Ainsi $\|A\| =$

Exemple 3.2.1 1. Déénombrer le nombre de matrices de $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R})$.

2. $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte.

3. Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in O(n)$ et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que : $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$.

(b) Étudier le cas d'égalité.

Proposition 3.2.1 (Matrice d'un automorphisme orthogonal) Soient E espace euclidien de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors on a :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration : On sait que $A^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$. On a donc les équivalences suivantes :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow u^{-1} = u^* \Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 3.2.2 Si on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel, alors pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'endomorphisme canoniquement associé $f : X \mapsto AX$ est une isométrie vectorielle si et seulement si A est dans $O_n(\mathbb{R})$. En effet la matrice de f dans la base canonique est A . Comme la base canonique est orthonormée, il suffit d'utiliser la proposition précédente.

Exemple 3.2.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $M_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}$.
2. Montrer que : $M_\sigma^T = M_{\sigma^{-1}}$.

Proposition 3.2.2 (Caractérisation des matrices orthogonales par les lignes ou les colonnes) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ ses vecteurs colonnes et $(L_1, \dots, L_n)$ ses vecteurs lignes. On a les équivalences suivantes :

1. $A \in O(n)$.
2. $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.
3. $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.

Démonstration :

Cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car on a donc n vecteurs colonnes libres (famille orthonormée) dans un espace vectoriel de dimension n .

Pour le dernier point, on conclut de même en constatant que : $AA^T = [(L_i|L_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$, d'où : $AA^T = I_n \Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (L_i|L_j) = \delta_{i,j}$.

Remarque 3.2.3 Si $A = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans $O(n)$, alors : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,j}| \leq 1$, car :

Exemple 3.2.3 1. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} 1^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \|C_j\|^2} \sqrt{n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n 1n} = n\sqrt{n}$.

2. Déterminer l'inverse de : $A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

On constate que les colonnes de A sont de norme un (attention au $\frac{1}{\sqrt{6}}$) et qu'elles sont orthogonales entre elles. Ainsi A est dans $O_3(\mathbb{R})$ et donc $A^{-1} =$

$$A^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Pour quels a, b a-t-on A dans $O_3(\mathbb{R})$?

(b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A ?

Corollaire 3.2.1 (Matrice de passage orthogonale) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est dans $O(n)$ si et seulement si M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée.

Démonstration : On suppose que M dans $O(n)$ et on note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de M . Ainsi M est la matrice de passage de la base canonique à la base $(C_1, \dots, C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ces deux bases sont orthonormées pour le produit scalaire usuel.

Soient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ deux bases orthonormées d'un espace euclidien E telles que

$M = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de M . On a : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, v_j = \sum_{k=1}^n m_{k,j} u_k$.

Ainsi on a : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \underbrace{\delta_{i,j}}_{\mathcal{C} \text{ B.O.N.}} = \underbrace{(v_i|v_j)}_{\mathcal{B} \text{ B.O.N.}} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} = (C_i|C_j)$. Ainsi les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc M est dans $O(n)$.

Remarque 3.2.4 Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases orthonormées de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{U}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{U}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'}$ qui est dans $O(n)$. On a : $A' =$

Exemple 3.2.4 Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ les vecteurs colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on appellera $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telle que $A = QR$.

Définition 3.2.2 (Matrices orthogonalement semblables) Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et A' sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$A = PA'P^{-1} = PA'P^T.$$

3.2.2 Les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ et orientation

Proposition 3.2.3 (Structure de $O_n(\mathbb{R})$) $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe.

Démonstration : Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. On a bien sûr : $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

- On a $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
- Soient $M, N \in O_n(\mathbb{R})$. On a :

$$(M^{-1}N)^T(M^{-1}N) = (M^T N)^T(M^T N) = N^T \underbrace{MM^T}_{=I_n} N = N^T N = I_n.$$
Donc $M^{-1}N$ est dans $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.4 (Déterminant d'une matrice orthogonale) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Alors on a : $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Démonstration : On a : $\det(A^T A) = \det(I_n)$, donc $\det(A^T) \det(A) = 1$, soit $(\det(A))^2 = 1$.

Exemple 3.2.5 (Inégalité d'Hadamard) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2}$.

Étudier le cas d'égalité.

Définition 3.2.3 ($SO(n)$) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$ est appelé groupe spécial orthogonal et on le note $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.

Les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales positives ou directes et les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$ sont appelés matrices orthogonales négatives ou indirectes.

Proposition 3.2.5 (Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$) $SO_n(\mathbb{R})$ est un groupe en tant que sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : C'est la même preuve que pour $SO(E)$.

Définition 3.2.4 (Orientation d'un espace euclidien) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Pour toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ on dit qu'elle possède la même orientation que $\mathcal{B}$ si $\det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}) > 0$.

Orienter un espace euclidien, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées $\mathcal{B}$ comme base de référence. Ainsi toute base orthonormée $\mathcal{B}'$ ayant la même orientation que $\mathcal{B}$ est dite directe et sinon indirecte (ou rétrograde).

Remarque 3.2.5 Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E . Ces deux bases ont la même orientation si et seulement si la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est dans $SO(n)$.

Proposition 3.2.6 (Déterminant dans deux bases orthonormées directes) Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E . Alors : $\forall x_1, \dots, x_n \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$

Démonstration : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E . On a :

$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Or $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}) = 1$, car $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ est dans $SO_n(\mathbb{R})$ en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées. Ainsi on a :

$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

3.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien de dimension deux que l'on munit d'une orientation.

Proposition 3.3.1 (Description de $O(2)$) Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$ et $ab + cd = 0$ (car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée). De manière équivalente, il existe θ et θ' tels que $(a, c) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $(b, d) = (\sin \theta', \cos \theta')$, avec $\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta' = 0$, soit $\sin(\theta + \theta') = 0$.

Deux cas se présentent alors : $\theta' + \theta \equiv 0[2\pi]$ et $\theta' + \theta \equiv \pi[2\pi]$ soit : $\theta' \equiv -\theta[2\pi]$ et $\theta' \equiv \pi - \theta[2\pi]$, ce qui donne le résultat.

Corollaire 3.3.1 (Description de $SO(2)$) On a : $SO(2) = \left\{ R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Démonstration : En reprenant la proposition précédente, pour tout θ réel, nous avons :

$\det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = 1$ et $\det \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = -1$.

Proposition 3.3.2 (Opérations dans $SO(2)$) Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.
2. $R_{\theta}^n = R_{n\theta}$.
3. $R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta}$.
4. $R_{\theta} = I_2 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi]$.

Démonstration :

1. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a : $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.
2. Se montre par récurrence grâce au point précédent.
3. Grâce au premier point : $R_{\theta} R_{-\theta} = R_{\theta - \theta} = R_0 = I_2$.

4. $R_\theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 1$ et $\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi]$.

Corollaire 3.3.2 (Morphismes de groupes) 1. L'application $f : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \rightarrow (SO_2(\mathbb{R}), \cdot) \\ \theta & \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}$ est un morphisme surjectif de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

2. L'application $g : \begin{cases} (\mathbb{U}, \times) & \rightarrow (SO_2(\mathbb{R}), \cdot) \\ e^{i\theta} & \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration : Le premier point découle directement de la proposition précédente.

Pour le deuxième point, nous constatons que l'application est bien définie, car si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ et donc : $R_\theta = R_{\theta'}$, puis : $g(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta'})$.

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a $g(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}) = g(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1}R_{\theta_2} = g(e^{i\theta_1})g(e^{i\theta_2})$ et donc g est bien un morphisme de groupes. Il est clairement surjectif.

Enfin on a : $g(e^{i\theta}) = I_2 \Leftrightarrow R_\theta = I_2 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow e^{i\theta} = 1$. Ainsi $\text{Ker}(g) = \{1\}$ et donc g est aussi injectif, ce qui en fait un isomorphisme.

Remarque 3.3.1 La première application étant continue et $\mathbb{R}$ étant connexe par arcs, alors $f(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$ l'est aussi.

Corollaire 3.3.3 (Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$) Pour toute matrice A, B de $SO_2(\mathbb{R})$, on a : $AB = BA$.

Démonstration : Grâce au corollaire 3.3.1, il existe θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $A = R_{\theta_1}$ et $B = R_{\theta_2}$. Ainsi grâce à la proposition précédente : $AB = R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2+\theta_1} = R_{\theta_2}R_{\theta_1} = BA$.

Remarque 3.3.2 Attention, $SO(n)$ n'est pas commutatif si $n \geq 3$.

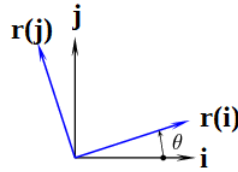
Définition 3.3.1 (Rotation vectorielle d'un espace euclidien) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation vectorielle d'angle θ , noté r_θ l'endomorphisme défini par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = R_\theta.$$

Cette définition ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie (donc θ est bien défini de façon unique modulo 2π).

Remarque 3.3.3 1. Si $\mathcal{C}$ est une autre base orthonormée directe, alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est dans $SO(2)$ (grâce à la remarque 3.2.5, car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ ont la même orientation) donc commute avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta)$. Et donc $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(r_\theta) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta)$, donc θ est bien indépendant de la base orthonormée directe choisie.

2. Représentons cela géométriquement. On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note (i, j) la base canonique qui fixe aussi l'orientation de $\mathbb{R}^2$. Soit r la rotation vectorielle d'angle θ (de centre O). On a alors : $r(i) =$ et $r(j) =$



3. Pour définir la notion d'angle, on peut se baser sur les rotations.

Soit u et v deux vecteurs unitaires. Il existe une unique rotation r telle que $r(u) = v$. En effet on complète la famille orthonormée (u) en une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, w)$ de E . On peut considérer cette base directe en prenant $-w$ au lieu de w . On a ainsi $v = au + bw$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, car $\|v\| = 1$.

Soit r une telle rotation. On pose $r(u) = v$. Comme une rotation conserve le produit scalaire, alors $r(u) = v$ et $r(w)$ sont orthogonaux. Or $v^\perp$ est de dimension 1 et $-bu + aw$ est orthogonal à v et non nul. Ainsi $v^\perp = \text{Vect}(-bu + aw)$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(w) = \lambda(-bu + aw)$.

On a donc : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}$. Or le déterminant de cette matrice doit valoir 1, donc $1 = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$, ce qui donne au plus une matrice.

Réciproquement, soit $r \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. C'est bien la matrice d'une rotation, car les colonnes sont de norme un et orthogonale entre elles et le déterminant de cette matrice vaut un.

On définit l'angle $(\widehat{u, v})$ comme l'unique θ à 2π -près tel que $r_{\theta}(u) = v$.

Plus généralement, soient u et v deux vecteurs non nuls de E . On pose $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$.

On pose $(\widehat{u, v}) = (\widehat{u_1, v_1})$.

Exemple 3.3.1 1. Les angles des rotations vectorielles suivantes sont :

(a) $\text{Id}_E : 0$

(b) $-\text{Id}_E : \pi$.

2. Identifier l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On constate que $A = R_{4\pi/3}$, donc f est la rotation d'angle $4\pi/3$.

3. Un endomorphisme u d'un espace euclidien E vérifiant : $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$ est-il forcément nul ?

4. Soit f la rotation vectorielle d'angle θ d'un plan euclidien E orienté. Soit $a \in E$ unitaire. Calculer $(f(a)|a)$.

Le deuxième point du corollaire 3.3.2 permet d'identifier les rotations de $\mathbb{R}^2$, avec l'écriture complexe d'une rotation :

Proposition 3.3.3 (Écriture complexe d'une rotation) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit M un point du plan d'affixe z . Soit M' d'affixe z' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ . Alors : $z' = e^{i\theta}z$.

Démonstration : Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_{\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \text{ et donc :}$$

$$z' = x' + iy' = x \cos \theta - y \sin \theta + i(x \sin \theta + y \cos \theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = e^{i\theta}z.$$

Remarque 3.3.4 Rappelons l'écriture complexe d'autres transformations :

1. Soit a un nombre complexe. Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe a . À un point M du plan d'affixe z_M , on associe son image M' par la translation de vecteur $\vec{u}$. Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = z_M + a$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. À un point M du plan d'affixe z_M , on associe son image M' par l'homothétie de centre O et de rapport k . Alors M' a pour affixe : $z_{M'} = kz_M$.
3. On appelle similitude directe du plan complexe toute application de la forme $f : z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \times \mathbb{C}$.

On pose $a = re^{i\theta}$. On pose $\omega = \frac{b}{1-a}$, qui est un point fixe de f . Ainsi :

$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) - \omega = re^{i\theta}(z - \omega)$. On parle donc de similitude de centre ω , de rapport r et d'angle θ . C'est donc la composée de l'homothétie de rapport r et de centre ω et de la rotation de centre ω et d'angle θ .

Nous rappelons que les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.3.1 (Classification des isométries du plan) *Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est soit une réflexion (si son déterminant vaut -1 dans une base orthonormée directe), soit une rotation (si son déterminant vaut 1 dans une base orthonormée directe).*

Démonstration : Le cas des éléments de $SO(E)$ vient d'être traité via $SO_2(\mathbb{R})$, ce sont toutes les rotations.

Maintenant, soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = S_\theta$. Le polynôme caractéristique de S_θ est :

$$\begin{vmatrix} X - \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & X + \cos \theta \end{vmatrix} = (X - \cos \theta)(X + \cos \theta) - \sin^2 \theta = X^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1).$$

Ainsi le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc S_θ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Cherchons $E_1(S_\theta)$. Nous avons : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S_\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0 \\ (\sin \theta)x - (\cos \theta + 1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -(2 \sin^2(\theta/2))x + 2(\sin(\theta/2) \cos(\theta/2))y = 0 \\ 2(\sin(\theta/2) \cos(\theta/2))x - (2 \cos^2(\theta/2))y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin(\theta/2)(-\sin(\theta/2)x + (\cos(\theta/2))y) = 0 \\ 2 \cos(\theta/2)((\sin(\theta/2))x - (\cos(\theta/2))y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$-\sin(\theta/2)x + (\cos(\theta/2))y = 0$, car on ne peut pas avoir en même temps $\sin(\theta/2) = 0$ et $\cos(\theta/2) = 0$, sinon $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 0 \neq 1$.

Ainsi $E_1(S_\theta)$ est une droite vectorielle et comme le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ vu dans $\mathbb{R}^2$ vérifie équation

précédente, alors $E_1(S_\theta) = \text{Vect} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$. De même on montre que $E_{-1}(S_\theta) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$.

Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et que l'on est en dimension 2, alors $E_1(S_\theta) = (E_{-1}(S_\theta))^\perp$. Ainsi f correspond à la réflexion d'axe $\mathcal{D}_\theta$ engendrée par le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

3.4 Réduction des isométries vectorielles en base orthonormé

3.4.1 Cas général

Proposition 3.4.1 (Isométries vectorielles et sous-espaces stables) *Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par f (c'est-à-dire $f(F) \subset F$). Alors on a :*

- f induit une isométrie vectorielle sur F .
- $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Démonstration : Pour le premier point, soit $\tilde{f} : F \rightarrow F$ l'endomorphisme induit par f sur F et on a toujours : $\forall x \in F, \|\tilde{f}(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$ et donc $\tilde{f}$ est dans $O(F)$.

Pour le deuxième point : comme $\tilde{f}$ est dans $O(F)$, alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme de F et donc f réalise une bijection de F dans F , en particulier $f(F) = F$.

Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$. Il existe donc $z \in F$ tel que : $y = f(z)$. On a :

$$(f(x)|y) = (f(x)|f(z)) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} | \underbrace{z}_{\in F}) = 0. \text{ Ainsi : } f(x) \in F^\perp, \text{ puis } f(F^\perp) \subset F^\perp.$$

Remarque 3.4.1 *Comme f induit une isométrie vectorielle $\tilde{f}$ sur F , alors la proposition 3.1.1, nous dit que $\tilde{f}$ est une bijection de F dans F et donc : $f(F) = \tilde{f}(F) = F$.*

On a même $f(F^\perp) = F^\perp$, en remplaçant F par $F^\perp$ (car $F^\perp$ est stable par f grâce à la proposition précédente).

Exemple 3.4.1 (Théorème de Maschke) *Soit G un groupe fini de $GL(E)$.*

1. Montrer que $(x, y) \mapsto \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle$ définit un produit scalaire sur E que l'on notera $(\cdot | \cdot)$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G . Montrer que F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G .

1. L'application est bien symétrique, bilinéaire et positive.

Soit $x \in E$ tel que $0 = (x|x) = \sum_{g \in G} \|g(x)\|^2$, donc tous les $g(x)$ sont nuls et pour $g = Id_E$, on a : $x = 0$.

2. Montrons que pour ce produit scalaire tous les éléments de g sont dans $O(E)$.

Soit $f \in G$. Comme $g \mapsto g \circ f$ est une bijection de G dans G , alors :

$$\forall x \in E, (f(x)|f(x)) = \sum_{g \in G} \langle g \circ f(x), g \circ f(x) \rangle = \sum_{h \in G} \langle h(x), h(x) \rangle = (x|x).$$

Grâce à la proposition précédente, $F^\perp$ (orthogonal pour notre nouveau produit scalaire) est stable par tous les éléments de G et répond donc à notre question.

Théorème 3.4.1 (Réduction d'une isométrie vectorielle) Si $u \in O(E)$ alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de blocs diagonaux de la forme

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2s = n$ et pour tout i de $\llbracket 1, s \rrbracket$, l'angle θ_i choisi dans $] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$ et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'espace E est la somme directe orthogonale de $E_1(u)$, $E_{-1}(u)$ et de plans sur lesquels u induit des rotations.

Démonstration : On a : $u^*u = u^{-1}u = Id_E = uu^{-1} = uu^*$. Ainsi u est un endomorphisme normal.

Dans une certaine base orthonormée la matrice de u est : dans une base orthonormée par une matrice de la forme $M = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, S(a_1, b_1), \dots, S(a_l, b_l))$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme λ_i est valeur propre de u , il existe $x \in E$ non nul tel que : $u(x) = \lambda_i x$, puis $\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda_i| \cdot \|x\|$, puis comme x est non nul, alors : $|\lambda_i| = 1$, donc : $\lambda_i \in \{-1, 1\}$.

Soit $i \in \llbracket 1, l \rrbracket$. De $M^T M = I_n$, on a : $S(a_i, b_i)^T S(a_i, b_i) = I_2$, puis comme $\det(S(a_i, b_i)) = a_i^2 + b_i^2 \geq 0$, alors $S(a_i, b_i)$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$ et donc est de la forme $R(\theta_i)$ ou I_2 ou $-I_2$.

Remarque 3.4.2 (IMPORTANT) Soit $f \in O(E)$, alors $Sp(f)$

Cherchons les valeurs propres de $R(\theta)$ pour $] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$. On a :

$\chi_{R(\theta)} = X^2 - \text{tr}(R(\theta))X + \det(R(\theta)) = X^2 - 2\cos\theta X + 1 = X^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})X + e^{i\theta} \times e^{-i\theta}$. Ainsi $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ et elles ne sont pas réelles. Ainsi les seules valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1 .

Exemple 3.4.2 1. Soit $f \in O(E) \setminus SO(E)$. Montrer que : $-1 \in Sp(f)$.

2. Retrouver le fait que pour $u \in O(E)$, si on note $r = \text{rg}(u - Id_E)$, alors u peut s'écrire comme la composée d'au plus r réflexions.

En reprenant la proposition précédente avec ses notations, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}.$

On a par calcul matriciel $R(\theta) = S_\theta S_0$. Or pour $\psi \in \mathbb{R}$, la matrice $M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & S_\psi & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion s dans $\mathcal{B}$, car nous avons vu dans le paragraphe précédent que S_ψ correspondait à une réflexion sur un plan P et comme $\mathcal{B}$ est orthogonale, alors sur $s|_{P^\perp} = Id_{P^\perp}$, vu la construction de la matrice. Ainsi M est le produit de $2s$ matrices M_ψ et q matrices $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ qui correspondent aussi à des réflexions. Donc u est la composée de $q + 2s = r$ réflexions.

Corollaire 3.4.1 (Réduction des matrices orthogonales) Pour toute matrice M de $O_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice P dans $O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$ tels que $p + q + 2s = n$ et pour tout i de $\llbracket 1, s \rrbracket$, l'angle θ_i choisi dans $] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$.

Démonstration : Nous considérons la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, alors f est un automorphisme orthogonal et grâce à la proposition précédente a une matrice de la forme

$$M' = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} \text{ dans une base orthonormée } \mathcal{B}'. \text{ Si on pose } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$
 la matrice

de passage des base orthonormées $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui est donc dans $O_n(\mathbb{R})$, alors $M = PM'P^{-1}$.

Exemple 3.4.3 1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Vu la proposition précédente, il suffit de montrer que tout matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix}, \theta_1, \dots, \theta_s \text{ choisis dans }] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Soit $\theta \in] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$. Montrons que $R(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Nous avons vu dans la remarque précédente que $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont les valeurs propres complexes de $R(\theta)$ et elles sont en plus distinctes, donc $R(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, il existe $P_k \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $R(\theta_k) = P_k \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix} P_k^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & P_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & e^{i\theta_1} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & e^{-i\theta_1} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{i\theta_s} & 0 \\ & & & & 0 & e^{-i\theta_s} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_q & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & P_1^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_s^{-1} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

et donc notre matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2. Quelles sont les composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$?

3. *Montrer que $\exp(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$.*

3.4.2 Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3

Dans ce paragraphe, on suppose que $\dim(E) = 3$ et on munit E d'une orientation.

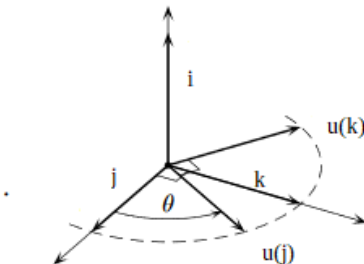
Proposition 3.4.2 (Réduction des isométries directes en dimension 3) *Soit $u \in SO(E)$. Il existe alors une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Grâce un théorème de réduction des isométries, la matrice de u dans une certaine base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, avec $p + q = 3$ ou $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $\det(u) = 1$, alors dans le premier cas, nous avons $p = 3$ ou $p = 1$ et dans le deuxième $\epsilon = 1$. Comme $R(0) = I_2$ et $R(\pi) = -I_2$, dans tous les cas on a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$.

Définition 3.4.1 (Rotation vectorielle de l'espace) *Si une application u a pour matrice*

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, *avec $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe, alors on dit que u est la rotation d'axe orienté par i et d'angle θ .*



Remarque 3.4.3

1. (IMPORTANTE) u induit une rotation d'angle θ dans la plan $P = \text{vect}(i)^\perp = \text{vect}(j, k)$, qui orienté par (j, k) .
2. L'axe de la rotation se trouve en cherchant $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ car u laisse fixe l'axe de la rotation qui est $\text{vect}(i)$.
3. Nous avons $(u(j)|j) = \quad \quad \quad$ et $(u(j)|k) = \quad \quad \quad$
Ces relations permettent de trouver l'angle de la rotation.
4. Une rotation d'angle π est appelé retournement de l'espace.
C'est une symétrie par rapport à $\text{vect}(i)$.

Exemple 3.4.4

1. Soit $u \in SO(E)$ tel que $\text{tr}(u) = -1$. Que dire de u ?
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation r d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe orienté par $a = (1, 1, 1)$.

4 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Dans tout ce paragraphe, $(E, (\cdot|\cdot))$ désignera un espace euclidien de dimension n .

4.1 Endomorphismes autoadjoints

Définition 4.1.1 (Endomorphismes autoadjoints) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est autoadjoint (que l'on appelle aussi endomorphisme symétrique) lorsque $u^* = u$, autrement dit :

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Remarque 4.1.1 u^*u et uu^* sont autoadjoints, car $(u^*u)^* = u^*u^{**} = u^*u$ et de même pour uu^* .

Exemple 4.1.1 1. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (P|Q) = \int_{-1}^1 PQ.$$

On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (d(P)|Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P'(x)Q'(x)dx$. En déduire que d est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer $\text{Ker}(d)$.

2. Si u est un endomorphisme autoadjoint, alors : $(\text{Ker } u)^\perp = \text{Im } u$.

Proposition 4.1.1 (Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . u est autoadjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration : On rappelle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^T$, car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Ainsi $u = u^*$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^T$.

Remarque 4.1.2 1. Ceci ne dépend pas du choix de la base orthonormée. En effet si

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ orthonormée, alors P est orthogonale et la matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est $P^{-1}AP = P^TAP$, encore symétrique.

2. Ceci est faux si la base n'est pas orthonormée. Si dans la remarque précédente, on prend une base $\mathcal{B}'$ quelconque, alors P n'est plus orthogonale et si on pose $M = P^{-1}AP$, donc : $M^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = P^T A (P^T)^{-1}$. A priori il n'y a aucune raison d'avoir $M^T = M$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application $u : X \mapsto AX$ est un endomorphisme autodjoint de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est symétrique.
En effet, dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^T$. Ainsi $u = u^*$ si et seulement si $A = A^T$.
4. Si on note $\varphi : u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors φ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\varphi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
5. On peut retrouver aussi le fait que $\mathcal{S}(E)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ en remarquant que 0 est dans $\mathcal{S}(E)$ et que : $\forall u, v \in \mathcal{S}(E), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^* = u + \lambda v$.

Proposition 4.1.2 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux) Soit p un projecteur. Alors p est une projection orthogonale si et seulement si p est autoadjoint.

Démonstration : On suppose que p est une projection orthogonale.

Soient x, y deux vecteurs quelconques de E . Alors :

$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Im } p, x_2 \in \text{Ker } (p), y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \text{Im } (p), y_2 \in \text{Ker } (p)$.

Par conséquent : $(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1) = (x_1|y_1) + (x_2|y_1) = (x_1 + x_2|y_1) = (x|p(y))$, car $\text{Im } (p)$ et $\text{Ker } (p)$ sont orthogonaux.

Il s'ensuit que p est bien autoadjoint.

Réciproquement si p est autoadjoint, l'exemple précédent donne : $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$.

Exemple 4.1.2 Soit $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que l'endomorphisme p canoniquement associé à A est une projection orthogonale sur un espace que l'on précisera.

4.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Proposition 4.2.1 (Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint)

1. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration :

1. u est un endomorphisme normal, car $u^*u = u^2 = uu^*$, puis voir le paragraphe sur les endomorphismes normaux.
2. Cela provient du premier point et de la remarque 4.1.2.

Exemple 4.2.1 Soit s une symétrie vectorielle. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est autoadjoint.

On suppose que s est une symétrie orthogonale par rapport à F . Soient x, y deux vecteurs quelconques de E . Alors :

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F, x_2 \in F^\perp, \quad y = y_1 + y_2 \text{ avec } y_1 \in F, y_2 \in F^\perp.$$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent : } (s(x)|y) &= (x_1 - x_2|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) - (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = \\ (x_1|y_1) - (x_2|y_2) &= (x_1|y_1) - (x_1|y_2) + (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1 + x_2|y_1 - y_2) = (x|s(y)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que s est bien autoadjoint.

Réciproquement si s est autoadjoint : les sous-espaces propres $E_1(s)$ et $E_{-1}(s)$ sont orthogonaux et donc s est une symétrie orthogonale.

Proposition 4.2.2 (Sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint) Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace vectoriel de E stable de u . Alors on a : $u(F^\perp) \subset F^\perp$ et u induit un endomorphisme autoadjoint sur F et $F^\perp$.

Démonstration : On sait que $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$ et comme $u = u^*$, on a donc le résultat. u induit un endomorphisme autoadjoint sur F , car on a encore : $\forall x, y \in F, (u(x)|y) = (x|u(y))$.

Remarque 4.2.1 Ainsi si u est autoadjoint, alors si on a $E = F \oplus F^\perp$, avec $u(F) \subset F$, alors dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ adaptée à cette somme, la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} u(F) & u(F^\perp) \\ A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} \begin{matrix} F \\ F^\perp \end{matrix}, \text{ avec } A \text{ et } B \text{ symétriques.}$$

Théorème 4.2.1 (Théorème spectral) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

u est autoadjoint si et seulement si u est diagonalisable dans une base orthonormée.

On peut reformuler ceci de la façon suivante : u est autoadjoint si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$

avec les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Démonstration : Pour le sens retour, si u est diagonalisable dans une base orthonormée, alors sa matrice dans celle-ci est symétrique (car diagonale) et donc u est autoadjoint (proposition 4.1.1).

Supposons que u soit autoadjoint. Comme $u^*u = u^2 = uu^*$, alors u est un endomorphisme normal et donc il existe une base orthonormée telle que $M = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, S(a_1, b_1), \dots, S(a_l, b_l))$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_k, a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Mais u étant autoadjoint et $\mathcal{B}$ une base orthonormée, alors M est symétrique donc : $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, b_i = 0$. Ainsi M est diagonale.

Pour la reformulation, u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$. On suppose maintenant

u diagonalisable.

Si $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ est constituée d'espaces orthogonaux deux à deux, alors u est diagonalisable en

base orthonormée, en concaténant des bases orthonormées sur chaque $E_\lambda(u)$. Ainsi u est autoadjoint.

Si u est autoadjoint, on peut trouver une base orthonormée de diagonalisation. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et on numérote la base de diagonalisation $(e_1^{(1)}, \dots, e_{n_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{n_p}^{(p)})$, avec $e_k^{(i)}$ qui est vecteur propre pour la valeur propre λ_i , pour i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ et donc $\text{Vect}(e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}) \subset E_{\lambda_i}$. Pour l'inclu-

sion inverse, on a par diagonalisabilité de u : $n = \sum_{i=1}^p n_i \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}) = n$, donc dans ces inégalités,

on n'a que des égalités, soit : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, n_i = \dim(E_{\lambda_i})$ et donc : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}) = E_{\lambda_i}$.

Le fait que les vecteurs $e_k^{(i)}$ soient orthogonaux entre eux fait que les sous-espaces E_{λ_i} le sont aussi.

Remarque 4.2.2 En reprenant ce qui a été dit au début de la preuve précédente, si u est autoadjoint, alors u est diagonalisable et $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$, avec $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et pour construire une base orthonormée de diagonalisation, il suffit de construire une base orthonormée de chaque $E_{\lambda_i}(u)$ (par exemple grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et de regrouper toutes ces bases, car les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Exemple 4.2.2 1. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (P|Q) = \int_{-1}^1 PQ.$$

On pose l'endomorphisme $d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que d est diagonalisable dans une base orthonormée pour le produit scalaire cité.

(b) Soit $\lambda \in Sp(d)$. Donner une relation entre les degrés des vecteurs propres associés à λ et λ .

2. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$). Pour i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

(a) Montrer que : $\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_p \|x\|^2$.

(b) Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

(c) (**Théorème de Courant-Fischer**) On note $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ les valeurs propres de u avec des éventuelles répétitions et $S^{n-1} = \{x \in E, \|x\| = 1\}$.

Soit $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on note $\mathcal{V}_d$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension d .

Montrer que pour k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\mu_k = \min_{V \in \mathcal{V}_k} \max\{(u(x)|x), x \in V \cap S^{n-1}\} = \max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x), x \in V \cap S^{n-1}\}.$$

(d) Montrer que $\|u\| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.

(a)

(b)

(c) •

• Soit $V \in \mathcal{V}_{n-k+1}$. Soit $W = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, on a $V \cap W \neq \{0\}$. Soit $y \in V \cap W$ unitaire, on a donc $y = \sum_{i=1}^k y_i e_i$, puis : $(u(y)|y) =$

$$\sum_{i=1}^k \mu_i y_i^2 \leq \mu_k, \text{ puis : } \min\{(u(x)|x), x \in V \cap S^{n-1}\} \leq (u(y)|y) \leq \mu_k.$$

Cela donne : $\max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x), x \in V \cap S^{n-1}\} \leq \mu_k.$

On pose $W_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \in \mathcal{V}_{n-k+1}$.

$$\forall z \in W_k \cap S^{n-1}, (u(z)|z) = \sum_{i=k}^n \mu_i z_i^2 \geq \mu_k \sum_{i=k}^n z_i^2 = \|z\|^2 \mu_k = \mu_k.$$

Ce minorant est atteint en prenant $z = e_k$, donc : $\min\{(u(x)|x), x \in W_k \cap S^{n-1}\} = \mu_k.$

On en déduit que : $\mu_k = \max_{V \in \mathcal{V}_{n-k+1}} \min\{(u(x)|x), x \in V \cap S^{n-1}\}$ et le maximum est atteint en $V = W_k$.

(d) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que : $|\lambda_k| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|.$

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. On reprend les notations de la question (a) :

$$\|u(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^p \underbrace{\lambda_i x_i}_{\in E_i} \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \|x_i\|^2, \text{ grâce au théorème de Pythagore.}$$

On a donc : $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \|x_i\|^2 \leq \lambda_k^2 \sum_{i=1}^p \|x_i\|^2 = \lambda_k^2 \|x\|^2 = \lambda_k^2$, grâce au théorème de Pythagore. Ainsi $\|u(x)\| \leq \sqrt{\lambda_k^2} = |\lambda_k|$ et $|\lambda_k|$ majore $\{\|u(x)\|, x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}.$

Par ailleurs ce majorant est atteint. En effet, on prend $x \in E_k$ non nul et quitte à diviser par $\|x\|$, on peut supposer que $\|x\| = 1$. Ainsi $\|u(x)\| = \|\lambda_k x\| = |\lambda_k| \times \|x\| = |\lambda_k|.$

On a donc $\|u\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \|u(x)\| = |\lambda_k| = \max_{\lambda \in Sp(u)} |\lambda|$.

3. Soient p, q deux projecteurs orthogonaux de E .

(a) Montrer que pqp est diagonalisable.

(b) Montrer que $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$.

(c) En déduire que pq est diagonalisable.

4. Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes autoadjoints de E . On suppose que

i. $\text{rg } u_1 + \dots + \text{rg } u_p = n$.

ii. $\forall x \in E, \sum_{i=1}^p (u_i(x)|x) = \|x\|^2$.

Montrer que $E = \text{Im } u_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } u_p$, que les $\text{Im } u_i$ sont orthogonaux entre eux deux à deux, et que pour tout i, u_i est le projecteur orthogonal sur $\text{Im } u_i$.

La relation (ii) s'écrit aussi : $\forall x \in E, (u_1 + \dots + u_p - \text{Id}_E)(x) \cdot x = 0$.

L'endomorphisme $v = u_1 + \dots + u_p - \text{Id}_E$ étant autoadjoint (par linéarité de l'adjoint), on a : $v = 0$ (en effet, v est diagonalisable et si λ est une

valeur propre associée à un vecteur propre x , on a : $0 = (v(x)|x) = \lambda \|x\|^2$, puis $\lambda = 0$, donc $Sp(v) = \{0\}$). Donc $u_1 + \dots + u_p = \text{Id}_E$, d'où on tire

$E = \text{Im } u_1 + \dots + \text{Im } u_p$, car : $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^p u_i(x)$. Comme de plus $\sum_{i=1}^p \dim(\text{Im } u_i) = \dim E$ d'après (i), on a : $E = \text{Im } u_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } u_p$ (*).

En appliquant maintenant l'égalité $\text{Id}_E = u_1 + \dots + u_p$ au vecteur $u_k(x)$, on obtient : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in E, u_k(x) = u_1 u_k(x) + \dots + u_p u_k(x)$ (**).

D'après (*), la décomposition d'un élément de $\text{Im } u_k$ se fait de manière unique dans $\oplus_{i=1}^p \text{Im } u_i$, d'où on déduit, avec (**) que $u_k(x) = u_k^2(x)$ et

$\forall \ell \neq k, u_k u_\ell(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en tire : $u_k = u_k^2$ et : $\forall \ell \neq k, u_k u_\ell = 0$. Les endomorphismes u_k sont donc des projecteurs, orthogonaux puisqu'ils sont autoadjoints.

Il nous reste à montrer que les $\text{Im } u_k$ sont orthogonaux entre eux deux à deux. Pour $k \neq \ell$, on a vu $u_k u_\ell = 0$, ce qui entraîne $\text{Im } u_\ell \subset \text{Ker } u_k$.

L'endomorphisme u_k étant un projecteur orthogonal, on a $\text{Ker } u_k = (\text{Im } u_k)^\perp$, donc $\text{Im } u_\ell \subset (\text{Im } u_k)^\perp$, ce qui prouve que $\text{Im } u_\ell$ et $\text{Im } u_k$ sont orthogonaux.

Ceci est vrai dès que le couple (k, ℓ) vérifie $k \neq \ell$, d'où le résultat.

Théorème 4.2.2 (Théorème spectral version matricielle) Pour toute matrice A symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que : $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Démonstration : Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. Ainsi u est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire usuel et il existe donc une base orthonormée $\mathcal{B}'$ qui diagonalise u . Ainsi on a : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$. Si on pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors D est diagonale et P est orthogonale en tant que matrice de passage d'une base orthonormée à une autre. Ainsi on a aussi $P^{-1} = P^T$.

Remarque 4.2.3 1. ATTENTION, ceci n'est valable que pour les matrices réelles. Si on prend

$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, elle est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable. En effet, on a :

$\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, donc si A est diagonalisable, alors il existe P dans $GL_2(\mathbb{C})$ tel que : $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, ce qui n'est pas le cas.

2. Pour trouver P en pratique, on cherche les sous-espaces propres de A , puis on trouve une base orthonormée de chaque sous-espace propre en utilisant éventuellement l'algorithme de Gram-Schmidt.
3. Quitte à échanger deux colonnes de P , on peut imposer que $\det(P) = 1$, soit $P \in SO_n(\mathbb{R})$.
4. En imitant les preuves précédentes, on peut montrer que toute matrice antisymétrique est ortho-

gonalement semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ \theta_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\theta_s \\ \theta_s & 0 \end{pmatrix} \\ & & & & 0_r \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.3 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$). Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 X^T X \leq X^T A X \leq \lambda_n X^T X$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}$ la base canonique. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$. Ainsi on a $X^T A X = (X|AX) = (x|u(x))$. De plus $X^T X = (x|x) = \|x\|^2$. On conclut grâce à l'exemple 4.2.2.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X = 0$. Montrer que $A = 0$.

4.3 Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques positifs, définis positifs

Définition 4.3.1 (Matrices ou endomorphismes positifs) 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0 \text{ (respectivement : } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A X > 0 \text{)}.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est autoadjoint positif (respectivement autoadjoint défini positif) si

$$\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0 \text{ (respectivement : } \forall x \in E \setminus \{0\}, (u(x)|x) > 0 \text{)}.$$

On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints positifs et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E autoadjoints définis positifs.

Remarque 4.3.1 1. (IMPORTANT) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . On a :
 $u \in S^+(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et de même : $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. (IMPORTANT) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice symétrique $A^T A$ est positive :

$A^T A$ est définie positive si et seulement si

3. (IMPORTANTE) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Nous avons vu que u^*u est autoadjoint. En faisant le lien entre matrice et application linéaire, u^*u est positif et il est défini positif si et seulement si u est bijectif.
4. Soit $u \in S^{++}(E)$. On peut montrer que $(x, y) \mapsto (u(x)|y)$ est un produit scalaire sur E (pour $x, y \in E$, on a $(u(x)|y) = (x|u(y)) = (u(y)|x)$, $(u(x)|x) \geq 0$ et $(u(x)|x) = 0 \Rightarrow x = 0$).
5. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut montrer que $(X, Y) \mapsto X^T A Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $X^T A Y =$

En effet :

Exemple 4.3.1 1. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (P|Q) = \int_{-1}^1 PQ$. On pose l'endomorphisme

$d : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On a vu dans l'exemple 4.1.1, que :

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (d(P)|P) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)(P'(x))^2 dx \geq 0$ et donc : $d \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}_n[X])$, mais $d \notin \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Soit $H = \left[\frac{1}{i+j} \right]_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que H est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.3.1 (Caractérisation spectrale de la positivité) 1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si : $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).

2. Soit $u \in S(E)$. Alors u est dans $S^+(E)$ (respectivement dans $S^{++}(E)$) si et seulement si : $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Démonstration :

- 1.

2. Faire le lien entre application linéaire et matrice.

Remarque 4.3.2 On a : $S^{++}(E) \subset GL(E)$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Pour les endomorphismes :

Exemple 4.3.2 1. Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes autoadjoints positifs, car un projecteur a un spectre dans $\{0, 1\}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Ainsi pour un projecteur orthogonal p , on a :

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $\|u\| = \sqrt{\|u^*u\|}$.

On a par stricte croissance de la fonction carrée :

$$\|u\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \right)^2 = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (u(x)|u(x)) = \sup_{\|x\|=1} (u(x)|u(x)) = \sup_{\|x\|=1} (u^*u(x)|x). \text{ Or } u^*u \text{ est dans } S^+(E), \text{ donc ses valeurs propres sont } 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p, \text{ puis grâce à l'exemple 4.3.1, on a : } \sup_{\|x\|=1} (u^*u(x)|x) = \lambda_p = \max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(u^*u)\} = \|u^*u\|.$$

3. Soit $u \in S^{++}(E)$. Montrer que : $\forall x \in E, \|x\|^4 \leq (x|u(x))(x|u^{-1}(x))$.

4. Soient $u, v \in S^+(E)$.

- (a) Soit $x \in E$ tel que : $(u(x)|x) = 0$. Montrer que : $x \in \text{Ker}(u)$.
- (b) Montrer que : $u + v \in S^+(E)$.
- (c) Montrer que $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.

Pour les matrices :

Exemple 4.3.3 1. Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et on pose $A_k = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq k}$.
Montrer que : $\det(A_k) > 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que : $\det(A) \leq \left(\frac{\text{tr}(A)}{n} \right)^n$.

3. Déterminer les matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 4I_2 = 0$.

4. (Racine carrée d'une matrice) Nous rappelons un résultat vu dans le chapitre 6 : soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables tels que : $uv = vu$. Alors u et v admettent une base commune de diagonalisation.

(a) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

(b) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres de A sans répétitions.

i) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$.

ii) En déduire que $(Q(A))^2 = A$.

(c) Montrer que B est unique.

(a)

(b) Nous avons vu cela dans le chapitre 6, mais rappelons la preuve.

$$i) \text{ Soit } \psi : \begin{cases} \mathbb{R}_{p-1}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ S & \mapsto & (S(\mu_1), \dots, S(\mu_p)) \end{cases} \quad .$$

C'est un isomorphisme, car

$S \in \text{Ker } \psi \Leftrightarrow S(\mu_1) = \dots = S(\mu_p) = 0 \Leftrightarrow S = 0$, car $d^\circ(S) \leq p-1$ et S admet au moins p racines. Comme $\dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p = \dim(\mathbb{R}^p)$, alors ψ est un isomorphisme. Il existe un (unique) polynôme $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\psi(Q) = (\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_p})$, soit :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}.$$

ii) Grâce à la question précédente, on a aussi : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

On reprend les notations de la première question. On pose $Q = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ et donc :

$$Q(A) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i (PDP^{-1})^i = \sum_{i=0}^{p-1} a_i PD^i P^{-1} = P \left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i D^i \right) P^{-1} = P(\text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)))P^{-1} = P(\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}))P^{-1} = B \text{ et } \text{donc } ((Q(A))^2 = A.$$

(c)

5. Applications de la racine carrée :

(a) (Décomposition polaire)

- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\exists (A, \Omega) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}), M = \Omega A$.
- Même question avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) (Réduction simultanée) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PP^T$ et $B = PDP^T$.

(c) Soient $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(AB) \geq 0$.

Première méthode : Il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = S^2$, puis $\text{tr}(AB) = \text{tr}(S^2B) = \text{tr}(SBS)$. Or SBS est symétrique et :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T SBSX = (SX)^T B(SX) \geq 0$. Donc SBS est dans $S_n^+(\mathbb{R})$, puis ses valeurs propres sont positives, donc :

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(SBS) \geq 0$.

Deuxième méthode :

6. Soient $n \geq 2$, $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On écrit $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$. Nous avons vu dans cet exemple que B est dans $S_p^{++}(\mathbb{R})$ et de même on montre que D est dans $S_{n-p}^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer que : $\det(A) \leq \det(B) \det(D)$.

B et D sont symétriques réelles, donc diagonalisables en base orthonormée, ce qui donne des matrices de passage orthogonales P et Q telles que $P^T B P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = D_1$ et $Q^T D Q = \text{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) = D_2$. Par hypothèse, tous les λ_i sont strictement positifs. On pose $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0^T & Q \end{pmatrix}$ et on vérifie que $R^{-1} = R^T$ puis que $U = R^T A R = \begin{pmatrix} D_1 & L \\ L^T & D_2 \end{pmatrix}$ où $L = P^T C Q$ est une matrice de même taille que C .

U est aussi dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, car : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T U X = (RX)^T A(RX) > 0$, car $RX \neq 0$ (R est inversible).

Il existe $V = [v_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $U = V D V^T$, avec $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i > 0$.

En regardant les coefficients diagonaux, on a : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \sum_{j=1}^n v_{i,j}^2 \mu_j$. Comme : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n v_{i,j}^2 = 1$, alors par concavité de $\ln$, on a :

$\ln(\lambda_i) \geq \sum_{j=1}^n v_{i,j}^2 \ln(\mu_j)$, puis : $\sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i) \geq \sum_{1 \leq i,j \leq n} v_{i,j}^2 \ln(\mu_j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n v_{i,j}^2 \right) \ln(\mu_j) = \sum_{j=1}^n \ln(\mu_j) = \ln \left(\prod_{j=1}^n \mu_j \right)$, puis $\det(U) = \prod_{j=1}^n \mu_j \leq \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Comme $\prod_{i=1}^n \lambda_i = (\det(P))^2 (\det(Q))^2 \det(B) \det(D) = \det(B) \det(D)$ et de même $\det(A) = \det(U)$, alors $\det(A) \leq \det(B) \det(D)$.