

1 Intégration des fonctions vectorielles

1.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Dans ce paragraphe $[a, b]$ désignera un segment de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux sur un segment) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction. On dit qu'elle est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = b$) telle que :

- pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la restriction $f_j = f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ soit continue ;
- pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on puisse prolonger f_j en une fonction $\tilde{f}_j$ continue sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

Lemme 1.1.1 (Fonctions continues par morceaux et fonctions coordonnées) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$,

où pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i le sont aussi.

Démonstration : • On suppose f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ une subdivision adaptée à f . Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc toutes ses fonctions coordonnées f_i le sont aussi. Par ailleurs $\lim_{a_j^+} f$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f$ existent, alors chaque fonction coordonnée

admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1} . Donc pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions $f_i|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolongent par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.

• On suppose que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i sont continues par morceaux sur $[a, b]$. On note σ_i une subdivision adaptée à f_i , pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit σ la réunion de toutes ces subdivisions. Cette subdivision étant plus fine que toutes les subdivisions σ_i , alors σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions f_i . On pose $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$. Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Toutes ses fonctions coordonnées f_i sont continues sur $]a_j, a_{j+1}[$, donc f l'est aussi. De plus $\lim_{a_j^+} f_i$ et $\lim_{a_{j+1}^-} f_i$ existent, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

donc f admet une limite à droite en a_j et à gauche en a_{j+1} . Ainsi $f|_{]a_j, a_{j+1}[}$ se prolonge par continuité sur $[a_j, a_{j+1}]$.

Lemme 1.1.2 (Intégration d'une fonction vectorielle sur une base) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, où pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, les fonctions f_i vont de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Le vecteur $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Démonstration : Soit $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ une autre base de E et on décompose f dans cette base :

$$f = \sum_{i=1}^n g_i u_i. \text{ On note } I = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i \text{ et } J = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b g_i(t) dt \right) u_i.$$

On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}} = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{U}$.

Définition 1.1.2 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux que l'on décompose suivant ses fonctions coordonnées : $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$. On appelle intégrale de

f sur $[a, b]$ le vecteur de E égal à $\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t) dt \right) e_i$.

Ce vecteur est noté $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque 1.1.1 1. Cette définition a un sens car l'intégrale de f sur $[a, b]$ ne dépend pas de la base choisie sur E grâce au lemme précédent.

2. Si $a > b$, on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_{[b,a]} f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

Exemple 1.1.1 Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux telle que : $\forall t \in [a, b], f(t) \in F$. Montrer que $\int_a^b f$ est dans F .

Proposition 1.1.1 (Linéarité) Soient f, g définies sur $[a, b]$ à valeurs dans E , et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.2 (Relation de Chasles) Soient $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux et $c \in]a, b[$. Alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Démonstration : C'est une conséquence de la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$, appliquée aux applications coordonnées.

Proposition 1.1.3 (Inégalité triangulaire) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux. Alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f(t) dt \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f(t)\| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| = (b-a) \|f\|_\infty.$$

Démonstration : Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow E$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ de $[a, b]$ telle que pour tout k de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ la fonction φ soit constante sur $]a_k, a_{k+1}[$.

On note $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i$. Si φ est en escalier, alors toutes les fonctions φ_i le sont sur $[a, b]$. En effet soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Alors la fonction φ est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$ et elle est égale à un vecteur v_k de E . On décompose $v_k = \sum_{i=1}^n v_{k,i} e_i$, alors : $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$, $v_k = \varphi(x)$, puis : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$ $v_{k,i} = \varphi_i(x)$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Ainsi les fonctions φ_i sont aussi en escalier.

Par conséquent σ est une subdivision adaptée à toutes les fonctions φ_i et donc en utilisant l'expression d'une intégrale pour une fonction en escalier à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a : $\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \varphi_i \right) e_i =$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_{k,i} \right) e_i = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \left(\sum_{i=1}^n v_{k,i} e_i \right) = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k.$$

Par ailleurs, la fonction $\|\varphi\|$ est en escalier : pour tout k de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$, sur $]a_k, a_{k+1}[$, elle est constante égale à $\|v_k\|$. Dans ce cas, on a :

$$\left\| \int_a^b \varphi \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) v_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{p-1} |a_{k+1} - a_k| \times \|v_k\| = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) \times \|v_k\| = \int_a^b \|\varphi\|, \text{ en utilisant}$$

la valeur de l'intégrale de la fonction en escalier $\|\varphi\|$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le résultat est donc vrai pour une fonction en escalier.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, avec $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe une fonction en escalier $\psi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $\psi : [a, b] \rightarrow E$ définie par $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i e_i$.

Sur E , on pose la norme N_1 définie par : $N_1\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Comme en est en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe α, β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\forall x \in E$, $\alpha \|x\| \leq N_1(x) \leq \beta \|x\|$.

$$\text{Ainsi : } \forall x \in E, \|f(x) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} N_1(f(x) - \psi(x)) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n |f_i(x) - \psi_i(x)| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|f_i - \psi_i\|_\infty \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha}.$$

On a donc : $\forall x \in E$, $\|\psi(x)\| = \|\psi(x) - f(x) + f(x)\| \leq \|\psi(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f(x)\|$.

De plus, grâce à l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on a pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq \int_a^b |f_i - \psi_i| \leq \varepsilon(b-a)$. Comme $\int_a^b (f - \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i - \psi_i \right) e_i$, alors :

$$N_1\left(\int_a^b (f - \psi)\right) = \sum_{i=1}^n \left| \int_a^b (f_i - \psi_i) \right| \leq n\varepsilon(b-a), \text{ puis : } \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha}.$$

$$\text{On a donc : } \left\| \int_a^b f \right\| = \left\| \int_a^b (f - \psi) + \int_a^b \psi \right\| \leq \left\| \int_a^b (f - \psi) \right\| + \left\| \int_a^b \psi \right\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|\psi\| \leq \frac{n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \left(\frac{n\varepsilon}{\alpha} + \|f\| \right) = \frac{2n\varepsilon(b-a)}{\alpha} + \int_a^b \|f\|.$$

Ceci étant vrai pour tout ε de $\mathbb{R}_+^*$, alors quand ε tend vers 0, on obtient : $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$.

Exemple 1.1.2 Soient E un espace euclidien et $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. On suppose que

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Montrer qu'il existe $e \in E$ unitaire tel que : $\forall t \in [a, b]$, $f(t) = \|f(t)\| e$.

Proposition 1.1.4 (Intégrale et application linéaire) Soient $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux, F un espace vectoriel normé de dimension finie et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$L \left(\int_a^b f \right) = \int_a^b L(f).$$

Démonstration : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F . On pose

$A = [a_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(L)$. On a $f = \sum_{j=1}^p f_j e_j$. On a donc :

$$L(f) = \sum_{j=1}^p f_j L(e_j) = \sum_{j=1}^p f_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j \right) u_i. \text{ Pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ l'application } a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j$$

est continue par morceaux, par combinaison linéaire et par définition de l'intégrale (qui ne dépend pas

de la base choisie), on a : $\int_a^b L(f) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p f_j \right) u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j \right) u_i$, par linéarité de

l'intégrale. D'autre part, on a :

$$L \left(\int_a^b f \right) = L \left(\sum_{j=1}^p \underbrace{\left(\int_a^b f_j \right)}_{\in \mathbb{K}} e_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j \right) L(e_j) = \sum_{j=1}^p \left(\int_a^b f_j \right) \sum_{i=1}^n a_{i,j} u_i = \sum_{i=1}^n \left(a_{i,j} \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j \right) u_i = \int_a^b L(f).$$

Théorème 1.1.1 (Convergence des sommes de Riemann) Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient R_n et R'_n les sommes de Riemann de f définies par :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \text{ et } R'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

Alors les suites $(R_n)_{n \geq 1}$ et $(R'_n)_{n \geq 1}$ des sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t) dt$:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

Démonstration : Appliquer le résultat vu en sup à chacune des fonctions coordonnées qui sont bien continues par morceaux.

Remarque 1.1.2 1. Pour conserver l'idée de limite de moyennes sur $[a, b]$, on peut écrire :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Pour faire apparaître une somme de Riemann, factorisez d'abord votre expression par $1/n$, puis essayer de trouver dans le $\sum$ une formule en k/n , ce qui vous permettra d'identifier votre fonction f et enfin, vous trouvez l'intervalle $[a, b]$.

Exemple 1.1.3 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Trouver un équivalent de $u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2n)^\alpha}$.

2. (**Théorème de Fubini**) Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

$$\text{Alors on a : } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

$$\text{On appliquera les sommes de Riemann à } F : x \mapsto \int_c^d f(x, t) dt.$$

Montrons que F est continue sur $[a, b]$.

- Soit $t \in [c, d]$, alors $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$.
- Soit $x \in [a, b]$, alors $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux que $[c, d]$.
- La fonction f est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$, donc elle y est bornée et donc $\forall (x, t) \in [a, b] \times [c, d]$, $|f(x, t)| \leq \|f\|_\infty$ et $t \mapsto \|f\|_\infty$ est continue sur $[c, d]$.

Ainsi F est continue sur $[a, b]$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On a : } \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n F\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_c^d \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}, t\right)}_{g_n(t)} dt. \text{ Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue par morceaux sur $[c, d]$.
- Grâce aux somme de Riemann, comme à t fixé, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue, alors (g_n) converge simplement vers $t \mapsto \int_a^b f(x, t) dx$ et on montre comme avant que cette fonction est continue sur $[c, d]$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [c, d]$. On a : $|g_n(t)| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty$ et $t \mapsto (b-a)\|f\|_\infty$ est continue par morceaux et intégrable sur $[c, d]$.

$$\text{Grâce au théorème de convergence dominée : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^d g_n(t) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

$$\text{Par ailleurs en appliquant les sommes de Riemann à la fonction continue } F, \text{ on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n F\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx$$

$$\text{et par unicité de la limite, on a : } \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

1.2 Primitives et intégrales

Dans ce paragraphe, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. On se fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1.2.1 Théorème fondamental de l'analyse

Définition 1.2.1 (Primitive) Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue. Une application $g : I \rightarrow E$ est une primitive de f si g est dérivable sur I et : $g' = f$.

Théorème 1.2.1 (Théorème fondamental de l'analyse) Soient $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$.

Alors l'application F de I dans E définie par : $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est f . L'application F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Démonstration : Si on écrit $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$, avec $f_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ les fonctions coordonnées, alors :

$\forall x \in I, \int_a^x f(t)dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^x f_i(t)dt \right) e_i$. Comme f est continue sur I , alors toutes les fonctions coordonnées le sont, puis en appliquant le théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on obtient : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in I, \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f_i(t)dt \right) = f_i(x)$. Grâce aux résultats sur les dérivées des fonctions vectorielles, on a donc $\forall x \in I, \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t)dt \right) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i = f(x)$.

Ainsi F est une primitive de F .

Soit G une primitive de f s'annulant en a . On a sur I : $(G - F)' = f - f = 0$. Donc $G - F$ est constante, mais comme $(G - F)(a) = 0$, alors $G - F = 0$, puis $F = G$.

Remarque 1.2.1 1. (IMPORTANT) Soit $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.

2. (IMPORTANT) Si 0 est dans I , alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0)$, avec $F : x \mapsto \int_0^x f$ qui est une primitive de f .

Exemple 1.2.1 Soit $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (GL_n(\mathbb{C}), \times)$ un morphisme de groupes continu. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tA}$.

On montrera d'abord qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\int_0^\eta \varphi(t)dt \in GL_n(\mathbb{R})$.

Comme $t \mapsto \varphi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition, alors $\psi : \alpha \mapsto \int_0^\alpha \varphi(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (l'espace d'arrivée est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie) et : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \psi'(\alpha) = \varphi(\alpha)$. En particulier :

$\varphi(0) = \psi'(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(0))$. Comme $\psi(0) = 0$ et $\varphi(0) = I_n$, car φ est un morphisme de groupe, alors : $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \varphi(t)dt = I_n$.

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C}) = (\det)^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (image réciproque d'un ouvert par une application continue). Comme I_n est dans $GL_n(\mathbb{C})$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$B(I_n, r) \subset GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi grâce à la question précédente, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$\forall \alpha \in]0, \eta], \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \varphi(t)dt \in B(I_n, r)$. Ainsi : $\frac{1}{\eta} \psi(\eta)$ est dans $GL_n(\mathbb{C})$, puis $\psi(\eta)$ aussi.

$\int_0^\eta \varphi(u+t)du = \int_0^\eta \varphi(u)\varphi(t)du = \left(\int_0^\eta \varphi(u)du \right) \varphi(t) = \psi(\eta)\varphi(t)$, car l'application $f : M \mapsto M\varphi(t)$ est linéaire, donc $\int_0^\eta f(\varphi(u))du = f\left(\int_0^\eta \varphi(u)du\right)$.

Par ailleurs, en effectuant le changement de variable $v = t + u$, on a :

On a : $\int_0^\eta \varphi(t+u)du = \int_t^{t+\eta} \varphi(v)dv = \psi(\eta+t) - \psi(t)$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \psi(\eta)^{-1} (\psi(\eta+t) - \psi(t))$.

Comme l'application $t \mapsto \psi(\eta+t) - \psi(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $M \mapsto \psi(\eta)^{-1}M$ est linéaire, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on dérive la relation précédente, on a :

$\varphi'(t) = \psi(\eta)^{-1} (\psi'(\eta+t) - \psi'(t)) = \psi(\eta)^{-1} (\varphi(\eta+t) - \varphi(t)) = \psi(\eta)^{-1} (\varphi(\eta)\varphi(t) - \varphi(t)) = \psi(\eta)^{-1} (\varphi(\eta) - I_n) \varphi(t) = A\varphi(t)$, avec

$A = \psi(\eta)^{-1} (\varphi(\eta) - I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère L l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), L(M) = AM$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = L(\varphi(t))$.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tL}(\varphi(0)) = e^{tL}(I_n)$.

On a : $e^{tL}(I_n) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k}{k!} \right) (I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k(I_n)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k I_n}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = e^{tA}$ (on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), L^k(U) = A^k U$).

On a pu écrire $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k}{k!} \right) (I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k(I_n)}{k!}$, car l'application $g : u \mapsto u(I)$ est linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ et donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} g \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k L^k}{k!} \right) = g \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k}{k!} \right)$.

soit :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{t^k L^k(I_n)}{k!} \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k L^k}{k!} \right) (I_n).$$
Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tA}$.

1.2.2 Applications

a) Inégalité des accroissements finies

Théorème 1.2.2 (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \overset{\circ}{I}, \|f'(x)\| \leq M$.

Alors : $\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$.

Démonstration : Soient $a, b \in \overset{\circ}{I}$. Grâce à la remarque 1.2.1, on a :

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_{I(a,b)} \|f'\| \leq \int_{I(a,b)} M = M|b - a|, \text{ avec } I(a, b) = [a, b] \text{ si } a \leq b \text{ et } I(a, b) = [b, a] \text{ sinon.}$$

Exemple 1.2.2 1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|$.

2. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $g : U \rightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in U, \|dg(x)\| \leq K$ (on rappelle que : $dg(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$). Montrer que g est K -lipschitzienne.

b) Intégration d'une limite uniforme

Proposition 1.2.1 (Intégration d'une limite uniforme sur un segment) 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$u_n : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u . Alors la fonction u est continue sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b u_n = \int_a^b u.$$

2. Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n : I \rightarrow E$ continue. On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u . Alors la fonction u est continue sur I et si on pose $U_n : x \mapsto \int_a^x u_n$ et $U : x \mapsto \int_a^x u$, alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I .

Démonstration : La démonstration est identique à celle sur les suites de fonctions (chapitre 8) à valeurs dans $\mathbb{K}$, sauf que l'on remplace les valeurs absolues par des normes.

Corollaire 1.2.1 (Primitivation terme à terme sur un segment) 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$f_n : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. Si $\sum f_n$ est une série de fonctions qui converge uniformément ou normalement sur le segment $[a, b]$, alors la série $\sum \int_a^b f_n$ converge et :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \rightarrow E$ une fonction continue, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I . Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I et : $\forall x \in I, \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt$.

Démonstration : Calquer la preuve du chapitre 8.

Exemple 1.2.3 Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On munit $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ matricielle vérifiant : $\forall U, V \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|UV\| \leq \|U\| \cdot \|V\|$ (cela existe toujours en considérant une norme subordonnée).

1. Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(Re^{i\theta}I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ et que son inverse est la matrice $(Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n$.

2. Montrer que tout R assez grand, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta = A^{n-1}$.

3. On considère la polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(XI_d - A) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Montrer que pour

$$R \text{ assez grand : } \chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta}) \chi_A(Re^{i\theta}) (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} d\theta.$$

4. En déduire que $\chi_A(A) = 0$.

1. Le résultat est évident si $A = 0$. On suppose donc $A \neq 0$. Soit $R > \|A\|$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note $z = Re^{i\theta} \neq 0$. De plus, $\|\frac{1}{z}A\| = \frac{1}{R}\|A\| < 1$.

On a : $zI_d - A = z(I_d - \frac{1}{z}A)$. On a vu dans le chapitre 7 que dans ce cas $I_d - \frac{1}{z}A$ est inversible et $(I_d - \frac{1}{z}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}A\right)^n$.

Ainsi $zI_d - A$ est inversible d'inverse $\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} A^n$. On a bien pour $R > \|A\|$:

$$(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n.$$

2.

3.

4.

c) Problème de Cauchy pour les équations différentielles

Proposition 1.2.2 (Problème de Cauchy sous forme intégrale) Soient $(t_0, x_0) \in I \times E$ et deux applications continues $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$. Une application φ est une solution du problème de Cauchy :

$$(E) : x' = a(t).x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

si et seulement si, elle satisfait l'équation intégrale :

Démonstration :

Exemple 1.2.4 1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Résoudre le système différentiel : $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

2. Soient $T \in \mathbb{R}_+^*$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T -périodiques de $x' = ax + b$.

L'ensemble des solutions est $\{e^{F(\lambda + G)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, avec $F : t \mapsto \int_0^t a(u)du$ et $G : t \mapsto \int_0^t b(u)e^{-F(u)}du$.

Dans le chapitre 14, on a vu que x est T périodique ssi $x(0) = x(T)$.

Si on reprend la forme des solutions trouvée avant x est T périodique ssi

$e^{F(0)}(\lambda + G(0)) = e^{F(T)}(\lambda + G(T))$ ce qui équivaut à $\lambda = e^{\int_0^T a}(\lambda + G(T))$, soit $(1 - e^{\int_0^T a})\lambda = e^{\int_0^T a}G(T)$.

Ici commence une discussion.

- Si $\int_0^T a \neq 0$, alors $\lambda = \frac{e^{\int_0^T a}G(T)}{1 - e^{\int_0^T a}}$ et il n'y a qu'une seule solution T -périodique.
- Si $\int_0^T a = 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du \neq 0$, il n'y a aucune solution T -périodique.
- Si $\int_0^T a = 0$ et $G(T) = \int_0^T b(u)e^{-F(u)}du = 0$, toutes les solutions sont T -périodiques.

Remarque 1.2.2 Cette formulation a un intérêt plutôt théorique et sert par exemple à montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Donnons la démonstration de ce théorème qui n'est pas exigible.

Pour $(t, x) \in I \times E$, on pose : $f(t, x) = a(t).x + b(t)$. On définit par récurrence la suite de fonction

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant : $\varphi_0 : t \mapsto x_0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s))ds$, définie sur I . Comme

a est continue et la composition $(u, y) \mapsto u(y)$ de $\mathcal{L}(E) \times E$ dans E l'est aussi car on est en dimension finie, alors on montre par récurrence que toutes les fonctions φ_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Soit $K = [a, b]$ tel que : $t_0 \in K \subset I$. On pose $h = b - a > 0$. L'ensemble K est une partie compacte, donc les fonctions continues a et $t \mapsto f(t, x_0)$ y sont bornées. Soit $k = \sup_{t \in K} \|a(t)\|$ et $M = \sup_{t \in K} \|f(t, x_0)\|$. On

a : $\forall (t, x_1, x_2) \in K \times E \times E$, $\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| = \|a(t).(x_2 - x_1)\| \leq \|a(t)\| \cdot \|x_2 - x_1\| \leq k \|x_2 - x_1\|$ (*).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\mathcal{P}(n) : \forall t \in K$, $\|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq \frac{Mk^{n-1}}{n!} |t - t_0|^n$.

$\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, car : $\forall t \in K$, $\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x_0)ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_0)\|ds \right| \leq M|t - t_0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $t \in K$. On a :

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))]ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))\|ds \right|.$$

Par (*), on a donc :

$$\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \left| k \int_{t_0}^t \|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{Mk^n}{n!} |s - t_0|^n ds \right|,$$

grâce à $\mathcal{P}(n)$.

Si on a $t \geq t_0$, alors $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{Mk^n}{n!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds = \frac{Mk^n}{n!} \cdot \frac{(t - t_0)^{n+1}}{n+1} = \frac{Mk^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}$.

Si on a $t \leq t_0$, alors $\|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{Mk^n}{n!} \int_t^{t_0} (t_0 - s)^n ds = \frac{Mk^n}{n!} \cdot \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{n+1} = \frac{Mk^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}$.

On a donc $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Par conséquent, comme pour t dans K , on a $|t - t_0| \leq h$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in K, \|\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\| \leq Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}.$$

Montrons que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément. La suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$ converge pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, K}$. Nous venons de voir que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\varphi_n - \varphi_{n-1}\|_{\infty, K} \leq Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}$. Cela prouve même la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$,

car la série $\sum_{n \geq 1} Mh \frac{(kh)^{n-1}}{n!}$ converge vers $\frac{M}{k} e^{kh}$ si $k \neq 0$ et converge clairement si $k = 0$.

Soit φ la limite de la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui est aussi continue par convergence uniforme et continuité de φ_n .

Montrons maintenant que φ est bien solution du problème de Cauchy initial.

Tout d'abord, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_n(t_0) = x_0$, donc en passant à la limite : $\varphi(t_0) = x_0$.

Soit $t \in I$. On prend $K = [t_0, t]$ ou $K = [t, t_0]$. Par (*), on a :

$\forall s \in K, \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_n(s))\| \leq k \|\varphi(s) - \varphi_n(s)\| \leq k \|\varphi - \varphi_n\|_{\infty, K}$. Ainsi la suite de fonctions $(s \mapsto f(s, \varphi_n(s)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ sur le segment K et donc comme

toutes ces fonctions sont continues, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$.

Or on a : $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds$, donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a :

$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. Ceci prouve d'une part la dérivabilité de φ sur I , mais aussi que φ est solutions de $x' = a(t).x + b(t)$, grâce à la proposition précédente.

Montrons maintenant l'unicité.

Supposons qu'il existe une fonction ψ dérivable, telle que $\psi(t_0) = x_0$ et que : $\forall t \in I, \psi'(t) = f(t, \psi(t))$.

Soit $t \in I$. On pose $K = [t_0, t]$ ou $K = [t, t_0]$. Soit $b = \sup_{s \in K} \|\psi(s) - x_0\|$ (la continuité de ψ et le caractère compact de K justifiant l'existence de b). Grâce à la proposition précédente,

$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$. En procédant comme précédemment, on montre par récurrence (ici

on commence à $n = 0$) que : $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \|\psi(t) - \varphi_n(t)\| \leq b \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!}$. Comme la série $\sum \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!}$ converge (sa somme est $\exp(k|t - t_0|)$), alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(k|t - t_0|)^n}{n!} = 0$, puis : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \psi(t)$, donc : $\varphi(t) = \psi(t)$.

d) Intégration le long d'une courbe

Proposition 1.2.3 (Intégration le long d'une courbe) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient U un ouvert de E , F un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie et $f : U \rightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toute application $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt =$$

Démonstration : Soit $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))$ définie sur $[0, 1]$. Cette application est $\mathcal{C}^1$, par composition et la règle de la chaîne donne : $\forall t \in [0, 1], \varphi'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t))$, puis $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt$.

Remarque 1.2.3 Si γ est de la forme $t \mapsto a + tv$, avec $v = b - a$, alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a + tv).v dt$.

1.3 Formules de Taylor

1.3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 1.3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $a \in I$.

Alors pour tout point $x \in I$, on a :

$$f(x) =$$

Démonstration : Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors ses fonctions coordonnées le sont aussi et donc la formule s'obtient en appliquant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ aux fonctions coordonnées de f .

Remarque 1.3.1 1. La quantité $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ est appelée *reste intégrale* et permet de mesurer exactement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a .

2. Cette formule est vraie sur I tout entier, c'est donc une propriété globale.

Exemple 1.3.1 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que toutes les dérivées de f sont positives.

On pose $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(ux) du$, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0, a[$.

1. Soient x et y tels que l'on ait $0 \leq x < y < a$. Montrer que l'on a : $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0; a[$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

Corollaire 1.3.1 (Formule de Taylor pour les polynômes) Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a :

$$A = \sum_{k=0}^n \frac{(X-a)^k}{k!} A^{(k)}(a) \quad \text{ou} \quad A(X+a) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} A^{(k)}(a).$$

Exemple 1.3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et H un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que : $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X], \sum_{i=0}^n \lambda_i P^{(i)}(0) = 0\}$.

1.3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 1.3.1 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ telle que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur I . Alors :

$$\forall a, b \in I, \left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq$$

Démonstration : • Si $a = b$, c'est clair.

• Si $a < b$, alors en reprenant la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral :

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt.$$

Par croissance de l'intégrale, cette dernière est majorée par $\int_a^b \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-t)^n}{n!} dt = \|f^{(n+1)}\|_\infty \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

• Calcul analogue pour $a > b$ en intervertissant les bornes des intégrales majorantes.

Remarque 1.3.2 L'inégalité de Taylor-Lagrange est une formule globale vraie sur tout l'ensemble de définition. Elle permet de majorer simplement l'erreur commise lorsque l'on approche $f(x)$ par son polynôme de Taylor en a .

Exemple 1.3.3 1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}} \right) \right) - n$, pour n dans $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$ telle que $\|f\|$ et $\|f''\|$ soient majorées respectivement par M_0 et M_2 .

(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}_+^*, \|f'(x)\| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.

(b) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Donner un développement asymptotique en $1/n$ de

$$u_n = \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pose $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } u_n = F(1) - F(0) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F'\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(F\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k-1}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^3$, alors grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\forall k \in [1, n], F\left(\frac{k-1}{n}\right) = F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} F'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} F''\left(\frac{k}{n}\right) + \varepsilon_{n,k}, \text{ avec :}$$

$$|\varepsilon_{n,k}| \leq \frac{1}{6n^3} \sup_{\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]} |F^{(3)}| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |f^{(3)}|}{6n^3} = \frac{M}{n^3}.$$

$$\text{On a donc } u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) + \varepsilon_{n,k}\right) = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n,k}.$$

$$\text{Or } \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n,k} \right| \leq n \times \frac{M}{n^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De plus comme f' est continue, alors grâce aux sommes de Riemann, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f'(t)dt + o(1) = f(1) - f(0) + o(1).$$

$$\text{Ainsi } u_n = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1.3.3 Formule de Taylor-Young

Proposition 1.3.2 (Formule de Taylor-Young) Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en $a \in I$, donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

Démonstration : Démontrons cela par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, alors f étant dérivable admet un développement limité à l'ordre un, ce qui donne :
 $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat au rang n .

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$. On pose $\psi : x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (on a $n+1 \geq 1$).

On applique l'hypothèse de récurrence à f' qui est de classe $\mathcal{C}^n$, donc il existe $\beta : I \rightarrow E$ tel que $\lim_a \beta = 0$ et :

$$\forall x \in I, f'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + (x-a)^n \beta(x).$$

Autrement dit : $\forall x \in I, \psi'(x) = (x-a)^n \beta(x)$.

Soient $a, x \in I$ et on note $I(a, x) = [a, x]$, si $a \leq x$ et $I(a, x) = [x, a]$ sinon. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à ψ sur le segment $[a, x]$ (sur ce compact, ψ' est continue donc bornée) :

$$\|\psi(x) - \psi(a)\| \leq |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|\psi'(t)\| = |x-a| \sup_{t \in I(a,x)} \|(t-a)^n \beta(t)\| \leq |x-a|^{n+1} \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|.$$

$$\text{Ceci donne : } \frac{1}{|x-a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \sup_{t \in I(a,x)} \|\beta(t)\|.$$

Montrons que $\lim_{x \rightarrow a} \sup_{t \in I(a, x)} \|\beta(t)\| = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \rightarrow a} \beta = 0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in I, |t - a| \leq \alpha \Rightarrow \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Soit $x \in I$, tel que : $|x - a| \leq \alpha$. Ainsi pour t dans $I(a, x)$, on a : $|t - a| \leq \alpha$, donc $\|\beta(t)\| \leq \varepsilon$, ce qui donne $\sup_{t \in I(a, x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

On a donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow \sup_{t \in I(a, x)} \|\beta(t)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x - a|^{n+1}} \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| = 0$ et donc :

$f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = o((x - a)^{n+1})$, d'où le résultat pour $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 1.3.3 1. La formule de Taylor-Young est une propriété locale, car elle donne un comportement quand x tend vers a .

2. Dans le cas réel, on a la formule de Taylor-Lagrange : soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n . Alors il

existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$.

Soit $A = \frac{n!}{(b - a)^n} \left(f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right)$. Nous allons montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f^{(n)}(c)$.

Soit $\phi : x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b - x)^k - \frac{(b - x)^n}{n!} A$.

La fonction ϕ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\phi(a) = 0$, par construction de A et $\phi(b) = 0$. Grâce au théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\phi'(c) = 0$.

Or : $\forall x \in [a, b], \phi'(x) = -f'(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{(b - x)^{k-1}}{(k - 1)!} f^{(k)}(x) + \frac{(b - x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) \right) - \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!} A =$

$-f'(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(b - x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b - x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!} A = \frac{(b - x)^{n-1}}{(n - 1)!} (A - f^{(n)}(x))$, puis $A = f^{(n)}(c)$, car $\phi'(c) = 0$.