

À rendre pour le jeudi 10 septembre

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On se donne une application $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f \in E} J(f)$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum. On note $E_{a,b}^k$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y .

A. Un lemme de du Bois-Reymond

1. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et représenter son graphe. Écrire les codes PYTHON qui vous permettraient de représenter h sur $[-2, 2]$. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout $x \in]x_0, x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.
3. Soit $F \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 F(x)u(x)dx = 0$ pour tout $u \in E_{0,0}^2$. Démontrer qu'alors F est nulle.

B. Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E_{a,b}^2$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P(f(x)) + Q(f'(x)) \right] dx$$

où $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes fixés.

Soit $f_0 \in E$. On se propose de prouver que si $J(f_0) \leq J(f)$ pour tout $f \in E$, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit $u \in E_{0,0}^2$.

1. Montrer que l'application q définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ de nombres réels telle que

$$q(t) = \sum_{k=0}^r a_k t^k \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \text{ Montrer que } a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x)]dx.$$

2. On suppose que pour tout $f \in E$, $J(f_0) \leq J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P'(f_0(x)) = \frac{d}{dx} \left[Q'(f_0'(x)) \right] \quad (\Delta)$$

3. *Premier exemple.* On choisit $E = E_{0,1}^2$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.

- a.** Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E_{0,1}^2$.
- b.** Montrer que J_1 admet un minimum sur $E_{0,1}^2$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E_{0,1}^2$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

4. *Deuxième exemple.* On choisit $E = E_{0,0}^2$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^3 dx$$

- a.** Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E_{0,0}^2$.
- b.** Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E_{0,0}^2$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par la formule $f(x) = x^2(1 - x)$.)

C. Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, que l'on note L^2 .

On pose également, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin \left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

Dans les deux questions suivantes, on considère $f \in E$.

- 1.** Montrer que le produit $f f''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend *pas* vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- 2.** En déduire que $f' \in L^2$, puis que $f(x)f'(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 + \left(f''(x)\right)^2 \right] dx$$

- 3.** Montrer que pour tout $f \in E$ et tout réel $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 + \left(f''(x)\right)^2 \right] dx \\ = \int_0^A \left[f(x) + f'(x) + f''(x) \right]^2 dx + \left(f(0) + f'(0)\right)^2 - \left(f(A) + f'(A)\right)^2 \end{aligned}$$

Quel est le comportement de $\left(f(A) + f'(A)\right)^2$ lorsque $A \rightarrow +\infty$? En déduire que la fonction J admet un minimum au point $\lambda\Psi$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 4.** Déterminer toutes les fonctions $f_0 \in E$ telles que $J(f_0) = \min_{f \in E} J(f)$

D. Application: une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout $g \in L^2$, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (g(x))^2 dx}$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$\|f'\|^2 \leq 2\|f\| \cdot \|f''\|$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f\mu) \geq 0$, pour *tout* réel $\mu > 0$.

2. Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.