À rendre pour le jeudi 1er octobre

PROBLÈME 1

Notations et définitions

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites (u_n) convergentes telles que :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geq N,\ u_k \neq \lim_{n\to+\infty} u_n$$

- À toute suite (u_n) appartenant à E et de limite égale à ℓ, on associe la suite (u_n^c) définie à partir d'un certain rang par :

$$u_n^c = \left|\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell}\right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments (u_n) de E tels que (u_n^c) soit convergente ;
- Soit (u_n) une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de (u_n^c) ; on dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) est :
  - lente si $\ell^c = 1$,
  - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0,1[$,
  - rapide si $\ell^c = 0$;
- Soit (u_n) une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ, et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite (u_n) vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\dfrac{u_{n+1}-\ell}{|u_n-\ell|^r}$ est bornée ;
- On rappelle qu'une suite (u_n) est stationnaire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

A. Des résultats généraux

1. Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

2. L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

3. Montrer que E^c est strictement inclus dans E.

4. Soit (u_n) un élément de E^c. Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0,1]$.

B. Exemples de calcul de vitesse de convergence

1. Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les suites $\left(\dfrac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}$. Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

3. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x} \mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E.

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

4. Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

C. Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

1. Soit (u_n) un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r, où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite (u_n) est rapide.

2.

a. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est un élément de E. On note s la limite de cette suite.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \dfrac{2}{(n+1)!}$.

c. En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.

d. Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r.

3. On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ.

a. Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b. Montrer que si la suite (u_n) n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c. Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c. Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors (u_n) est stationnaire.

d. Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^r$ sur I et que la suite (u_n) n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r si et seulement si pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

PROBLÈME 2

Étant donnée une suite réelle (a_n), on associe à tout couple (u_0, u_1) de nombres réels la suite réelle (u_n) définie à partir de ses deux valeurs initiales u_0 et u_1 par la relation $(\mathcal{R})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + a_{n-1}u_{n-1}.$$

Partie I. Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. On suppose dans les trois questions suivantes que la suite (a_n) est à termes positifs et que : $u_0 \geq 0$ et $u_1 > 0$.

a. Étudier, pour $n \geq 1$, le sens de variation de la suite (u_n).

b. Établir, pour $n \geq 2$, l'inégalité $u_{n+1} \leq u_n \exp(a_{n-1})$.
En déduire que si la série $\sum a_n$ converge, alors la suite (u_n) converge aussi.

c. Établir réciproquement que si la suite (u_n) converge, alors la série $\sum a_n$ est convergente.

2. Dans les deux questions suivantes, on suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument et on considère la suite (v_n) définie par $v_0 = |u_0|$, $v_1 = |u_1|$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}|v_{n-1}$.

a. Comparer $|u_n|$ et v_n.

b. Étudier la convergence absolue de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et la convergence de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a^n$, avec a un réel dans $]0, 1[$, et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle. Déterminer un équivalent de $u_{k+1} - u_k$ et en déduire un équivalent de $L - u_n$.

4. Dans les trois questions suivantes, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et que la limite L de la suite (u_n) est non nulle.

a. Prouver que $L - u_n \sim \dfrac{L}{n}$.

b. On définit la suite (ε_n) en posant pour $n \geq 1$: $u_n = L - \dfrac{L}{n} + \varepsilon_n$.
Montrer que $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \sim -\dfrac{L}{n(n+1)(n+2)}$, puis trouver un équivalent de ε_n, et en déduire le développement asymptotique à l'ordre 2 de u_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$.

c. Écrire une fonction PYTHON `u(n,a,b)` qui renvoie les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans une liste, avec $u_0 = a$ et $u_1 = b$. En prenant $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ et en calculant les 1000 premiers termes de la suite, estimer L à 10^{-2} près. Représenter sur un graphique les termes de cette suite.

Partie II.Étude des suites (u_n) de limite nulle

Dans cette partie, on suppose les a_n strictement positifs pour tout n de $\mathbb{N}$ et la série $\sum a_n$ convergente. Toute suite (u_n) de premier termes u_0 et u_1, et définie par la relation $(\mathcal{R})$ est donc convergente. On note $L(u_0, u_1)$ sa limite (qui existe grâce à la question **I.2.b.**).

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \dfrac{a_n}{1+x} \end{array} \right.$$

et $g_n = f_0 \circ f_1 \circ ... \circ f_n$ et on pose $p_n = g_n(0)$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_m = 0$, alors $L(u_0, u_1)$ est non nul.

2. On dira que la suite (u_n) est alternée si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n u_{n+1} < 0$. Montrer que $L(u_0, u_1) = 0$ si et seulement si la suite (u_n) est alternée.

3. On suppose dans les trois questions suivantes que $L(u_0, u_1) = 0$, donc que la suite est alternée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n = -\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $0 < r_n < a_n$.

b. En déduire que la suite (r_n) converge vers une limite que l'on précisera.

c. Étudier enfin a convergence des séries $\sum r_n$, $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$.

4. Montrer que f_n et g_n sont monotones, dérivables, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |g_n'(x)| \leq a_0 a_1 ... a_n.$$

En déduire que, : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 ... a_n$.

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, r_0 est compris entre p_{n-1} et p_n (on pourra comparer $g_{n-1}(r_{n-1})$, $g_{n-1}(a_n)$ et $g_{n-1}(0)$).
En déduire que r_0 est limite de (p_n).