

À rendre pour le mardi 13 octobre

Dans ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

- $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures.
- $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des matrices réelles triangulaires inférieures ayant des coefficients diagonaux égaux à 1.

Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_i(\mathbb{R})$.

1. **a.** Montrer que si une matrice inversible A est dans $T_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $T_n^-(\mathbb{R})$), alors A^{-1} reste dans $T_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement dans $T_n^-(\mathbb{R})$).
b. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a.** Montrer que si A est inversible, alors il existe au plus un couple (L, U) de $\mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tel que l'on ait : $A = LU$.

Lorsqu'une telle décomposition est possible, on dit que A admet une décomposition LU .

- b.** Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU , alors pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\det(A_k) \neq 0$ (on pourra utiliser une décomposition par blocs de A).
- c.** On suppose que : $\det(A_{n-1}) \neq 0$ et on écrit A par blocs sous la forme : $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & a_{nn} \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe H dans $\mathcal{L}_n$ telle que tous les coefficients en position (n, i) de HA soient nuls, pour i dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
En posant à priori $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$, expliciter une telle matrice H ainsi que son inverse (on explicitera les blocs H_{n-1} et H' , ainsi que les blocs correspondant à H^{-1} en fonctions des blocs de la matrice A).
- d.** Montrer que si pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A_k)$ est non nul, alors A possède une décomposition LU (on pourra raisonner par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de A).

3. **a.** Soit $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $p < q$. Montrer que l'opération élémentaire qui consiste à échanger les lignes p et q d'une matrice réelle correspond à la multiplication à gauche par une matrice réelle que l'on déterminera.

b. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. On désigne par

$$\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}_A \text{ le déterminant de la matrice } \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}. \text{ Par exemple :}$$

$$\det(A_i) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & i \\ 1 & 2 & \cdots & i \end{bmatrix}_A.$$

Sous les hypothèses de la question **2.d**) et en notant $A = LU$ la décomposition de LU de A , trouver dans l'ordre :

1. la première ligne de U ,
2. la première colonne de L ,
3. les éléments diagonaux de U ,
4. les éléments de L des colonnes $2, 3, \dots, n$ (on utilisera la question **3.a**) sous la forme $PA = PLU$ où P est une matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute deux lignes de M),
5. les éléments de U des lignes $2, 3, \dots, n$.

On montrera que si $L = [l_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ et $U = [u_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, alors pour $2 \leq j \leq i \leq n$, on a :

$$l_{ij} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j \\ 1 & 2 & \cdots & j \end{bmatrix}_A} \text{ et on donnera le même type de formule pour } u_{ij} \text{ avec :}$$

$$2 \leq i \leq j \leq n.$$

4. À l'aide de l'algorithme de la question **3.b**), écrire un algorithme en PYTHON donnant la décomposition LU d'une matrice (on supposera que la fonction déterminant est connue en Python et qu'elle se nomme `det`).

5. a. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On veut résoudre le système $AX = Y$ et on suppose que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\det(A_k) \neq 0$. En utilisant la factorisation LU , montrer qu'il suffit de $n(n-1)$ multiplications pour résoudre le système $AX = Y$ (on ne tiendra pas compte des opérations nécessaires pour effectuer la factorisation LU).

b. En déduire une méthode pour inverser la matrice A en utilisant la factorisation LU .

On admet que l'on peut trouver un algorithme permettant d'obtenir la factorisation LU avec $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ multiplications. Exprimer le nombre total de multiplications nécessaires à cette inversion, incluant cette fois-ci la factorisation LU . En admettant que le nombre r_n de divisions dans la méthode précédent vérifie $r_n = O(n^2)$, donner un équivalent du nombre de multiplications/divisions nécessaires pour la résolution du système $AX = Y$ avec cette méthode lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\text{c. Appliquer cet algorithme pour résoudre à la main le système : } \begin{cases} x + y + 3z + t = a \\ x + 2y + z + 3t = b \\ y - z + 2t = c \\ x - y + 2z + t = d \end{cases},$$

avec a, b, c, d des réels fixés.

6. On rappelle la convention $\binom{p}{q} = 0$, si $p < q$ ou $p < 0$ ou $q < 0$.

a. Soient p, q, r des entiers naturels. Montrer que $\binom{p+q}{r} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k}$ (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

- b.** Soit $p \in \mathbb{N}$; déterminer la décomposition LU de la matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{i,j} = \binom{p+j-1}{i-1}$. En déduire $\det(A)$.
Écrire A, L, U lorsque $p = 1$ et $n = 4$.

7. Soit A une matrice tridiagonale : $A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$.

- a.** On pose $\delta_k = \det(A_k)$. On suppose que pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\delta_k \neq 0$. Calculer δ_1 puis, pour k dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, montrer que $\delta_k = b_k \delta_{k-1} - c_{k-1} a_k \delta_{k-2}$.

- b.** Montrer que les matrices L et U de la factorisation LU de A sont de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & 0 \\ & l_{32} & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & l_{n-1,n-2} & 1 & \\ & & & & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & & \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & b_2 & c_2 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} & b_n \end{pmatrix},$$

avec pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ la relation : $l_{i,i-1} = a_i \frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}}$.

- 8.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a.** i. Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$V^T A_n V = v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^n (v_i - v_{i-1})^2.$$

- ii. En déduire que A_n est inversible.
iii. Montrer (sans l'expliciter) que A_n admet une factorisation $A_n = L_n U_n$.

- b.** On reprend les notations de la question 7.. Expliciter et résoudre la relation de récurrence sur δ_k . En déduire l'expression des matrices L_n et U_n .
- c.** On veut résoudre le système $A_n X = E_k$, avec E_k le k -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Résoudre le système $L_n Y = E_k$.
 - Résoudre le système $U_n X = Y$.
- (On montrera que $x_i = \frac{i(n+1-k)}{n+1}$, si $i \leq k$ et $x_i = \frac{k(n+1-i)}{n+1}$, si $i \geq k$).
- d.** On pose $A_n^{-1} = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$. Expliciter les coefficients $b_{i,j}$, pour i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.