

À rendre pour le jeudi 5 novembre

I-Étude de l'inversibilité d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$ qui est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On pose $B_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$

dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $c_0 = 1$ et $c_1 = 4$ et pour n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $c_n = \det(C_n)$ et $b_n = \det(B_n)$ et enfin pour n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$, on pose $a_n = \det(A_n)$.

- a. Expliciter les termes de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b. Expliciter les termes de la suite $(b_n)_{n \geq 2}$.
- c. Expliciter les termes de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$.
- d. En déduire que A_n est inversible pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $Y = AX$ et on note $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- a. Soit $r = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ et $m = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}$.
Montrer que : $r \leq m$.
- b. En déduire que A_n est inversible.

3. On rappelle qu'une transvection sur les lignes est l'opération élémentaire sur une matrice qui consiste à ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire, c'est-à-dire on effectue $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, avec $i \neq j$ et α dans $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1; 2\}$

- a. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4 - \frac{1}{u_n} \end{cases}.$$

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- b.** Montrer qu'en effectuant que des transvections sur les lignes de la matrice A_n à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on obtient une matrice triangulaire supérieure dont les n pivots $(p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ vérifient :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket, p_{k+1} = 4 - \frac{1}{p_k} \\ p_{n-1} = 2 - \frac{1}{p_{n-2}} \end{cases}.$$

- c.** En déduire que A_n est inversible.

II-Splines cubiques

Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. On note $P^3([\alpha, \beta])$ l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $[\alpha, \beta]$ de degré inférieur ou égal à 3.

Soit $[a, b]$, avec $a < b$, un intervalle réel que l'on divise en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et pour k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $x_k = a + kh$ (ainsi $x_0 = a$ et $x_n = b$).

Soit $f \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbb{R})$ et pour k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$f_k = f(x_k); \quad f'_k = f'(x_k) \quad f''_k = f''(x_k).$$

On se propose de déterminer une fonction g définie sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

C1 : pour tout k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de g à $[x_k; x_{k+1}]$, c'est-à-dire $g|_{[x_k; x_{k+1}]}$ est dans $P^3([x_k; x_{k+1}])$. Autrement dit pour tout k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe une fonction polynôme P_k de degré au plus 3 telle que : $g|_{[x_k; x_{k+1}]} = P_k$.

$$\mathbf{C2} : g \text{ vérifie les relations suivantes : } \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g(x_k) = f_k \\ g'_d(x_0) = f'_0 \text{ (dérivée à droite en } x_0) \\ g'_g(x_n) = f'_n \text{ (dérivée à gauche en } x_n) \end{cases}$$

- 1.** Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P_k(x_k) = P_{k-1}(x_k).$ | 4. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_k(x_k) = f_k.$ |
| 2. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P'_k(x_k) = P'_{k-1}(x_k).$ | 5. $P'_0(x_0) = f'_0.$ |
| 3. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P''_k(x_k) = P''_{k-1}(x_k).$ | 6. $P'_{n-1}(x_n) = f'_n.$ |

- 2.** Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. Montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les fonctions polynômes P_k intervenant dans la condition **C1** s'écrivent :

$$P_k = m_k \frac{(x_{k+1} - X)^3}{6h} + m_{k+1} \frac{(X - x_k)^3}{6h} + \alpha_k (X - x_k) + \beta_k,$$

avec $m_l = g''(x_l)$ (pour l dans $\llbracket 0, n \rrbracket$) et $\alpha_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h} + \frac{m_k - m_{k+1}}{6}h$ et $\beta_k = f_k - \frac{m_k h^2}{6}$.

- 3.** Soit une g fonction définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2**. En reprenant la notation $m_l = g''(x_l)$

(pour l dans $\llbracket 0, n \rrbracket$) , montrer que si g est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $A_{n+1} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$

avec $d_0 = \frac{6}{h^2}[f_1 - f_0 - hf'_0]$; $d_n = \frac{6}{h^2}[hf'_n - f_n + f_{n-1}]$ et pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$,
 $d_k = \frac{6}{h^2}[f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}]$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction g définie sur $[a, b]$ vérifiant **C1** et **C2** et de classe $\mathcal{C}^2$.

Dans la question précédente, on appelle une telle fonction g spline cubique d'interpolation de f qui est donc une fonction polynomiale de degré au plus 3 par morceaux et approchant f . Nous noterons $\underline{s_f = g}$ et nous allons maintenant chercher une majoration de l'erreur entre f et s_f .

III-Qualité de l'approximation par une spline cubique

En reprenant les notations des deux premières parties, on note $R = D - A_{n+1}F$, avec $D = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ et
 $F = \begin{pmatrix} f''_0 \\ f''_1 \\ \vdots \\ f''_n \end{pmatrix}$ et nous noterons $R = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

Soit h une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ bornée. On notera $\|h\|_{[\alpha, \beta]} = \sup_{[\alpha, \beta]} |h|$.

1. **a.** On pose $L = \|f^{(4)}\|_{[a, b]}$. Montrer que L est bien définie.
- b.** i) Montrer que pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{6}{h^2}[f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}] - f''_{k-1} - 4f''_k - f''_{k+1} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\frac{(t - x_{k-1})^3}{h^2} - (t - x_{k-1}) \right] f^{(4)}(t) dt + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\frac{(x_{k+1} - t)^3}{h^2} - (x_{k+1} - t) \right] f^{(4)}(t) dt.$$

- ii) En déduire : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |r_k| \leq \frac{3}{2}Lh^2$.

On suppose que l'inégalité précédente est aussi vraie pour $k = 0$ et $k = n$ (s'obtient par la même méthode).

- iii) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, |m_k - f''_k| \leq \frac{3}{2}Lh^2$.
- c.** Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On note Δ_k la fonction affine définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ telle que : $\Delta(x_k) = f''_k$ et $\Delta(x_{k+1}) = f''_{k+1}$.
 Soit $x \in]x_k, x_{k+1}[$ fixé. Sur $[x_k, x_{k+1}]$, on pose
 $H_k : u \mapsto f''(u) - \Delta_k(u) - [f''(x) - \Delta_k(x)] \frac{(u - x_k)(u - x_{k+1})}{(x - x_k)(x - x_{k+1})}$.
 i) Montrer que H''_k s'annule au moins sur $]x_k, x_{k+1}[$.
 ii) En déduire que $\|\Delta_k - f''\|_{[x_k, x_{k+1}]} \leq L \frac{h^2}{8}$.
 iii) En déduire qu'il existe k_1 dans $\mathbb{R}_+$ tel que : $\|g'' - f''\|_{[a, b]} \leq k_1 h^2$.

Remarque : On ne le fera pas mais on peut montrer grâce au résultat précédent qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $\|g' - f'\|_{[a, b]} \leq C_1 h^3$ et $\|g - f\|_{[a, b]} \leq C_2 h^4$.

2. Soit $h \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ et on pose $N(h) = \left(\int_a^b (h''(x))^2 dx \right)^{1/2}$.

On note S l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant la condition **C1**.

- a.** Est-ce que l'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f''(x)g''(x)dx$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$?
- b.** Montrer que : $\forall s \in S, \int_a^b (f''(x) - s''_f(x))s''(x)dx = 0$ (pour la définition de s_f , voir la fin de la partie II).
- c.** Montrer que : $N(f - s_f)^2 = N(f)^2 - N(s_f)^2$.
- d.** Montrer que $N(f - s_f) = \min_{s \in S} N(f - s)$.
- e.** Déterminer tous les s dans S telles que $N(f - s_f) = N(f - s)$. Quelle est la structure de l'espace des fonction s vérifiant l'égalité précédente ?