À rendre pour le mardi 17 novembre

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id.
Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Tr}\,(u)$ la trace de u et $\mathrm{Sp}\,(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = \mathrm{Id}$ et si $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).
On définit l'application :

$$\Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E), \quad (u, v) \longmapsto [u, v]$$

et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\Phi_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E), \quad v \longmapsto [u, v]$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $M_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes.
I_m est la matrice identité d'ordre m.
Pour $A \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, on notera ${}^tA$ sa transposée.
Enfin, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n de terme général $\alpha_i \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1ère PARTIE

A- Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.

- ***a.*** Montrer que $\mathrm{Vect}(\{\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\,\Phi_u) \geqslant 2$.
- ***b.*** Montrer que si $v \in \mathrm{Ker}\,\Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$.

4. Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Im}\,\Phi_u \subset \mathcal{T}$.
Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = \mathrm{Id}$? Peut-on avoir $\mathrm{Im}\,\Phi_u = \mathcal{T}$?

5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- ***a.*** Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
- ***b.*** En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.

6. ***a.*** Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que

$$(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} u^{k-p} v u^p.$$

b. En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1. u peut-il être une homothétie ?

2. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

3. En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X, Y) \in (M_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in (M_{n-1}(\mathbb{K}))^2$.

a. Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

b. On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in (M_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :

$$A = U'V' - V'U' \iff \left[{}^tX = -{}^tR\,(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S \right].$$

5. Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

C- Détermination de $\mathrm{Tr}\,(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E. Soient $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk}\, e_i.$$

1. Rappeler why $(u_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \ldots, n\}^4$, le produit $u_{i,j} u_{k,l}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}^2, \quad \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}\, u_{i,k}.$$

3. En déduire $\mathrm{Tr}\,(\Phi_u)$.

2ème PARTIE

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.
On pose $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u.

1. Soit $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

a. Montrer que
$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2 : \quad \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)\, u_{i,j}.$$

b. En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}\,(\Phi_u)$.

2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ \forall i \in \{1,\ldots,p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}\,.$$

3. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.
Quel est le rang de Φ_u ?

4. On suppose en plus que u a n valeurs propres distinctes.
Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\Phi_u$? Quel est le polynôme minimal de u ?
En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1})$.

B- Cas où $\dim E = 2$

Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie, $\dim E = 2$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi_u = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u)$ (on pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence).

2. Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2+\beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.

3. Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?

4. On suppose $\beta \neq 0$; étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5. On suppose Φ_u diagonalisable.

a. Montrer que $\mathrm{Sp}\,(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.
Dans la suite de la question, v (respectivement w) désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

b. L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\mathrm{Tr}\,(v)$ puis v^2.

c. Détermination de $\mathrm{Sp}\,(u)$:

- Pour quelles valeurs du vecteur e la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?
- Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\mathrm{Sp}\,(u) = \left\{\dfrac{\mathrm{Tr}\,(u)-\lambda}{2},\ \dfrac{\mathrm{Tr}\,(u)+\lambda}{2}\right\}$. Que peut-on alors say de u ?

d. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,v \oplus \mathrm{Ker}\,w$ puis en déduire que u est diagonalisable.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}\,(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_{n^2})$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i,\ \forall i \in \{1,\ldots,n^2\}$.
Soit enfin $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

1. Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.

2. Montrer que l'application $\Psi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E,\ v \longmapsto v(x)$ est linéaire surjective.

3. Montrer alors que u est diagonalisable.

3ème PARTIE

Soit λ une valeur propre non nulle de Φ_u et v un vecteur propre associé ; on désigne par P_u le polynôme caractéristique de u.

1. ***a.*** Montrer que $\forall x \in \mathbb{K},\ v(u - x\,\mathrm{Id}) = (u - (x+\lambda)\mathrm{Id})\,v$.

b. Qu'en déduit-on sur P_u si $\det v \neq 0$?

c. Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \Phi_u(v^k) = k\lambda\, v^k$; qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?

3. Conclure que v est un endomorphisme nilpotent.

Dans la suite on suppose que $\dim \mathrm{Ker}\, v = 1$.

4. ***a.*** Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathrm{Im}\, v^p$ est stable par les endomorphismes u et v.

b. Soit $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$; en considérant les endomorphismes v_1 et u_1 induits par v et u sur $\mathrm{Im}\, v^p$, montrer que $\dim(\mathrm{Im}\, v^p) = 1 + \dim(\mathrm{Im}\, v^{p+1})$.

c. Déduire de ce qui précède que $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

5. Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$; montrer que la famille $B = (e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.

6. On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) \ /\ wv - vw = \lambda v\}$.

a. Montrer que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base B est $\mathrm{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \ldots, (n-1)\lambda)$.

b. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.

c. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.

7. Quelle est alors la forme de la matrice dans la base B de l'endomorphisme u ?

8. On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base B' de E is de la forme $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha+\lambda, \alpha+2\lambda, \ldots, \alpha+(n-1)\lambda)$; décrire par leur matrice dans la base B' les éléments de l'espace $E_{\Phi_u}(\lambda)$; quelle est sa dimension ?