À rendre pour le jeudi 26 novembre

PROBLÈME 1

Notations et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité se notera I_2.
$\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, A^T désigne la matrice transposée de A, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\det A$ son déterminant et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$.
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on appelle matrice conjuguée de A et on note $\bar{A}$, la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A; la matrice transposée de la matrice $\bar{A}$ se notera A^*.
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont dites semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; les classes d'équivalence de cette relation sont dites les classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

I-Résultats préliminaires

1. Donner la classe de similitude d'une matrice scalaire, c'est à dire une matrice de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{K}$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ et F_λ sont inversibles et exprimer leur inverses.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$; calculer les produits $E_\lambda A E_\lambda^{-1}$ et $F_\lambda A F_\lambda^{-1}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

c. On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est réduite à un singleton. Montrer que A est une matrice scalaire.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_S = \left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2\right)^{1/2}$.

On munira $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de cette norme.

3. On suppose que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est bornée.

a. Justifier que les parties $\left\{E_\lambda A E_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ et $\left\{F_\lambda A F_\lambda^{-1}; \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sont bornées.

b. En déduire que A est une matrice scalaire.

4. Que peut-on dire d'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est compacte?

II-Condition pour qu'une classe de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ soit fermée

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

a. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, avec $\lambda \neq \mu$, justifier que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

b. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$, montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $A = \lambda I_2$.

c. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire, montrer que A est semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

a. Si A est une matrice scalaire, justifier que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est fermée.

b. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda\}$ et A non diagonalisable, on pose $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Étudier la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ n'est pas fermée.

c. Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda, \mu\}$, avec $\lambda \neq \mu$, soit $\left(P_k A P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \{\lambda, \mu\}$.

i. Étudier la suite $\left(P_k \left(A - \alpha I_2\right) P_k^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $\det\left(B - \alpha I_2\right) = 0$.

ii. Montrer alors que $B \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ et conclure que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(A)$ est fermée.

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(A)$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

a. Justifier que $4 \det A - (\mathrm{tr}(A))^2 > 0$. Dans la suite, on pose

$$A' = \frac{2}{\delta}\left(A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} I_2\right) \text{ et } A'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{tr}(A) & -\delta \\ \delta & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix} \text{ avec } \delta = \sqrt{4 \det A - (\mathrm{tr}(A))^2}.$$

b. Montrer que $A'^2 = -I_2$.

c. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A' et on considère un vecteur non nul e de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $(e, f(e))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice A_1 de f dans cette base.

d. Exprimer A' en fonction de A_1 et en déduire que les matrices A et A'' sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e. Soit $(P_k A P_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ qui converge vers une matrice $\tilde{A}$ élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $tr(\tilde{A}) = tr(A)$ et $\det(\tilde{A}) = \det(A)$.

ii. Justifier alors que les matrices A et $\tilde{A}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que si A est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(A)$ est fermé dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

PROBLÈME 2

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L définie sur E par

$$\forall\ P \in E, L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\ dx.$$

Première partie

1. Soit N une norme sur E. On pose

$$\mathcal{N}(L) = \sup_{P \in E, N(P) \leq 1} |L(P)|\,.$$

a. Justifier l'existence de $\mathcal{N}(L)$ et montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = \mathcal{N}(L)$.

b. Montrer que si K est un nombre réel positif tel que

$$\forall\ P \in E, |L(P)| \leq KN(P),$$

alors $\mathcal{N}(L) \leq K$. Montrer que si, de plus, il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors $\mathcal{N}(L) = K$.

2. Pour $P \in E$ tel que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq p \leq n} |a_p| \text{ et } \|P\|_2 = \left(\sum_{p=0}^{n} (a_p)^2 \right)^{1/2}.$$

Comparer les normes N_∞ et N_2.

3. On désigne par $\mathcal{N}_\infty(L)$ et $\mathcal{N}_2(L)$ les nombres $\mathcal{N}(L)$ définis à la question **6.**, quand on choisit pour N respectivement N_∞ et N_2.

a. Trouver $Q_\infty \in E$ tel que $\|Q_\infty\|_\infty = 1$ et $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$.

b. Trouver $Q_2 \in E$ tel que $\|Q_2\|_2 = 1$ et $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$.

Deuxième partie

Soit F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré quelconque.

Pour $P \in F$ de degré $d(P)$, définie par $P(x) = \sum_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$, on pose

$$\|P\|_\infty = \sup_{0 \leq p \leq d(P)} |a_p| \text{ et } \|P\|_2 = \left(\sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2 \right)^{1/2}$$

et l'on définit ainsi des normes sur F [par convention $\|0\|_\infty = \|0\|_2 = 0$].

Pour $P \in F$, on pose encore $L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\ dx$.

4. ***a.*** Trouver une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \|P_k\|_\infty = 1$ et $\lim_{k \to +\infty} L(P_k) = +\infty$.

b. L'application L est-elle continue ?

5. ***a.*** Montrer que $\sup_{P \in F, \|P\|_2 \leq 1} |L(P)|$ existe. On désigne ce nombre par $|||L|||$.

b. Existe-t-il une fonction polynomiale $Q \in F$ telle que $\|Q\|_2 = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$?