

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan)

durée : 4 heures

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

## Notations

Dans toute l'épreuve,  $K$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $\Gamma$  un groupe fini dont l'élément neutre est noté  $1_\Gamma$ . Tous les espaces vectoriels sur  $K$  qui interviennent sont de dimension finie. Si  $E, F$  sont deux  $K$ -espaces vectoriels, on note  $L(E, F)$  l'espace vectoriel constitué des applications  $K$ -linéaires de  $E$  dans  $F$  ; si  $E = F$ , on utilise  $L(E)$  au lieu de  $L(E, E)$  ; on note  $GL(E)$  le groupe des bijections linéaires de  $E$  sur lui même (pour la loi de composition). Enfin, si  $X$  est un ensemble fini, on note  $\#X$  son cardinal.

Certaines définitions ou notations sont données au fur et à mesure : en général, elles sont annoncées par un point • et à l'aide de **mots en gras** ; l'usage de *mots en italique* est destiné à attirer l'attention du candidat.

## Partie I : Formule de Burnside et représentations linéaires

• Un  $\Gamma$ -espace ou une **représentation linéaire** de  $\Gamma$  est la donnée d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie et d'un morphisme de groupes  $\rho : \Gamma \rightarrow GL(E)$ . Cette donnée définit une opération  $\Gamma \times E \rightarrow E$ , à savoir  $(\gamma, x) \mapsto \rho(\gamma)(x)$ , que l'on note souvent (quand cela ne prête pas à confusion)  $\gamma.x$  au lieu de  $\rho(\gamma)(x)$  et qui vérifie les propriétés (pour  $x, y \in E, \gamma, \gamma' \in \Gamma, \lambda \in K$ ) :

$$\gamma.(x + y) = \gamma.x + \gamma.y, \quad \gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x) \quad 1_\Gamma.x = x, \quad \gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$$

Réciproquement, une telle opération  $\Gamma \times E \rightarrow E$  définit un morphisme de groupes  $\Gamma \rightarrow GL(E)$ . Avec les abus de langage habituels, on dira parfois dans la suite "soit  $E$  un  $\Gamma$ -espace", ou bien "soit  $E$  une représentation linéaire de  $\Gamma$ ", sans référer nécessairement au morphisme  $\Gamma \rightarrow GL(E)$ , sauf bien sûr si le contexte est ambigu. On écrira parfois  $\rho_\gamma$  au lieu de  $\rho(\gamma)$  ( $\rho_\gamma : E \rightarrow E$  est donc la "multiplication" par  $\gamma$  i.e. l'application linéaire  $x \mapsto \gamma.x$ ).

- Si  $E, F$  sont deux  $\Gamma$ -espaces, un  $\Gamma$ -morphisme  $\varphi : E \rightarrow F$  est une application linéaire satisfaisant à  $\varphi(\gamma.x) = \gamma.\varphi(x)$  pour  $x \in E, \gamma \in \Gamma$ . Un  $\Gamma$ -isomorphisme est un  $\Gamma$ -morphisme bijectif.

1. Soit  $E$  un  $\Gamma$ -espace ; on note  $E_\Gamma$  le sous-espace vectoriel de  $E$  constitué des vecteurs  $\Gamma$ -invariants c'est-à-dire  $E_\Gamma = \{x \in E \mid \gamma.x = x, \forall \gamma \in \Gamma\}$  et on définit  $\pi : E \rightarrow E$  par :

$$\pi = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho_\gamma$$

Montrer que  $\pi$  est un projecteur d'image  $E_\Gamma$ . En déduire que la trace de  $\pi$  est donnée par :

$$\text{tr}(\pi) = \dim E_\Gamma$$

- A toute représentation linéaire  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{GL}(E)$  de  $\Gamma$ , on associe son **caractère**  $\chi_E$  (que l'on note parfois  $\chi_\rho$ ) qui est la fonction  $\Gamma \rightarrow K$  définie à l'aide de la trace par :  $\chi_E(\gamma) = \text{tr}(\rho_\gamma)$ .
- Un **caractère** du groupe  $\Gamma$  est une fonction  $\chi : \Gamma \rightarrow K$  telle qu'il existe un  $\Gamma$ -espace  $E$  vérifiant  $\chi = \chi_E$ .

2. Soit  $\chi$  un caractère. Montrer que tous les  $\Gamma$ -espaces  $E$  tels que  $\chi_E = \chi$  ont même dimension que l'on peut calculer à partir de  $\chi$ . Dans la suite, on notera  $\dim \chi$  cette dimension.

3. Montrer l'égalité :

$$\frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma) = \dim E_\Gamma$$

- Une opération (ou une action) du groupe  $\Gamma$  sur un ensemble  $X$  est une loi  $\Gamma \times X \xrightarrow{(\gamma, x) \mapsto \gamma.x} X$  ayant les propriétés suivantes :

$$1_\Gamma.x = x, \quad \forall x \in X, \quad \gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \quad \forall x \in X$$

- La relation orbitale sur  $X$  définie par l'action de  $\Gamma$  est la relation définie sur  $X$  par :

$$x \mathcal{R} y \stackrel{\text{def}}{=} \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y = \gamma.x$$

Rappelons que c'est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées les **orbites** de  $X$  sous  $\Gamma$  ; l'action est dite **transitive** si  $X$  est une orbite.

Etant donné un ensemble fini  $X$ , on note  $K^X$  le  $K$ -espace vectoriel constitué de toutes les fonctions de  $X$  dans  $K$  ; la base canonique de  $K^X$  est la base  $(e_x)_{x \in X}$  définie par :

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

(si  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $K^X$  s'identifie à  $K^n$ ). A toute action de  $\Gamma$  sur  $X$ , on associe une représentation de  $\Gamma$  sur  $K^X$  via :

$$\gamma \cdot e_x = e_{\gamma \cdot x}, \quad \text{ou, ce qui revient au même,} \quad \gamma \cdot f = \{x \mapsto f(\gamma^{-1} \cdot x)\} \quad \text{pour } f \in K^X$$

4. Caractériser les  $f \in K^X$  invariants par  $\Gamma$ . En déduire que la dimension du sous-espace des invariants de  $K^X$  est égale au nombre d'orbites de  $X$  sous  $\Gamma$ .

5. On dit que  $x \in X$  est fixé par  $\gamma \in \Gamma$  si  $\gamma \cdot x = x$ .

a. On désigne par  $\chi_X : \Gamma \rightarrow K$  le caractère de la représentation  $\Gamma \rightarrow \text{GL}(K^X)$ , et pour  $\gamma \in \Gamma$ , par  $r_\gamma$  le nombre d'éléments de  $X$  fixés par  $\gamma$ . Montrer que :

$$\chi_X(\gamma) = r_\gamma$$

b. On désigne par  $s$  le nombre d'orbites ; déduire des questions précédentes la formule dite "de Burnside" :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma = s \times \#\Gamma$$

6. Déduire de la formule de Burnside un lemme dû à Jordan : si  $\Gamma$  agit *transitivement* sur un ensemble  $X$  non réduit à un singleton, alors il existe  $\gamma \in \Gamma$  sans point fixe (i.e.  $\gamma \cdot x \neq x$  pour tout  $x \in X$ ).

## Partie II : Propriétés élémentaires des caractères des représentations

1. Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $u \in L(E)$ ,  $v \in L(F)$  ; on définit une application linéaire  $\psi : L(E, F) \rightarrow L(E, F)$  par :

$$\psi(f) = v \circ f \circ u, \quad f \in L(E, F)$$

Montrer que  $\text{tr}(\psi) = \text{tr}(u) \text{tr}(v)$ .

2. Soient  $E, F$  deux  $\Gamma$ -espaces.

a. Pour  $\gamma \in \Gamma$ ,  $u \in L(E, F)$ , on définit  $\gamma \cdot u \in L(E, F)$  par  $\gamma \cdot u : x \mapsto \gamma \cdot u(\gamma^{-1} \cdot x)$ . Montrer que l'on munit ainsi  $L(E, F)$  d'une structure de  $\Gamma$ -espace dont le caractère est noté  $\chi_{L(E, F)}$ .

b. Si  $\chi : \Gamma \rightarrow K$  est une fonction quelconque, on note  $\chi^* : \Gamma \rightarrow K$  la fonction  $\gamma \mapsto \chi(\gamma^{-1})$ . Déduire de la question II-1. l'égalité :

$$\chi_{L(E, F)} = \chi_E^* \chi_F \quad \text{c'est à dire} \quad \chi_{L(E, F)}(\gamma) = \chi_E(\gamma^{-1}) \chi_F(\gamma) \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma$$

- On note  $K^\Gamma$  le  $K$ -espace vectoriel de toutes les fonctions de  $\Gamma$  dans  $K$  que l'on munit de la forme bilinéaire, notée  $\langle \ , \ \rangle$  :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1}), \quad f, g \in K^\Gamma$$

**3.a.** Vérifier que cette forme bilinéaire est symétrique et si  $\langle f, g \rangle = 0$  pour tout  $g$  alors  $f = 0$ .

**b.** Pour deux  $\Gamma$ -espaces  $E, F$ , on note  $\text{hom}_\Gamma(E, F)$  le sous-espace vectoriel de  $L(E, F)$  constitué des  $\Gamma$ -morphisms. Montrer l'égalité :

$$\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim \text{hom}_\Gamma(E, F)$$

En déduire que  $\langle \chi_E, \chi_E \rangle$  est un entier strictement positif si  $E \neq \{0\}$ .

**4.a.** Vérifier que la fonction constante  $\Gamma \xrightarrow{\gamma \mapsto 1} K$  est un caractère que l'on note  $\chi_{\text{unit}}$  puis que pour tout  $\Gamma$ -espace  $E$ ,  $\langle \chi_E, \chi_{\text{unit}} \rangle$  est la dimension du sous-espace  $E_\Gamma$  de  $E$  constitué des vecteurs  $\Gamma$ -invariants.

**b.** Si  $\chi, \chi'$  sont deux caractères, montrer que  $\chi + \chi'$  est un caractère (munir le produit de deux  $\Gamma$ -espaces d'une structure de  $\Gamma$ -espace).

**c.** Si  $\chi$  est caractère, montrer que  $\chi^*$  est aussi un caractère (munir le dual d'un  $\Gamma$ -espace d'une structure de  $\Gamma$ -espace).

**d.** Si  $\chi, \chi'$  sont deux caractères, montrer que  $\chi\chi'$  est un caractère.

pour les 5/2 : **5.** Dans cette question, on suppose que  $K = \mathbb{C}$ . Montrer, pour tout caractère  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , que  $\chi^* = \bar{\chi}$  ; retrouver le fait que  $\langle \chi, \chi \rangle > 0$ .

### Partie III : Représentations irréductibles et orthogonalité des caractères

- Un  $\Gamma$ -sous-espace  $F$  d'un  $\Gamma$ -espace  $E$  est un sous-espace vectoriel tel que  $x \in F \Rightarrow \gamma.x \in F, \forall \gamma \in \Gamma$ .
- Une représentation de  $\Gamma$  d'espace  $E$  non réduit à  $\{0\}$  est dite **irréductible** si les seuls  $\Gamma$ -sous-espaces sont  $E$  et  $\{0\}$ .
- Un **caractère irréductible** du groupe  $\Gamma$  est une application  $\chi : \Gamma \rightarrow K$  tel qu'il existe une représentation irréductible  $(E, \rho)$  de  $\Gamma$  telle que  $\chi = \chi_E$ .

**1.a.** Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  un  $\Gamma$ -morphisme entre deux  $\Gamma$ -espaces. Montrer les implications :

$$E \text{ irréductible} \Rightarrow \varphi \text{ est soit nul soit injectif,}$$

$$F \text{ irréductible} \Rightarrow \varphi \text{ est soit nul soit surjectif.}$$

En déduire qu'un  $\Gamma$ -morphisme entre deux espaces irréductibles est soit nul soit un isomorphisme.

b. On rappelle que pour deux  $\Gamma$ -espaces  $E, F$ ,  $\langle \chi_E, \chi_F \rangle = \dim \operatorname{hom}_\Gamma(E, F)$ , cf. question II-3.b. Si  $E, F$  sont *irréductibles*, montrer les équivalences :

$$\langle \chi_E, \chi_F \rangle > 0 \iff E, F \text{ sont } \Gamma\text{-isomorphes} \iff \chi_E = \chi_F$$

En particulier, deux caractères irréductibles distincts sont orthogonaux pour la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

c. En déduire que l'ensemble des caractères irréductibles de  $\Gamma$  est une partie libre de  $K^\Gamma$ , finie, de cardinal inférieur ou égal à celui de  $\Gamma$ . Montrer également que l'ensemble des classes de  $\Gamma$ -isomorphie de  $\Gamma$ -espaces irréductibles est en bijection avec l'ensemble des caractères irréductibles de  $\Gamma$ .

2.a. Etant donné  $f \in L(E, F)$  où  $E, F$  sont deux  $\Gamma$ -espaces, on définit  $\hat{f} : E \rightarrow F$  par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot f(\gamma^{-1} \cdot x), \quad x \in E$$

Vérifier que  $\hat{f}$  est un  $\Gamma$ -morphisme.

b. Soit  $F \subset E$  un sous-espace de  $E$  stable par  $\Gamma$  et  $\pi : E \rightarrow E$  un projecteur quelconque d'image  $F$ . Vérifier que  $\hat{\pi}$  est un projecteur d'image  $F$  et en déduire l'existence d'un sous-espace  $F' \subset E$  stable par  $\Gamma$  tel que  $E = F \oplus F'$ .

c. En déduire que toute représentation est une somme directe (finie) de représentations irréductibles c'est-à-dire que tout  $\Gamma$ -espace  $E$  s'écrit (de manière non unique en général) comme une somme directe  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$  où chaque  $E_j$  est un  $\Gamma$ -sous-espace irréductible de  $E$ .

3. Soient  $\chi_1, \dots, \chi_s$  les caractères irréductibles d'un groupe  $\Gamma$  ; pour chaque  $\chi_i$ , on fixe une représentation irréductible  $V_i$  de  $\Gamma$  ayant  $\chi_i$  pour caractère (tout  $\Gamma$ -espace irréductible est donc  $\Gamma$ -isomorphe à un et un seul des  $V_i$ ).

a. Soit  $E$  une représentation linéaire de  $\Gamma$  ; en utilisant une décomposition de  $E$  en sous-espaces irréductibles, montrer l'existence et l'unicité d'une suite d'entiers positifs ou nuls  $d_1, d_2, \dots, d_s$  tels que :

$$\chi_E = d_1 \chi_1 + \dots + d_s \chi_s$$

Vérifier que :

$$\langle \chi_E, \chi_i \rangle = d_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle, \quad \langle \chi_E, \chi_E \rangle = \sum_{i=1}^s d_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle,$$

et que pour une décomposition de  $E$  en sous-espaces irréductibles,  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ , l'entier  $d_i$  est le nombre de  $E_j$   $\Gamma$ -isomorphes à  $V_i$ .

Pour  $1 \leq i \leq s$ , on pose  $d_i(E) = \langle \chi_E, \chi_i \rangle / \langle \chi_i, \chi_i \rangle$ , que l'on appelle la **multiplicité de  $V_i$  dans la représentation  $E$** .

b. En déduire l'équivalence pour deux  $\Gamma$ -espaces  $E, F$  :

$$E \text{ est } \Gamma\text{-isomorphe à } F \iff \chi_E = \chi_F \iff d_i(E) = d_i(F), \quad i = 1, \dots, s$$

pour les 5/2 : 4. Dans cette question, on suppose que  ~~$K$  est un corps algébriquement clos (par exemple  $K = \mathbb{C}$ )~~.

a. Soit  $E$  un  $\Gamma$ -espace irréductible et  $\varphi : E \rightarrow E$  un  $\Gamma$ -morphisme ; en utilisant une valeur propre de  $\varphi$ , montrer que  $\varphi$  est une homothétie.

b. En déduire qu'un  $\Gamma$ -espace  $E$  est irréductible si et seulement si  $\langle \chi_E, \chi_E \rangle = 1$ .

c. On suppose que le groupe  $\Gamma$  est abélien. Soit  $(E, \rho)$  une représentation de  $\Gamma$  avec  $E \neq \{0\}$ ; montrer que les endomorphismes de  $E$   $\{\rho_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$  ont un vecteur propre en commun. En déduire que  $E$  est irréductible si et seulement si  $\dim E = 1$ .

#### Partie IV : Actions doublement transitives. La représentation régulière

On reprend les notations figurant dans la partie I avant la question 4 :  $X$  est un ensemble fini sur lequel  $\Gamma$  opère et pour  $\gamma \in \Gamma$ ,  $r_\gamma$  est le nombre d'éléments de  $X$  fixés par  $\gamma$ .

1. On suppose que l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est doublement transitive i.e. possède la propriété "pour  $x, y, x', y' \in X$ ,  $x \neq y$ ,  $x' \neq y'$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma.x = x'$ ,  $\gamma.y = y'$ ". On veut montrer que  $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$  ; on propose deux solutions (questions a. et b.).

a. Montrer que :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma^2 = 2 \times \#\Gamma.$$

En déduire que  $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$ .

b. Soit  $\varphi \in L(K^X)$  et  $(a_{x,y})_{(x,y) \in X^2}$  sa matrice dans la base canonique  $(e_x)_{x \in X}$  de  $K^X$ . Montrer que  $\varphi$  est un  $\Gamma$ -morphisme si et seulement si  $a_{\gamma.x, \gamma.y} = a_{x,y}$  pour tous  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x, y \in X$ . En déduire que  $\dim \text{hom}_\Gamma(K^X, K^X) = 2$  puis de nouveau que  $\langle \chi_X, \chi_X \rangle = 2$ .

c. Soit  $V \subset K^X$  défini par  $V = K \cdot \sum_{x \in X} e_x$ . Vérifier que  $V$  est un  $\Gamma$ -sous-espace de  $K^X$  et trouver un  $\Gamma$ -sous-espace  $W$  de  $K^X$  tel que  $K^X = V \oplus W$ . Calculer  $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$  et  $\langle \chi_W, \chi_W \rangle$  et en déduire que  $V$  et  $W$  sont irréductibles.

• Par définition, la **représentation régulière** de  $\Gamma$  a pour espace  $K^\Gamma$  et pour opération :

$$\gamma.e_{\gamma'} = e_{\gamma\gamma'}, \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma \quad \left( (e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \text{ est la base canonique de } K^\Gamma \right)$$

On note  $\chi_{\text{reg}}$  le caractère de la représentation régulière.

2. Déterminer  $\chi_{\text{reg}}$ . En déduire, pour tout caractère  $\chi$  que  $\langle \chi_{\text{reg}}, \chi \rangle = \dim \chi$ .

3. Soient  $\chi_1, \dots, \chi_s$  les différents caractères irréductibles de  $\Gamma$  et  $d_i$  la multiplicité de  $\chi_i$  dans la représentation régulière. Montrer les égalités :

$$d_i = \frac{\dim \chi_i}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}, \quad \#\Gamma = \sum_{i=1}^s \frac{(\dim \chi_i)^2}{\langle \chi_i, \chi_i \rangle}$$

En particulier,  $d_i \neq 0$  (toute représentation irréductible "figure" dans la représentation régulière).