

Sauf mention contraire, tout est ? savoir.

Systèmes linéaires et matrices, révisions de sup

- **Généralités sur les systèmes linéaires**

- Définitions;
- Opérations élémentaires;
- Matrice d'un système, système de Cramer lorsque la matrice est inversible;
- Recherche de l'inverse d'une matrice par la résolution d'un système.

- **Rang**

- Le rang est donnée par le rang des colonnes ou des lignes de la matrice; algorithme du pivot de Gauss;
- Rang d'un produit et le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible, par transposition;
- Recherche d'un inverse par le pivot de Gauss ou la résolution d'un système linéaire.
- Rang et matrices extraites.

- **Matrices équivalentes**

- Définition;
- Une matrice de rang r est équivalente à $J_r = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Endomorphismes et matrices particuliers

- **Polynômes d'endomorphismes ou de matrices**

- Définitions, compatibilité avec les opérations de $\mathbb{K}[X]$;
- Polynômes annulateurs, idéal annulateur;
- Polynôme minimal, lien entre un polynôme annulateur et le polynôme minimal, polynôme minimal d'un endomorphisme induit.
- Les algèbres $\mathbb{K}[u]$, avec $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $\mathbb{K}[A]$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; dimension.
- Lemme des noyaux pour 2 ou plus polynômes.

- **Matrices et endomorphismes nilpotents**

- Définition;
- Indice de nilpotence et majoration par la dimension.

Déterminants, révisions de sup

- **Déterminant d'une matrice**

- Définition;
- Multilinéarité du déterminant, déterminant et opérations élémentaires;
- $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible;
- Déterminant d'une matrice triangulaire et diagonale;
- Déterminant et produit, transposée, produit par un scalaire;
- Développement par rapport à une ligne ou une colonne;
- Commatrice, expression de l'inverse d'une matrice;
- Invariance du déterminant par similitude;
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs;
- Déterminants de Vandermonde.

- **Applications du déterminant en algèbre linéaire**

- Expression des formes multilinéaires alternées;
- Déterminant dans une base d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n ; opérations élémentaires; caractérisation des bases;
- Formule de changement de base.
- Déterminant d'un endomorphisme; déterminant d'une composée et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$. Critère de bijectivité et déterminant de l'inverse.
- Effet d'une application linéaire sur le déterminant d'une famille.

Banque CCINP

59, 62, 83, 93