

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Espaces vectoriels normés

La relation $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour $k \in \mathbb{R}_+$ peut être utilisée sans démonstration.

Normes

- Définition, normes dérivant d'un produit scalaire.
- Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.
- Distance associée à une norme, distance d'un point à une partie.
- Boules ouvertes, fermées, sphères, les boules sont des parties convexes (définition des parties convexes à ce moment là).
- Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.
- Produit d'espaces vectoriels normés.

Suites d'un espace vectoriel normé

- Définition, CV, opérations sur les limites CV dans un espace produit,, suite CV implique suite bornée.
- Suites extraites et valeurs d'adhérence.

Comparaison de normes

- Domination de normes, normes équivalentes.
- Invariance du caractère borné et de la limite d'une suite pour deux normes équivalentes.
- Équivalence des normes en dimension finie, la convergence et la valeur de la limite sont indépendants de la norme choisie en dimension finie.
- En dimension finie, la CV se ramène à celle de ses coordonnées dans une base, exemple de suites de matrices.

Série d'un espace vectoriel normé

- Définition, reste, somme partielle.
- Le terme général d'une série CV converge vers 0, divergence grossière.
- Séries télescopique, (u_n) CV ssi $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV.
- Linéarité de la somme.
- Absolue convergence. En dimension finie l'absolue CV implique la CV.
- Exponentielle de matrices ou d'endomorphisme d'un ev de dimension finie, $\exp(A + B)$ ou $\exp(u + v)$ quand A et B commutent ou u et v commutent, $P \exp(A) P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$ et $Sp(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in Sp(A)\}$.

Topologie d'un espace vectoriel normé

- Points intérieurs, intérieur, partie ouverte, indépendance de la notion d'ouvert par rapport à la norme en dimension finie, toute boule ouverte est un ouvert. A est ouvert ssi $\bar{A} = A$.
- Points adhérents, adhérence, fermé, caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés, indépendance de la notion de fermé par rapport à la norme en dimension finie, toute boule fermée ou sphère est un fermé. A est fermé ssi $\bar{A} = A$.

- Réunion et intersection d'ouverts et de fermés.
- Voisinage, Frontière, parties denses, topologie induite sur une partie.

Limite et continuité en un point

- Définition, caractérisation séquentielle, limite dans un espace produit, en dimension finie la limite ne dépend pas de la norme, utilisation des coordonnées polaire pour trouver une limite en $(0, 0)$.
- Continuité en un point, continuité.
- Limite et continuité et opérations algébriques et composition.
- En dimension finie, la limite ou la continuité d'une fonction se ramènent à celle de ses coordonnées dans une base.
- Fonctions lipschitzienne, uniformément continue et lien avec la continuité.
- Continuité de l'exponentielle de matrice ou d'endomorphismes en dimension finie.
- Fonction polynomiale à plusieurs variables et continuité, continuité du déterminant.
- Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.

Continuité des applications linéaires et multilinéaires

- Toute application linéaire $f : E \rightarrow F$ avec E de dimension finie est continue, ce qui équivaut à la continuité en 0 ce qui équivaut à : $\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
- Norme triple ou norme subordonnée pour les applications linéaires ou les matrices, la norme triple est une norme sous-multiplicative.
- $f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ une application p -linéaire est continue ssi Il existe K dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq K\|x_1\|_1 \times \dots \times \|x_p\|_p$.
- En dimension finie, les applications linéaires et multilinéaires sont continues, le produit matriciel et la composition d'applications linéaires en dimension finie sont continues.

BANQUE CCINP

36, 38, 40, 44, 45, 48.