

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Matrices et isométries vectorielles

### Isométrie vectorielle

- Définition par la conservation de la norme, conservation du produit scalaire, caractérisation par  $u^* = u^{-1}$ , caractérisation par l'image d'une base orthonormée, les groupe  $O(E)$  et  $SO(E)$ .
- Bijectivité d'une isométrie vectorielle et déterminant d'une isométrie vectorielle.
- Symétries orthogonales, réflexions.
- Si  $f$  est dans  $O(E)$ , on a :  $f(F) \subset F \Rightarrow f(F^\perp) \subset F^\perp$  et  $f$  induit une isométrie vectorielle sur  $F$ .

### Matrices orthogonales

- $M$  est orthogonale si  $M^T M = M M^T = I_n$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  ou  $O(n)$  est l'ensemble des matrices orthogonales. C'est un groupe.
- Déterminant d'une matrice orthogonale.
- Dans une base orthonormée, la matrice d'un endomorphisme est orthogonale si et seulement si cet endomorphisme est une isométrie vectorielle.
- Les lignes (respectivement les colonnes) forment une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  (respectivement de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ).
- Caractérisation par la matrice de passage entre deux bases orthonormées.
- $SO(n)$  ou  $SO_n(\mathbb{R})$ , groupe spécial orthogonal.

### Isométries vectorielles d'un plan euclidien

- Orientation d'un espace vectoriel.
- Description de  $O(2)$  et  $SO(2)$ ,  $SO(2)$  est commutatif.
- Lien entre  $SO(2)$  et rotations.
- Classification des isométries vectorielles du plan.

### Réduction des matrices orthogonales et des isométries vectorielles

- Réduction des matrices orthogonales et des isométries vectorielles
- Cas des isométries vectorielles directes en dimension 3 et définition des rotations vectorielles de l'espace.

## Réduction des endomorphismes autoadjoint et des matrices symétriques réelles

- Endomorphismes autoadjoints ( $u^* = u$ ) caractérisation par sa matrice dans une base orthonormée,  $S(E)$  est l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.
- Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.
- Orthogonalité des sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint, théorème spectral, théorème spectral version matricielle.
- Si  $f$  est dans  $S(E)$ , on a :  $f(F) \subset F \Rightarrow f(F^\perp) \subset F^\perp$  et  $f$  induit un endomorphisme autoadjoint sur  $F$ .

- Matrices symétriques positifs ( $S_n^+(\mathbb{R})$ ) ou définies positives ( $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) définies à l'aide de  $X^TAX$ , endomorphismes autoadjoints positifs ( $S^+(E)$ ) ou définis positifs ( $S^{++}(E)$ ), définis à l'aide de  $(u(x)|x)$ .
- Caractérisation par le spectre.

## BANQUE CCP

47, 54, 66, 74, 78, 101,