

Sauf mention contraire, tout est à savoir.

## Calcul différentiel

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$  une application.

### Dérivée selon un vecteur

- Dérivée selon un vecteur
- Applications partielles et dérivées partielles de fonctions de  $p$  variables.

### Différentiabilité

- Différentiabilité; unicité; développement limité à l'ordre un; différentiable implique continue; différentielle d'une application constante et linéaire.
- Lien entre différentielle et dérivées partielles : différentiable implique l'existence de dérivées partielles et expression de la différentielle en fonction de celles-ci.
- Opérations sur les différentielles : combinaison linéaire, composition avec une application multilinéaire, composition, dérivée le long d'un arc.
- Gradient et interprétation, expression à l'aide des dérivées partielles.
- Différentielle nulle sur un ouvert connexe par arcs équivaut à avoir une fonction constante.

### Fonctions $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^k$

- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ ; caractérisation à l'aide des dérivées partielles; opérations et compositions sur la dérivation; matrices jacobienne et lien avec les dérivées partielles.
- Règle de la chaîne, applications aux changements de variable affine et en polaire et exemple d'équation aux dérivées partielles, complément : Laplacien en polaire.
- Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  et l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^k(U, F)$
- Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  : théorème de Schwarz, Hessienne, développement limité à l'ordre deux.
- Équations aux dérivées partielles (utilisation de changements de variables, notamment affine, polaire), exemple : équation de D'Alembert.

### Extrema

- Extrema locaux, points critiques, condition nécessaire pour avoir un extremum local avec les points critiques, recherche d'extrema locaux, recherche d'extrema sur un compact.
- Dans le cas  $\mathcal{C}^2$ , utilisation de la Hessienne pour avoir une condition nécessaire ou suffisante d'extremum.

## Vecteur tangent à une partie

- Définition, espace tangent, plan tangent, espace tangent et plan tangent d'un graphe d'une fonction de deux variables.
- Optimisation sous contrainte : maximum d'une fonction  $f$  restreinte à un espace  $M$  ou de la forme  $\{x \in \Omega, g(x) = 0\}$ .

## BANQUE CCINP

33, 41, 52, 56, 57, 58