Cahier de vacances après la MPSI

La partie de la deuxième année de CPGE qui se situe avant les écrits des concours est plus courte que la première année (seulement 25 semaines de cours) mais plus intense, ce qui rend délicat le rattrapage d'éventuels retards. Il est donc important de la démarrer dans les meilleures conditions possibles. Il est ainsi fortement déconseillé de ne rien faire du tout pendant les deux mois d'été qui arrivent ! Le plus efficace est de consolider le programme de sup.

La liste d'exercices qui suit est conçue pour vous faire réviser une grande partie du programme de MPSI en insistant bien sûr sur la connaissance du cours mais aussi sur la mise en application de ces notions. Un travail approfondi sur cette liste d'exercices devrait vous aider pour l'année prochaine.

Les exercices ont été regroupés selon les grands thèmes du programme. Beaucoup d'entre eux sont classiques et vous les aurez peut-être déjà traités en première année. C'est l'occasion de vérifier si vous savez les refaire. Ne vous contentez pas d'une vague idée. Rédigez vraiment votre solution puis comparez avec le corrigé. Aviez-vous tous les arguments ? Étiez-vous clair ? Votre solution est-elle la plus simple possible ? Ne vous contentez pas d'avoir le bon résultat. Connaître les bonnes méthodes vous permettra de progresser vers des exercices plus difficiles. Certains exercices sont plus difficiles ou plus astucieux. Ils sont signalés par une étoile ($\star$). Voyez-les comme des petits défis et attaquez les sans complexes mais aussi sans pression si vous n'y arrivez pas facilement.

I Algèbre

A Nombres complexes et calculs algébriques

En Mathématiques comme en Physique, les calculs jouent un rôle central. Il est rare que vous soyez amenés à rédiger des calculs très longs dépassant la dizaine de lignes. Toutefois il est important d'être sûr de soi dans la connaissance du cours et dans les calculs : il est très difficile d'aboutir à un résultat si on doute à chaque ligne de la validité de ce qu'on écrit. Cette assurance ne s'obtient que grâce à la maîtrise des techniques classiques et, pour obtenir cette dernière, une pratique intensive est indispensable. Les exercices ci-dessous illustrent un certain nombre de techniques de calcul usuelles sur les nombres réels et complexes.

Une remarque concernant les nombres complexes : pour traiter un exercice dans $\mathbb{C}$, on peut se placer à trois niveaux d'abstraction :

- *le niveau le plus élevé où on calcule directement dans le corps $\mathbb{C}$. On utilise alors le nombre complexe z lui-même, son conjugué $\overline{z}$ et parfois $|z|$. On utilise alors $i^2 = -1$ et parfois aussi les propriétés de $j = e^{2i\pi/3}$: $1 + j + j^2 = 0$, $j^3 = 1$ et $\overline{j} = j^2$.*
- *le niveau intermédiaire où on utilise la forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ avec $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*
- *le niveau le plus bas où on calcule les parties réelles et imaginaires des nombres complexes ; cela revient à assimiler $\mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Cette technique amène souvent les calculs les plus compliqués et il faut la réserver aux situations les plus simples (ou bien à la fin d'un exercice où, après avoir calculé directement dans $\mathbb{C}$, on veut isoler la partie réelle ou la partie imaginaire du résultat).*

Par exemple, si on cherche les nombres $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $z^3 = 1$, l'approche avec l'écriture algébrique $z = x + iy$ mènerait à la résolution du système non linéaire $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$ ce qui n'est pas très facile. Il est beaucoup plus efficace de résoudre $z^3 = 1$ en cherchant z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ car alors $z^3 = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\,[2\pi]$.

Cette remarque est particulièrement vraie quand on manipule l'exponentielle complexe : il faut éviter de se précipiter sur le remplacement $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Exercice 1 : Soit θ un nombre réel et n un entier naturel. Calculer les deux sommes $A = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ et $B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Indication : utiliser l'exponentielle complexe.

Exercice 2 : On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soient A, B et C trois points distincts d'affixes a, b et c. Montrer qu'ils forment un triangle équilatéral si et seulement si j ou j^2 est solution de $az^2 + bz + c = 0$.

Indication : utiliser une rotation pour traduire le caractère équilatéral.

Exercice 3 : Grâce à une interversion des deux sommations, calculer la somme double suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}.$$

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$$

Exercice 5 : Soient a, b deux nombres complexes non nuls.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $|a + b| = |a| + |b|$.
2. Généraliser au cas de n nombres complexes.

Exercice 6 : Écrire les sommes suivantes sous forme de fractions :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 7 : Calculer les deux produits suivants :

$$A = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad B = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Indication : les produits aussi peuvent être télescopiques.

Exercice 8 ($\star$) **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$. *Indication : utiliser* $j = e^{2i\pi/3}$.

B Structures algébriques

Exercice 9 : Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 10 : Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. Montrer que G est abélien si, et seulement si, l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 11 : Montrer que $L = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : Trouver tous les morphismes de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 13 : *Centre d'un groupe.*

1. Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. On appelle *centre* de G l'ensemble des $x \in G$ tels que $\forall y \in G,\ xy = yx$. Montrer que le centre de G est un sous-groupe de G.
2. Montrer que l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est un groupe pour le produit matriciel. Déterminer le centre de H.

C Polynômes

Les polynômes sont des objets spectaculairement efficaces car les techniques disponibles sont très nombreuses.

- *au premier niveau, on peut utiliser les fonctions polynomiales en remplaçant* [1] *l'inconnue X par un nombre x. Cela permet de faire des calculs et d'appliquer tous les théorèmes d'analyse.*
- *au second niveau, on peut employer la forme développée du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Cette écriture est beaucoup utilisée dans les problèmes linéaires. Comme $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, toute l'algèbre linéaire s'applique.*
- *on peut utiliser la forme factorisée ; lorsque P est scindé (ce qui est toujours le cas sur $\mathbb{C}$), celui-ci s'écrit $P = c \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ avec les racines λ_k. Dans le cas général des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, la factorisation de P peut aussi faire apparaître des facteurs irréductibles du second degré (à discriminant strictement négatif). Cela permet de faire de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.*

1. On notera bien que l'inconnue X **n'est pas un nombre** et que c'est un non-sens d'écrire une phrase comme « lorsque $X = 1$ ». La formulation correcte consiste à dire qu'« on substitue la valeur 1 dans l'inconnue ».

Exercice 14 : les polynômes de Tchebychev

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout réel θ, on ait
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Pour $n \geqslant 1$, déterminer les racines de T_n.

Indication : pour la première question, on peut raisonner par récurrence double mais il est encore plus élégant d'utiliser la formule de Moivre.

Exercice 15 : L'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice 16 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que son dérivé P' est aussi un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.
Indication : on peut chercher des racines de P' entre les racines de P puis des racines communes à P et à P'.

Exercice 17 : Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On souhaite prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad \exists A, B \in \mathbb{R}[X], \quad P = A^2 + B^2.$$

1. Traiter le cas où P est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Traiter le cas où P n'a aucune racine réelle.
3. Traiter le cas général.

Indications : pour la première question, regarder les multiplicités des racines réelles ; pour la seconde question, utiliser le fait que les racines complexes sont conjuguées entre elles.

Exercice 18 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de P comptées avec multiplicités. Exprimer $\frac{P'}{P}$ en fonction des λ_k.

Exercice 19 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels distincts. On pose :
$$\forall k \in [\![0\,;n]\!]\,, \quad L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser les coordonnées d'un polynôme P dans la base $\mathscr{B}$.
2. En déduire une démonstration du fait que le déterminant de Vandermonde associé aux nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ n'est pas nul.

Exercice 20 : Soit $P = X(X-1)(X-2)\ldots(X-n)$ et $Q = X^n - 1$. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles $F = \dfrac{1}{P}$ et $G = \dfrac{1}{Q}$.
Indication : il y a 2 formules pour calculer le coefficient associé à un pôle simple.

Exercice 21 ($\star$) **:** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$. On note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. On suppose que toutes les racines de P sont dans D. Montrer que toutes les racines de son dérivé P' sont dans D.

D Espaces vectoriels

La puissance de l'algèbre linéaire n'est plus à démontrer. Elle est omniprésente en Mathématiques et dans toutes les autres sciences. Nous verrons en deuxième année, avec le calcul différentiel, pourquoi elle intervient, même pour gérer des problèmes qui n'ont pas l'air linéaires a priori. Dans le programme de MPSI, on peut séparer les aspects géométriques (vecteurs, sous-espaces vectoriels, applications linéaires) et les aspects matriciels. Cette première série d'exercices s'intéresse aux aspects géométriques.

Exercice 22 : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$.
Indication : quel est le sens de la notation Vect(...) *?*

Exercice 23 : Soient $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ des réels. La lettre E désigne l'ensemble des fonctions réelles, définies sur $[a_1\,; a_4]$, continues sur cet intervalle, et dont les restrictions à chacun des intervalles $[a_i\,; a_{i+1}]$ ($i \in \{1,2,3\}$) sont affines.
Montrer que E est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Exercice 24 : Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, quel est le rang de la famille $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$ définie par : $\forall k \in [\![1\,;2n]\!]\,,\ y_k = (k+1, k+2, k+3, \ldots, k+n)$?

Exercice 25 : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. *Indication : pour chaque $m \in \mathbb{N}$, raisonner dans $\mathbb{R}_m[X]$, qui est de dimension finie.*

Exercice 26 : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Considérons F et G deux sous-espaces de E.

1. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Si F et G sont deux hyperplans, préciser selon le cas la dimension de leur intersection.

Exercice 27 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in L(E)$. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 28 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$
Montrer que l'application Δ est linéaire. Déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$ puis $\mathrm{Im}\,\Delta$.

Exercice 29 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que : $\dim \mathrm{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f \ + \ \dim \mathrm{Ker}\, g$.
Indication : utiliser la restriction de g à $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 30 : Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_p = \mathrm{Im}\, f^p \qquad \text{et} \qquad N_p = \mathrm{Ker}\, f^p.$$

1. Montrer que $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et que $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$. Montrer que $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s considérés à la question précédente. Pour $s \geqslant r$, montrer que $I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires.
5. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait $f \circ f(P) = P'$.

Indication : les deux parties de la question 2 ne sont pas indépendantes. On rappelle que f^p désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (p fois).

Exercice 31 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un scalaire $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda(x) \cdot x$.

1. Montrer que, pour chaque $x \in E \setminus \{0_E\}$, le scalaire $\lambda(x)$ dont il est question ci-dessus est unique.
2. Montrer que f est une homothétie.

Indication : cela revient à démontrer que
$$\forall x, y \in E \setminus \{0_E\}, \quad \lambda(x) = \lambda(y).$$
On pourra le démontrer en distinguant deux cas selon que la famille (x, y) est libre ou non.

Exercice 32 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $e_2 = f(e_1)$.
2. En déduire les $f \in L(E)$ tels que $\forall g \in L(E),\ f \circ g = g \circ f$.

Exercice 33 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On dit que $f \in L(E)$ est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^q = 0$. On appelle *indice de nilpotence* de f le plus petit entier q tel que $f^q = 0$. Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent. Notons p son indice de nilpotence.
Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\big)$ soit libre. En déduire que $f^n = 0$.

E Matrices

Dans un espace de dimension n, on peut introduire une base et associer à chaque vecteur une collection de n nombres puis, à chaque endomorphisme, une collection de n^2 nombres qu'on représente sous la forme d'un tableau. On développe le calcul matriciel afin qu'il corresponde aux opérations usuelles sur les applications linéaires. Pour maîtriser l'aspect matriciel de l'algèbre linéaire, il est crucial de bien maîtriser la correspondance entre matrice et application linéaire. Un conseil à ce propos : n'en faites jamais l'économie ! Prenez le temps dans votre solution d'introduire une (ou plusieurs) base(s) et d'explicitez quelle matrice correspond à quelle application linéaire dans quelle(s) base(s).

Exercice 34 : Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $AM = MA$.
Indication : utiliser la base canonique.

Exercice 35 : Soit $\Phi, \Psi \in L(\mathbb{R}_n[X])$ définis par

$$\Phi : P \mapsto P(X+1) \qquad \text{et} \qquad \Psi : P \mapsto P'.$$

1. Donner les matrices M, N de Φ, Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que M est inversible et donner son inverse. N est-elle inversible ?

Conseil : numéroter les lignes et les colonnes de $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de 0 à n.

Exercice 36 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{C})$ et une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ telles que $A = CL$.
2. Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Exercice 37 : Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *à diagonale dominante* lorsque :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,.$$

1. Donner un exemple de matrice à diagonale dominante de taille n dont aucun terme n'est nul.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale dominante et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. En utilisant un indice $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que
$$|x_k| = \max\Big\{\, |x_j| \ ;\ j \in [\![1\,;n]\!] \,\Big\},$$
montrer que $X = 0$.
3. Que peut-on en déduire sur la matrice A ?

Exercice 38 :

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure stricte* lorsqu'elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont nuls.
Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $N_k = \mathrm{Ker}\, f^k$.
   (a) Montrer que $\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_p = E$.
   (b) Pour $k \in [\![1\,;p]\!]$ et $x \in N_k$, montrer que $f(x) \in N_{k-1}$.
   (c) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte.

Indication : pour la première question, si M est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, dans quel sous-espace se trouve le vecteur $f(e_i)$? La notation $A \subsetneq B$ signifie que $A \subset B$ mais que $A \neq B$.

On donne les définitions de matrices équivalentes et de matrices semblables. Pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit :

- que A et B sont équivalentes lorsqu'il existe deux matrices inversibles P, Q telles que $B = QAP$;
- que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

On démontre que deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang. L'étude de la relation de similitude (c'est-à-dire le fait que deux matrices soient semblables) est plus subtile et nous y consacrerons une partie du cours de deuxième année.

Exercice 39 : Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on définit la matrice

$$J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quelles sont les matrices équivalentes à J_r ?
2. Quelles sont les matrices semblables à J_r ?

Exercice 40 ($\star$) :

1. Montrer que deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont toujours équivalentes.
2. Déterminer à quelle condition deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

F Déterminants

L'outil principal pour le calcul des déterminants est le développement par rapport à une ligne ou à une colonne. Il ne faut toutefois pas oublier les aspects les plus élémentaires sur les déterminants qui suffisent à conclure dans pas mal de cas :

- *le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes et aussi par rapport aux lignes.*
- *le déterminant est alterné : dès que deux colonnes sont égales, le déterminant est nul ; plus généralement, dès que la famille des colonnes est liée, le déterminant est nul (ces remarques sont valables pour les lignes).*
- *le déterminant sert à savoir si une matrice est inversible, si une famille de vecteurs est une base, si un endomorphisme est bijectif.*

Exercice 41 : Que vaut le déterminant d'un endomorphisme nilpotent ?

Exercice 42 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $b \neq c$. On note

$$M = \begin{bmatrix} a & c & \dots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose $M(x) = \begin{bmatrix} a-x & c-x & \dots & c-x \\ b-x & a-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c-x \\ b-x & \dots & b-x & a-x \end{bmatrix}$
   puis on définit $P(x) = \det(M(x))$.
   Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2. En déduire la valeur de $\det(M)$.

Indication : pour la première question, on peut faire des opérations sur les lignes ou les colonnes pour diminuer le nombre de x dans la matrice.

Exercice 43 : Soient a, b deux nombres complexes tels que $a \neq b$. Calculer

$$W_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad \text{(déterminant de taille } n)$$

Indication : établir une relation de récurrence double.

Exercice 44 ($\star$) : Pour $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S une partie de $[\![1\,;n]\!]$ de cardinal $p \geqslant 1$, on note A_S la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par $A_S = [a_{i,j}]_{(i,j)\in S^2}$. On note Δ_n^+ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A_S) > 0$ pour toute partie non vide S de $[\![1\,;n]\!]$. Si $A \in \Delta_n^+$, montrer que $A^{-1} \in \Delta_n^+$.

G Espaces euclidiens

Les espaces euclidiens permettent d'approfondir le lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie. Sur ce chapitre, il est donc particulièrement important de rappeler un conseil général : faites des dessins ! Il est bien plus intuitif de visualiser un projecteur orthogonal avec une figure. L'algorithme de Gram-Schmidt vous paraîtra impossible à retenir jusqu'à ce que vous fassiez un dessin pour comprendre qu'à chaque étape on cherche le projeté orthogonal du nouveau vecteur sur le sous-espace engendré par les vecteurs précédents. Les dessins dont vous avez besoin ne sont pas des œuvres d'art mais des schémas qui guident votre intuition [2].

Exercice 45 : Soit $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Pour $f, g \in \mathbb{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on pose

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est une famille orthogonale de $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Est-elle orthonormale ?

2. Ce conseil n'est pas valable seulement dans les espaces euclidiens ! Par exemple la trigonométrie ne s'apprend qu'à force de dessiner des cercles trigonométriques pour y visualiser les formules.

Exercice 46 : Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \operatorname{Tr}({}^t\!A\, B)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\operatorname{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$.
3. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|\ \|B\|$.

Exercice 47 : Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $\quad \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : pour la réciproque, prendre $x \in \operatorname{Im} p$, $y \in \operatorname{Ker} p$ puis appliquer l'hypothèse aux vecteurs $x + ty$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 48 : Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\quad (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

Exercice 49 : Déterminer la valeur du nombre

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 50 : Soit E un espace euclidien et x_0 un vecteur de E tel que $\|x_0\| = 1$. On pose $F = \operatorname{Vect}(x_0)$.

1. On note p_F le projecteur orthogonal sur F et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Pour $x \in E$, exprimer $p_F(x)$ et $s_F(x)$ à l'aide de x et x_0.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de x_0 dans $\mathcal{B}$. Exprimer les matrices de p_F et de s_F dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 51 : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe une famille orthonormale $(P_0, \ldots, P_n)$ telle que chaque polynôme P_k soit de degré k.
3. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Soit $a_1, \ldots a_p$ les racines de P_k qui sont de multiplicité impaire et situées dans $]0\,;1[$. On définit le polynôme
$$Q = (X - a_1)\ldots(X - a_p)$$
avec la convention, si P_k n'a aucune racine de multiplicité impaire située dans $]0\,;1[$, que $Q = 1$.
   (a) Montrer que $t \mapsto P_k(t)Q(t)$ garde un signe constant sur $[0\,;1]$.
   (b) En déduire que $\deg(Q) = k$.
   (c) Montrer que P_k est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $]0\,;1[$.

II Analyse

A Suites et séries

Écrivons la définition de la phrase « la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre ℓ » :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell|$$

*ce qui signifie que, quelle que soit la précision désirée ($\forall \varepsilon > 0$), il existe un rang ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$) à partir duquel ($\forall n \geqslant n_0$) la suite réalise une approximation de la limite ℓ à la précision souhaitée ($|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$). C'est une très belle définition qui, historiquement, a mis beaucoup de temps à être formalisée. Toutefois pour de nombreux exercices, on n'utilise pas directement cette définition mais plutôt les théorèmes démontrés dans le cours et qui en découlent. Il convient donc de ne pas se précipiter sur cette définition (sinon le moindre exercice simple devient plus compliqué) mais il ne faut pas non plus rechigner à l'utiliser en cas de besoin. Certains exercices plus délicats de la liste ci-dessous nécessite d'utiliser la définition. Dans ce cas, n'accumulez pas les quantificateurs : ce qu'on veut voir, c'est votre **raisonnement** écrit avec des phrases.*
Le chapitre sur les séries sera partiellement repris en deuxième année. Pour être efficace, il est important de bien comprendre la structure de tous les résultats de ce chapitre : pour étudier une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, on devrait normalement étudier la suite des sommes partielles $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$. Toutefois, dans l'immense majorité des cas, on ne sait pas calculer S_N explicitement[3] et donc les théorèmes du cours ont des hypothèses qui portent sur le terme général u_n et des conclusions qui portent sur la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$. L'emploi de ces théorèmes a donc pour objectif de vous dispenser de manipuler les sommes partielles.

Exercice 52 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que la suite $(e^{nz})_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 53 : Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Lorsque la série converge, calculer sa somme.

Exercice 54 : On pose $u_0 = 0$ puis $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l'unique point fixe de la fonction cos dans l'intervalle $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$.
Indication : utiliser l'inégalité des accroissements finis entre u_n et le point fixe.

3. à l'exception notable des séries géométriques et des séries télescopiques pour lesquelles on sait calculer les sommes partielles.

Exercice 55 : On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{1+2x^2}.$$

On souhaite étudier la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Encadrer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Dans quel cas peut-il exister $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$?

   Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \neq 1$. On cherche maintenant à démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente et on raisonne par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ pour un certain réel ℓ.
3. Montrer que $\ell = 1$.
4. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\quad \forall x \in [1-\delta\,;1+\delta], \quad f'(x) < -1$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = |u_n - u_{n-1}|$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n > n_0$, on ait $d_{n+1} > d_n$. Conclure.

Exercice 56 : On définit par récurrence la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $b_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sin(b_n)$.

1. Montrer que $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que $\frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$.
3. En utilisant le théorème de Cesaro, déterminer un équivalent de b_n.

Exercice 57 : Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels strictement positifs et A, B deux réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = A$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = B$.
Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n$.
Indication : passer au logarithme et faire un développement asymptotique.

Exercice 58 :

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On note x_n cette solution.
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Indication : une fois que vous avez trouvé un équivalent u_n de x_n, écrire x_n sous la forme $x_n = u_n + y_n$ puis réinjecter dans l'équation pour obtenir un équivalent de y_n puis recommencer.

Exercice 59 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. Considérons :

$$(A)\ \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge} \quad ; \quad (B)\ \lim_{n\to\infty} n u_n = 0$$

A-t-on $(A) \implies (B)$? A-t-on $(B) \implies (A)$? Justifiez vos réponses.

Exercice 60 : Dans chaque cas, déterminer la nature de la série $\sum u_n$:

$$u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1} \quad ; \quad u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad ; \quad u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

$$u_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln n}{3n^4 - 2}$$

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n} \quad ; \quad u_n = \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) \quad ; \quad u_n = \frac{n^2}{3^n}$$

$$(\text{pour } \alpha > 0 \text{ un paramètre}) \quad u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad ; \quad u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$$

B Fonctions usuelles et développements limités

Le calcul asymptotique joue un rôle central dans le programme de deuxième année. Plus largement, une bonne maîtrise des techniques asymptotiques (calculs de limites, développements limités) est indispensable en analyse. Il est donc particulièrement important de mutiplier les occasions de vous entraîner à pratiquer ces calculs. Voici quelques conseils :

- *essayez de prévoir l'ordre des DL dont vous aurez besoin afin d'éviter les calculs inutiles.*
- *ne conservez jamais des termes plus petits qu'un $o(...)$ qui apparaît dans la même somme : ce ne serait pas cohérent.*
- *séparez vos calculs avec des étapes intermédiaires pour éviter les expressions énormes qui amènent presque toujours à des erreurs de calcul.*
- *n'oubliez pas que « 1^∞ » est aussi une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, passez au logarithme.*
- *n'additionnez jamais deux équivalents, ne passez jamais un équivalent à l'exponentielle ou au logarithme. Pour faire cela proprement, il faut revenir à une écriture avec $o(...)$. À ce propos, rappelons que*

  $$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

  Il y a donc bien un $o(...)$ sous-entendu dans un équivalent : c'est l'équivalent lui-même qu'il faut mettre dans le $o(...)$.

- *que faire des constantes numériques ? Dans une somme, on les néglige si elles sont face à une quantité qui tend vers l'infini ; par exemple* $2+n\sim n$. *Au contraire, elles sont prépondérantes si elles sont à côté d'une quantité qui tend vers* 0 *; par exemple* $3+\frac{1}{\sqrt{n}}\sim 3$. *Dans un produit, on ne doit pas simplifier les constantes numériques ; ainsi* $2n \not\sim n$ *(le quotient vaut* 2 *et il ne tend pas vers* 1*).*
- *les équivalents passent à n'importe quel exposant* ***fixe*** *; si* $u_n\sim v_n$ *alors* $u_n^2\sim v_n^2$ *et, si les suites sont positives,* $\sqrt{u_n}\sim\sqrt{v_n}$. *En revanche, on ne peut pas élever un équivalent à une puissance non fixe. Par exemple*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ et } \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \textit{donc} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

mais

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} e \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

donc, après passage à l'exposant n*, les deux suites ne sont plus équivalentes.*

Exercice 61 : Simplifier les expressions $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$.
Indication : n'oubliez surtout pas de mentionner l'intervalle où se situe $\arctan x$.

Exercice 62 :

1. Pour $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ et $p,q\in\,]1\,;+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, montrer que
$$xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$
Indication : fixer y *et étudier une fonction de la variable* x.
2. En appliquant l'inégalité précédente, démontrer par récurrence l'inégalité arithmético-géométrique : pour tous $x_1,\dots,x_n$ des réels positifs,
$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

Exercice 63 : Déterminer un équivalent de $\arccos(1-x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 64 : Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\neq 0,\ f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

Exercice 65 : Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

1. ordre quelconque : $\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; $\sqrt{1-2x}$.
2. ordre 3 : $\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+\frac{x}{2}}$; $\sqrt{1+e^x}$; $\dfrac{1}{\arcsin x}-\dfrac{1}{x}$.
3. ordre 4 : $\dfrac{x}{\cos x}$; $e^x\ln(1+2x)$

Indication : pour $\sqrt{1-2x}$, *écrire le résultat avec des factorielles.*

Exercice 66 : Étudier les limites en 0 des expressions suivantes :

$$\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)} \quad ; \quad \frac{3\tan 4x-4\tan 3x}{3\sin 4x-4\sin 3x}$$

$$\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{1}{\ln\cos x} \quad ; \quad \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

Indication : des développements limités permettent d'obtenir un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

Exercice 67 : Étudier les limites suivantes :

$$\text{En } 1 : \quad \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} \quad ; \quad \frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$$

$$\text{En } +\infty : \quad \frac{\sin\left(\frac{x+1}{x}\right)-\sin\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad \frac{(x+\ln x)^x}{x^{x+1}}$$

Indication : on peut faire un changement de variable pour se ramener à un développement limité en 0.

Exercice 68 :

1. Montrer que $f:x\mapsto\ln(1+x+x^3)$ définit une bijection d'un intervalle ouvert I contenant 0 vers un intervalle ouvert J contenant 0. On note $g:J\to I$ la réciproque de cette bijection.
2. Donner un développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Indication : montrer que $g(y)$ *possède un DL (avec des coefficients inconnus). Injecter le DL de* $f(x)$ *dans celui de* $g(y)$ *pour obtenir un système sur ces coefficients.*

C Continuité, dérivabilité, convexité

Voici le domaine des « grands théorèmes de l'analyse » comme le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis. Je vous signale un certain nombre de résultats dont les énoncés sont souvent mal restitués par les étudiants. Reprenez votre cours de MPSI pour les apprendre avec précision :

- *le théorème des valeurs intermédiaires, qui est un théorème d'existence. Ce n'est pas un résultat d'unicité.*
- *existence de limites à droite/à gauche pour une fonction monotone.*
- *le théorème de la limite de la dérivée, qui sert à prouver la dérivabilité de f en un point exceptionnel.*
- *la formule de Taylor avec reste intégral.*

À propos des accroissements finis, gardez en tête l'interprétation cinématique ($f(t)$ = position tandis que $f'(t)$ = vitesse) car elle fournit une bonne intuition des résultats. Par exemple, une majoration de $|f'|$ permet de majorer $|f|$ (si la vitesse reste toujours petite, on ne peut pas aller très loin) ; en revanche, une majoration de $|f|$ ne dit rien sur $|f'|$ (un photon coincé entre deux miroirs va très vite mais il ne va pas très loin).

Exercice 69 : Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction continue.

1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Si f est décroissante, montrer que f possède un unique point fixe.

Exercice 70 : Vrai ou faux ?

1. La somme de deux fonctions impaires est impaire.
2. La composée de deux fonctions impaires est impaire.
3. La composée de deux fonctions monotones est monotone.
4. Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
5. Toute fonction périodique monotone est constante.
6. Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
7. Toute fonction monotone sur $\mathbb{R}$ admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.
8. Toute fonction admettant en un point des limites égales à droite et à gauche est continue en ce point.
9. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $f(a)$, alors f est continue en a.
10. L'image d'un intervalle ouvert par une application continue est un intervalle ouvert.
11. Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
12. La fonction partie entière est continue sur $[0\,;1[$.

Exercice 71 : Soit $k > 0$ un réel et $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne sur l'intervalle $[0\,;1]$. Dans chaque cas, donnez la meilleure majoration possible de $M = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ en tenant compte de la contrainte imposée :

1) lorsque $f(0) = 0$ 2) lorsque $f(1) = 0$

3) lorsque $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ 4) lorsque $f(0) = f(1) = 0$.

Indication : faites un dessin. Par exemple pour la première condition, on sait que $f(0) = 0$, ce qui donne un point de la courbe de f et on sait par ailleurs que f est k-lipschitzienne. Cela permet d'encadrer le graphe de f entre deux droites.

Exercice 72 : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 73 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue et surjective. On suppose que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est borné.

1. Soit $A > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $B \geqslant 0$ tel que $\forall x > B,\ f(x) \neq A$.
2. Montrer que $f(]B\,;+\infty[) \subset]A\,;+\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et surjective qui ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. Justifier que cet exemple convient.

Exercice 74 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

En recherchant un minimum de f sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction f' s'annule.
Indication : le théorème des bornes offre l'existence d'un minimum mais il ne fonctionne que sur un ***segment****. Il faut donc utiliser les hypothèses pour se ramener à un segment.*

Exercice 75 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Quand cela est défini, on note $m_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+t$ puis entre x et $x-t$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{m_0}{t} + \frac{m_2\, t}{2}.$$
2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $m_1 \leqslant \sqrt{2\, m_0\, m_2}$.

Exercice 76 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.
2. Dans cette série de questions, on suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ et on veut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
   (a) Fixons $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall x \in [n_0 \,;\, n_0+1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}.$$
   (b) Trouver une constante M telle que pour tout réel $y \geqslant n_0$, on ait
   $$|f(y)| \leqslant M + (y - n_0)\frac{\varepsilon}{2}.$$
   (c) Conclure.
3. Étudier les réciproques des implications démontrées ci-dessus.

Exercice 77 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$ pour que l'application f définie par
$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f(x) = \left| \begin{array}{ll} a\sqrt{x} & \text{si } x \in]0\,; x_0[\\ x^2 + 12 & \text{si } x \in [x_0\,; +\infty[\end{array} \right.$$
soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 78 ($\star$) **:** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la propriété :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in [x\,; x+\delta], \quad f(y) \geqslant f(x) \qquad (C)$$
Montrer que f est croissante. Donner un exemple de fonction non-croissante vérifiant la propriété (C).

Exercice 79 : Soit f une fonction convexe sur $[0\,;1]$. Sur quel intervalle la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) + f(1-x)$ est-elle définie ? Étudier son sens de variation.

Exercice 80 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

D Intégration

Sur ce chapitre, il est important de bien maîtriser les points suivants :

- *dérivation de la fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *sommes de Riemann.*
- *primitives usuelles, intégration par parties et changement de variable.*

Exercice 81 : Primitiver les fonctions arcsin et arctan.

Exercice 82 : Primitiver $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 83 : Primitiver $\dfrac{1}{\cos x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 84 : Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\quad 0 \leqslant e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$

Exercice 85 : Déterminer le signe de $\ln(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k}$.

Exercice 86 : Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $S_n(k) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$.
En comparant les termes p^k, $(p+1)^k$ et $\int_p^{p+1} x^k\,\mathrm{d}x$, déterminer un équivalent de $S_n(k)$ lorsque n tend vers l'infini (à k fixé).

Exercice 87 : Donner un équivalent simple de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,e^{k/n}$.

Exercice 88 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On suppose ici que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.
2. Soit $T > 0$. On suppose maintenant que la fonction f est T-périodique. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 89 : Soit $k \geqslant 0$ et $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Montrer que l'application F définie par :
$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
est lipschitzienne de rapport inférieur ou égal à $\dfrac{k}{2}$.
Indication : un changement de variable ramène à une intégrale de 0 *à* 1.

Exercice 90 : Pour $u > 0$, on pose $f(u) = \displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0\,;+\infty[$. On précisera les valeurs en 0 des prolongements de f et de f'.
Indication : utiliser la décroissance de cos *sur un intervalle à droite de* 0.

E Équations différentielles

Le cours de première année sur les équations différentielles est très bref et centré sur la résolution explicite d'équations différentielles à l'aide des fonctions usuelles. Il faut bien maîtriser la technique de variation de la constante et comprendre la preuve de la résolution de l'équation du premier ordre qui repose sur la dérivation de $x \mapsto e^{\lambda x} f(x)$. La résolution de l'équation du second ordre à coefficients constants est très utilisée en Physique et doit être connue.

Exercice 91 : Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait $f'(x) = f(-x) + e^x$.
Indication : à cause de la présence de $f(-x)$, ce n'est pas une vraie équation différentielle mais, en redérivant, on obtient une équation du second ordre.

Exercice 92 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions telles que
$$g \text{ est paire} \quad ; \quad h \text{ est impaire} \quad ; \quad f = g + h.$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ ssi g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$.
2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(-x).$$

Exercice 93 : Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite additive lorsque
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Soit f une fonction additive continue. Exprimer $f(\lambda x)$ en fonction de $f(x)$ pour λ successivement dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. En déduire la liste de toutes les fonctions additives continues.
2. Grâce à l'intégration, montrer que toute fonction additive continue est de classe $\mathscr{C}^1$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 94 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie pour tout x :
$$f(x) + f'(x) > 0$$
Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

F Fonctions de deux variables

Le cours de première année sur les fonctions de deux variables se concentre sur le calcul et la manipulation des dérivées partielles. Il sera complété en deuxième année par un cours plus général sur les fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. Pour l'heure, voici deux exercices d'entraînement sur les manipulations des dérivées partielles.

Exercice 95 : Soit $f\colon (x, y) \mapsto e^{x \sin(y)}$. Étudier les extrema de f.

Exercice 96 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x, y) = f\big(f(y, y), f(y, x)\big)$. Exprimer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f.

III Probabilités

*Voilà bien un chapitre où il est facile de dire de nombreuses bêtises. Gardez en tête l'idée suivante : les probabilités sont une partie des Mathématiques tout aussi rigoureuse que le reste ; laissez les explications fumeuses de côté et appliquez plutôt les définitions et les théorèmes du cours. Le but des probabilités est de quantifier l'**information** disponible (oubliez l'image du hasard qui agirait par magie...) ; la probabilité est une fonction permettant de quantifier à quel point un événement risque de se produire (ou pas) d'après les informations dont on dispose. Quand on calcule une probabilité conditionnelle $P(A|B)$, on ne modifie pas l'événement A (l'événement « A sachant B » n'existe pas !) et on ne modifie pas non plus l'univers des possibles Ω mais on change la fonction de probabilité (P_B au lieu de P) afin de prendre en compte l'information nouvelle (à savoir que l'événement B s'est produit) pour recalculer les probabilités de tous les événements.*
Le programme de première année se limite au cadre des espaces probabilisés finis. On peut distinguer trois grands types d'exercices :

- *une description peu formalisée de l'expérience aléatoire est proposée par l'énoncé (boules dans des urnes, etc) et on sait décrire l'univers des possibles Ω avec une probabilité uniforme. Alors l'exercice de probabilités devient un exercice de dénombrement et il faut calculer le cardinal d'une partie de Ω pour répondre.*
- *l'énoncé donne un certain nombre d'informations indirectes qu'on traduit en donnant les valeurs des probabilités d'un certain nombre d'événements (ou des probabilités conditionnelles). On utilise alors les formules du cours telles que la loi des probabilités totales ou la formule de Bayes pour obtenir les autres probabilités demandées.*
- *l'énoncé impose ou suggère l'emploi de variables aléatoires. On utilise alors les formules sur les lois usuelles dans le but de calculer des espérances, des variances, etc.*

Exercice 97 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$. Montrer que
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$
2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, et avec remise, 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire modélisant le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 98 : Une urne contient dix boules rouges, dix boules vertes et dix boules bleues. On tire simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité que le tirage soit unicolore ? bicolore ? tricolore ?

Exercice 99 : On fixe un entier $n \geqslant 1$. On choisit un entier au hasard entre 1 et n. On note X ce premier nombre. On choisit ensuite un entier au hasard entre 1 et X. On note Y ce deuxième nombre. Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.
Indication : attention, la notation $\mathcal{U}_X$ ne veut rien dire ! Pour traduire proprement les hypothèses de l'énoncé, il faut passer par le calcul des probabilités conditionnelles $P(Y = k | X = \ell)$.

Exercice 100 : Une urne contient au départ une boule jaune et une bleue. On y effectue une série de N extractions selon le protocole suivant : chaque fois que l'on obtient une boule jaune, on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule bleue. Quand on tire la boule bleue, on la remet dans l'urne.
Soit X_N la variable aléatoire modélisant le rang d'apparition de la première boule bleue au cours des N extractions ($X_N = \infty$ si la boule bleue n'apparaît pas). Quelle est la loi de X_N ? Que vaut $\lim\limits_{N\to\infty} P(X_N = \infty)$? Interpréter.

Exercice 101 : Une série d'appareils (numérotés $1, 2, 3, \dots$) transmettent un bit de message (0 ou 1). Chaque appareil transmet fidèlement le bit qu'il reçoit avec une probabilité $q \in]0\,;1[$ et le change en son contraire avec une probabilité $p = 1 - q$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n la probabilité que le bit à l'entrée du transmetteur n soit le même qu'à l'entrée du transmetteur 1 (ainsi $\pi_1 = 1$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer π_{n+1} en fonction de π_n.
2. Montrer que $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Exprimer π_n en fonction de n et de p.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$. Que remarque-t-on ?

Exercice 102 : On joue à pile ou face n fois de suite avec une pièce équilibrée. On définit les événements suivants :

- A_n : au cours des n lancers, on a obtenu au moins une fois "pile" et au moins une fois "face".
- B_n : au cours des n lancers, on a obtenu au plus une fois "pile".

1. Pour $n \geqslant 2$, calculer les probabilités de A_n et de B_n.
2. Les événements A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?
4. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geqslant 2$ les événements A_n et B_n sont-ils indépendants ?

Exercice 103 ($\star$) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$, on considère une variable aléatoire S_n qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Pour tout λ tel que $0 < \lambda < p$, montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant \lambda n) = 0.$$