Cahier de vacances après la MPSI

La partie de la deuxième année de CPGE qui se situe avant les écrits des concours est plus courte que la première année (seulement 25 semaines de cours) mais plus intense, ce qui rend délicat le rattrapage d'éventuels retards. Il est donc important de la démarrer dans les meilleures conditions possibles. Il est ainsi fortement déconseillé de ne rien faire du tout pendant les deux mois d'été qui arrivent ! Le plus efficace est de consolider le programme de sup.

La liste d'exercices qui suit est conçue pour vous faire réviser une grande partie du programme de MPSI en insistant bien sûr sur la connaissance du cours mais aussi sur la mise en application de ces notions. Un travail approfondi sur cette liste d'exercices devrait vous aider pour l'année prochaine.

Les exercices ont été regroupés selon les grands thèmes du programme. Beaucoup d'entre eux sont classiques et vous les aurez peut-être déjà traités en première année. C'est l'occasion de vérifier si vous savez les refaire. Ne vous contentez pas d'une vague idée. Rédigez vraiment votre solution puis comparez avec le corrigé. Aviez-vous tous les arguments ? Étiez-vous clair ? Votre solution est-elle la plus simple possible ? Ne vous contentez pas d'avoir le bon résultat. Connaître les bonnes méthodes vous permettra de progresser vers des exercices plus difficiles. Certains exercices sont plus difficiles ou plus astucieux. Ils sont signalés par une étoile ($\star$). Voyez-les comme des petits défis et attaquez les sans complexes mais aussi sans pression si vous n'y arrivez pas facilement.

I Algèbre

A Nombres complexes et calculs algébriques

En Mathématiques comme en Physique, les calculs jouent un rôle central. Il est rare que vous soyez amenés à rédiger des calculs très longs dépassant la dizaine de lignes. Toutefois il est important d'être sûr de soi dans la connaissance du cours et dans les calculs : il est très difficile d'aboutir à un résultat si on doute à chaque ligne de la validité de ce qu'on écrit. Cette assurance ne s'obtient que grâce à la maîtrise des techniques classiques et, pour obtenir cette dernière, une pratique intensive est indispensable. Les exercices ci-dessous illustrent un certain nombre de techniques de calcul usuelles sur les nombres réels et complexes.

Une remarque concernant les nombres complexes : pour traiter un exercice dans $\mathbb{C}$, on peut se placer à trois niveaux d'abstraction :

- *le niveau le plus élevé où on calcule directement dans le corps $\mathbb{C}$. On utilise alors le nombre complexe z lui-même, son conjugué $\overline{z}$ et parfois $|z|$. On utilise alors $i^2=-1$ et parfois aussi les propriétés de $j=e^{2i\pi/3}$: $1+j+j^2=0$, $j^3=1$ et $\overline{j}=j^2$.*
- *le niveau intermédiaire où on utilise la forme trigonométrique $z=re^{i\theta}$ avec $r\geqslant 0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.*
- *le niveau le plus bas où on calcule les parties réelles et imaginaires des nombres complexes ; cela revient à assimiler $\mathbb{C}$ au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Cette technique amène souvent les calculs les plus compliqués et il faut la réserver aux situations les plus simples (ou bien à la fin d'un exercice où, après avoir calculé directement dans $\mathbb{C}$, on veut isoler la partie réelle ou la partie imaginaire du résultat).*

Par exemple, si on cherche les nombres $z\in\mathbb{C}^*$ tels que $z^3=1$, l'approche avec l'écriture algébrique $z=x+iy$ mènerait à la résolution du système non linéaire $\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ 3x^2y-y^3=0\end{cases}$ ce qui n'est pas très facile. Il est beaucoup plus efficace de résoudre $z^3=1$ en cherchant z sous la forme $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ car alors $z^3=1$ si et seulement si $r=1$ et $3\theta\equiv 0\,[2\pi]$.

Cette remarque est particulièrement vraie quand on manipule l'exponentielle complexe : il faut éviter de se précipiter sur le remplacement $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Exercice 1 : Soit θ un nombre réel et n un entier naturel. Calculer les deux sommes $A=\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ et $B=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$.
Indication : utiliser l'exponentielle complexe.

Si $\theta\equiv 0\ [2\pi]$, il est clair que A est nulle et que

$$B=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n.$$

Dorénavant, supposons $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$. Il vient alors $e^{i\theta}\neq 1$ et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}&=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\\ &=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} &&\text{(factorisation de l'angle moitié)}\\ &=e^{i\frac{n\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire de cette expression [1], il vient :

$$A = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Pour B, on commence par calculer :

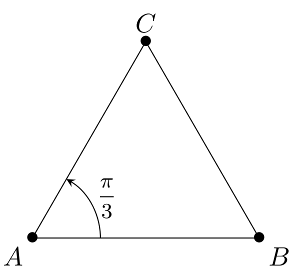
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta} = \left(1+e^{i\theta}\right)^n = \left[2\,e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}\right]^n = 2^n e^{i\frac{n\theta}{2}}\cos^n\!\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

En passant à la partie réelle, on obtient :

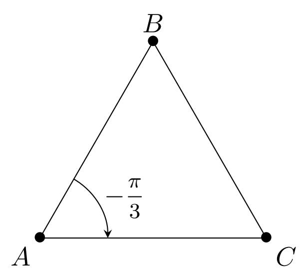
$$B = 2^n\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\ \cos^n\!\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 2 : On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Soient A, B et C trois points distincts d'affixes a, b et c. Montrer qu'ils forment un triangle équilatéral si et seulement si j ou j^2 est solution de $az^2+bz+c=0$.
Indication : utiliser une rotation pour traduire le caractère équilatéral.

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pm\frac{\pi}{3}$.



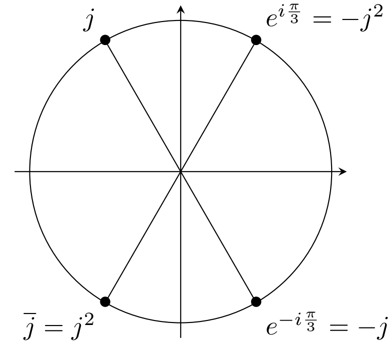
ou



On trouve les deux possibilités [2] :

$$\text{(i)}\ \ c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \qquad \text{ou} \qquad \text{(ii)}\ \ c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

En plaçant les points $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ainsi que j et j^2 sur le cercle trigonométrique, on obtient :



Par conséquent, l'éventualité (i) mène à

$$c-a = -j^2(b-a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad -(1+j^2)a + j^2b + c = 0.$$

Or nous savons que $-1-j^2 = j$ donc cela revient à dire que

$$ja + j^2b + c = 0.$$

Enfin, $j^3 = 1$ donne $j^4 = j$ si bien que l'éventualité (i) peut se réécrire $aj^4+bj^2+c=0$. Autrement dit, cela revient à dire que j^2 est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$.
De la même manière, l'éventualité (ii) revient à

$$c-a = -j(b-a) \quad \text{c'est-à-dire} \quad -(1+j)a + jb + c = 0$$

ou encore $aj^2+bj+c=0$. On interprète là encore le résultat en disant que j est solution de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Remarque : il faut prendre l'habitude de calculer avec le nombre complexe j en utilisant les trois relations :

$$j^3 = 1 \quad ; \quad 1+j+j^2 = 0 \quad ; \quad j^2 = \overline{j}.$$

Exercice 3 : Grâce à une interversion des deux sommations, calculer la somme double suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}.$$

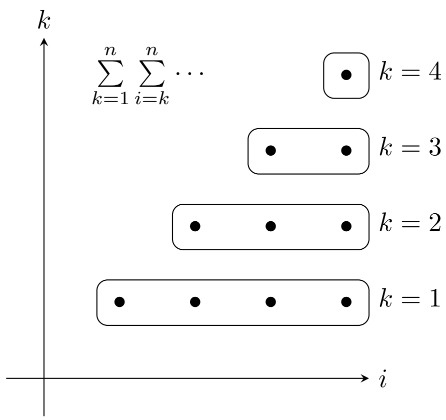
Nous pouvons écrire :

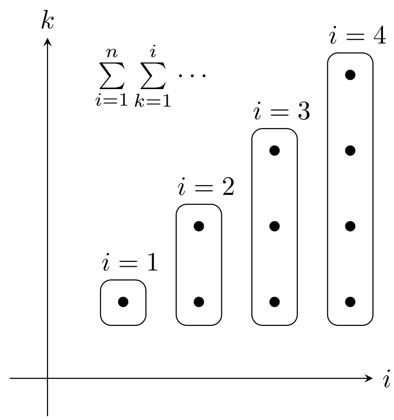
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{i}{i} = \sum_{k=1}^{n}1 = n.$$

1. Le nombre $\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est réel donc il sort de la partie imaginaire. En effet, pour $z \in \mathbb{C}$ et pour λ un nombre réel, on a $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$ ainsi que $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$.

2. On rappelle que si Ω est un point d'affixe ω et que M, M' ont pour affixes z, z', alors M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ ssi : $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$. Pour retenir cette formule dites-vous que, dans la rotation, c'est le **vecteur** $\overrightarrow{\Omega M}$ qui tourne pour devenir le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ et que l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M}$ est $z-\omega$ tandis que l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z'-\omega$.

Remarque : la subtilité de cette interversion de sommations est que les bornes de la somme sur i dépendent de k. Lors de l'interversion, il faut donc conserver l'information $i \geqslant k$. Cette information ne peut pas être écrite sur la somme de gauche (car on ne connaît pas encore les deux indices i, k quand on écrit cette somme de gauche). Il faut donc écrire les bornes fixes du premier indice (ici 1 et n) sur la borne de gauche et traduire l'information $i \geqslant k$ sur la somme de droite (ici, après interversion, on précise que $1 \leqslant k \leqslant i$). On peut interpréter cette interversion de sommation graphiquement en représentant l'ensemble des couples d'entiers (i, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$ et en représentant les deux façons de regrouper ces points qui correspondent aux deux écritures de la double somme :





Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$$

On écrit avec un seul signe de sommation :

$$S = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i, j)$$

Afin de faire apparaître la valeur du minimum, on coupe la somme en deux : les termes où $i \leqslant j$ et ceux où $j < i$ (attention à garder une inégalité stricte pour le second afin de ne pas prendre deux fois les termes où $i = j$) :

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} j$$

On en déduit, en prenant la même lettre lors de la fusion des deux sommes :

$$S = \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)i}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1) + (k-1)k}{2}$$

ce qui se simplifie en

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Autre solution : on écrit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent $\min(i, j)$. On obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

On constate que le nombre k est présent $2n - (2k - 1)$ fois dans la matrice. On en déduit S qui est la somme de tous les coefficients de cette matrice A :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} (2n - 2k + 1)k = (2n+1) \sum_{k=1}^{n} k - 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (2n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Remarque : profitons de cet exercice pour rappeler les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Je vous conseille d'apprendre ces trois sommes. La troisième formule n'est pas très difficile à retenir car c'est le carré de la première (ce qui est assez inattendu).

Exercice 5 : Soient a, b deux nombres complexes non nuls.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $|a + b| = |a| + |b|$.
2. Généraliser au cas de n nombres complexes.

1. L'idée est d'utiliser la formule $|z|^2 = z\overline{z}$. Commençons par réécrire la démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$|a+b|^2 = (a+b)\left(\overline{a} + \overline{b}\right) = a\overline{a} + b\overline{b} + \underbrace{a\overline{b} + b\overline{a}}_{=2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b)} = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{a}b)$$

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a| \cdot |b| = |a|^2 + |b|^2 + 2\,|\overline{a}b|$$

En faisant la différence, on trouve :

$$(|a| + |b|)^2 - |a+b|^2 = 2\big[\,|\overline{a}b| - \mathrm{Re}(\overline{a}b)\big].$$

Pour conclure la preuve de l'inégalité triangulaire, on dit ensuite que pour n'importe quel nombre complexe z, on a $|z| \geqslant \operatorname{Re}(z)$, ce qui permet de conclure

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|\,.$$

Pour étudier le cas d'égalité, nous allons utiliser la forme trigonométrique : $a = Ae^{i\alpha}$ et $b = Be^{i\beta}$ avec A, B des réels strictement positifs et α, β des réels. Alors :

$$\overline{a}\, b = ABe^{i(\beta-\alpha)} \quad \text{donc} \quad \operatorname{Re}(\overline{a}\, b) = AB\cos(\beta-\alpha).$$

Il en résulte que

$$|a|\ |b| - \operatorname{Re}(\overline{a}\, b) = AB\,[1-\cos(\beta-\alpha)] \quad \text{et donc}$$
$$|a+b| = |a| + |b| \iff \cos(\beta-\alpha) = 1 \iff \alpha \equiv \beta\,[2\pi].$$

En résumé, nous pouvons dire qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, les deux nombres ont le même argument (modulo 2π). Cela peut se reformuler en disant que a et b représentent des points situés sur une même demi-droite issue de 0. Une autre condition équivalente est de dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b = \lambda a$.

2. Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls. Nous allons démontrer par récurrence que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \arg(z_1) \equiv \cdots \equiv \arg(z_n)\,[2\pi].$$

Nous avons établi la récurrence au rang 2. Supposons la propriété déjà démontrée au rang $n-1$. L'implication de droite à gauche étant triviale, on suppose ici qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire et on cherche à prouver que tous les z_k ont le même argument. Écrivons tout d'abord l'inégalité triangulaire en mettant en lumière la dernière étape :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| + |z_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| + |z_n|$$

Or nous avons supposé que le premier et le dernier terme de cette ligne sont égaux. Il en est donc de même des autres. On a ainsi, en particulier,

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $z_1, \dots, z_{n-1}$ ont le même argument. Notons θ cet argument commun. Mais alors le nombre $w = \sum_{k=1}^{n-1} z_k$ a lui aussi un argument égal à θ et nous avons prouvé ci-dessus que $|w+z_n| = |w| + |z_n|$. D'après la première question de l'exercice, il vient $\arg(z_n) \equiv \arg(w) \equiv \theta\,[2\pi]$, ce qui achève la récurrence.

Remarque : lorsque certains des z_k sont nuls, on ne peut pas parler de leur argument mais on peut reformuler la propriété ainsi :
il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, il existe un réel θ et des réels $\lambda_k \geqslant 0$ tels que $z_k = \lambda_k e^{i\theta}$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Exercice 6 : Écrire les sommes suivantes sous forme de fractions :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. On constate que la somme est télescopique :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Cherchons trois nombres a, b, c tels que, pour tout entier k, on ait

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

Pour que cela soit égal à $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, il suffit que $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$ ce qui mène à $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$ d'où finalement :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

On peut faire apparaître deux sommes télescopiques :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Remarque : pour deux entiers $n \leqslant m$, on a :

$$\sum_{k=n}^{m}(x_{k+1}-x_k)=x_{m+1}-x_n.$$

Vous pouvez retenir ce résultat sur les sommes télescopiques à l'aide du moyen mnémotechnique suivant :

$$\sum(x_{k+1}-x_k)=x_{\text{plus gros indice possible}}-x_{\text{plus petit indice possible}}.$$

Lorsque la suite (x_k) possède une limite ℓ, on peut sommer jusqu'à l'infini :

$$\sum_{k=n}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)=\ell-x_n.$$

Exercice 7 : Calculer les deux produits suivants :

$$A=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad B=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Indication : les produits aussi peuvent être télescopiques.

Nous pouvons reconnaître un produit télescopique :

$$A=\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}.$$

Pour calculer B, on commence par utiliser une identité remarquable :

$$B=\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$$

On reconnaît à nouveau des produits télescopiques et il vient :

$$B=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Exercice 8 $(\star)$ **:** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$. *Indication : utiliser $j=e^{2i\pi/3}$.*

On pose $j=e^{2i\pi/3}$ et

$$S_0=\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k} \quad ; \quad S_1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+1} \quad ; \quad S_2=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+2}$$

Tout entier est de l'une des trois formes $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$. On constate donc que :

$$S_0+S_1+S_2=\sum_{\ell=0}^{3n}\binom{3n}{\ell}=(1+1)^{3n}=8^n.$$

• Pour tout entier k, il vient $j^{3k}=(j^3)^k=1$ et donc $j^{3k+1}=j$ et $j^{3k+2}=j^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(1+j)^{3n}&=\sum_{\ell=0}^{n}\binom{3n}{\ell}j^\ell\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}j^{3k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+1}j^{3k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+2}j^{3k+2}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+1}j+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{3n}{3k+2}j^2=S_0+jS_1+j^2S_2\end{aligned}$$

Remarquons que, puisque $1+j+j^2=0$, nous avons $1+j=-j^2$ et donc :

$$S_0+jS_1+j^2S_2=(-j^2)^{3n}=\left((-1)^3\right)^n j^{6n}=(-1)^n.$$

• En conjuguant l'expression précédente, il vient : $(-1)^n=S_0+\overline{j}S_1+\overline{j^2}S_2$. Or $\overline{j}=j^2$ et donc :

$$S_0+j^2S_1+jS_2=(-1)^n.$$

• En additionnant les trois relations obtenues ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}8^n+2(-1)^n&=[S_0+S_1+S_2]+[S_0+jS_1+j^2S_2]+[S_0+j^2S_1+jS_2]\\&=3S_0+(1+j+j^2)S_1+(1+j^2+j)S_2=3S_0\end{aligned}$$

et donc finalement : $\quad S_0=\dfrac{8^n+2(-1)^n}{3}.$

B Structures algébriques

Exercice 9 : Soit G un groupe. Soient H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Dans ce corrigé, on note $\cdot$ la loi de G et g^{-1} l'inverse d'un élément $g\in G$ pour cette loi.

- Lorsque $H\subset K$, alors $H\cup K=K$ est un sous-groupe de G.
- De même, lorsque $K\subset H$, alors $H\cup K=H$ est un sous-groupe de G.

- Supposons maintenant que $H \cup K$ est un sous-groupe de G. Il s'agit de montrer que $H \subset K$ ou que $K \subset H$. On suppose $H \not\subset K$ et il s'agit de montrer que $K \subset H$. Comme $H \not\subset K$, il existe un élément $h \in H$ qui ne se trouve pas dans K. Pour montrer l'inclusion $K \subset H$, prenons k un élément arbitraire de K et montrons qu'il se trouve dans H. Comme h et k appartiennent à $H \cup K$ et que $H \cup K$ est un sous-groupe de G, on sait que hk appartient à $H \cup K$.
  - Si nous avions $hk \in K$, alors en écrivant $h = (hk)k^{-1}$, on en déduirait que h appartient à K. C'est contraire à notre hypothèse.
  - Il s'ensuit que $hk \in H$. Mais alors $k = h^{-1}(hk)$ appartient aussi à H et c'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 10 : Soit $(G, \cdot, e)$ un groupe. Montrer que G est abélien si, et seulement si, l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de groupes.

- Supposons que le groupe est abélien. Pour $x, y \in G$, on peut alors écrire :
$$f(xy) = f(yx) = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$
ce qui prouve que f est un morphisme de groupes.
- Supposons que $f : x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme de groupes. Soient x, y deux éléments de G. D'après les règles de calcul sur l'inverse, on a l'égalité $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Mais comme f est un morphisme de groupes, on a aussi
$$(xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1}.$$
On a donc démontré l'égalité suivante :
$$x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$
Mais x est l'inverse de x^{-1} et y est l'inverse de y^{-1} donc, en appliquant l'égalité précédente aux éléments x^{-1} et y^{-1} à la place de x et de y, il vient :
$$xy = yx.$$
Comme c'est vrai pour tous $x, y \in G$, on a prouvé que G est abélien.

Exercice 11 : Montrer que $L = \{a + b\sqrt{2}\ ;\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Pour montrer que L est un sous-corps de $\mathbb{R}$, il faut vérifier que L contient 1 et que L est stable par addition, par multiplication, par passage à l'opposé et par passage à l'inverse.

- Le nombre 1 s'écrit $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ ce qui prouve que $1 \in L$.
- Supposons que x, y appartiennent à L. On les écrit $x = a+b\sqrt{2}$ et $y = c+d\sqrt{2}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
  - Stabilité par somme : $x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$. Comme $a + c$ et $b + d$ sont des rationnels, on a bien montré que $x + y \in L$.
  - Stabilité par produit : $xy = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$. Comme $ac + 2bd$ et $bc + ad$ sont des rationnels, on a bien montré que $xy \in L$.
  - Stabilité par passage à l'opposé : $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2}$. Comme $-a$ et $-b$ sont des rationnels, on a bien montré que $-x \in L$.
  - Stabilité par passage à l'inverse : supposons que $x \neq 0$. Commençons par vérifier que $a - b\sqrt{2}$ n'est pas nul. Si tel était le cas, nous aurions $a = b\sqrt{2}$. Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, cela imposerait $b = 0$ (car sinon, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ serait rationnel). Mais alors $a = 0$ et donc $x = 0$, contrairement à notre hypothèse. Puisque $a - b\sqrt{2} \neq 0$, on peut écrire :
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{\big(a + b\sqrt{2}\big)\big(a - b\sqrt{2}\big)} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$
Comme les deux nombres $\frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $\frac{-b}{a^2 - 2b^2}$ sont rationnels, on vient bien de vérifier que $\frac{1}{x}$ appartient à L.

Ces vérifications prouvent que L est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : Trouver tous les morphismes de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Supposons tout d'abord que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est un morphisme de corps. Notons qu'il n'y a pas de définition spécifique à un morphisme de corps (il s'agit juste d'un morphisme d'anneaux lorsque l'anneau considéré est un corps). La définition d'un morphisme d'anneaux nous dit que
$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{cases}$$
Notons que les propriétés suivantes découlent de la définition :
$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Q},\ f(-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Q}^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}.$$
En effet, pour la première, on écrit $f(0+0) = f(0)+f(0)$, ce qui mène à $f(0) = 0$. Pour la seconde, on écrit $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$. Pour la dernière, on écrit $1 = f(1) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$.

- On montre d'abord par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(nx) = nf(x)$.

- ▸ L'initialisation à $n=0$ vient de la propriété $f(0)=0$.
- ▸ Supposons avoir démontré $f(nx)=nf(x)$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$f\big((n+1)x\big)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$$

ce qui achève la récurrence.

- On montre maintenant que $f(px)=pf(x)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$ et tout $x\in\mathbb{Q}$.
  - ▸ Nous l'avons déjà démontré pour $p\in\mathbb{N}$.
  - ▸ Lorsque p est un entier négatif, alors $p=-n$ avec $n\in\mathbb{N}$. En utilisant la propriété sur l'image de l'opposé démontrée ci-dessus puis la propriété pour $f(nx)$ avec $n\in\mathbb{N}$ démontrée précédemment, on obtient :

$$f(px)=f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)=pf(x).$$

  - ▸ On montre que $f(x)=x$ pour tout rationnel x. Pour cela, écrivons $x=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$. Grâce à la propriété précédente utilisée deux fois (tout d'abord pour $p\times 1$ puis pour qx), il vient :

$$p=pf(1)=f(p)=f(qx)=qf(x)$$

d'où on déduit

$$f(x)=\frac{p}{q}=x.$$

En conclusion, ce raisonnement démontre que si $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ est un morphisme de corps, alors $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

- Inversement, il est évident que $\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme de corps de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$. D'après ce qui précède, c'est le seul.

Exercice 13 : *Centre d'un groupe.*

1. Soit $(G,\cdot,e)$ un groupe. On appelle *centre* de G l'ensemble des $x\in G$ tels que $\forall y\in G,\ xy=yx$. Montrer que le centre de G est un sous-groupe de G.
2. Montrer que l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{bmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{bmatrix}$ est un groupe pour le produit matriciel. Déterminer le centre de H.

1. Notons Z le centre de G. Montrons que Z est un sous-groupe de G.
   - Tout d'abord, $e\in Z$ car, pour tout $y\in G$, il vient $ey=y=ye$.
   - Prenons $x_1,x_2\in Z$ et montrons que $x_1x_2\in Z$. Pour cela, considérons $y\in G$ quelconque. Il vient :

$$\begin{aligned}(x_1x_2)y&=x_1(x_2y) && \text{(associativité)}\\ &=x_1(yx_2) && (\text{car } x_2\in Z)\\ &=(x_1y)x_2 && \text{(associativité)}\\ &=(yx_1)x_2 && (\text{car } x_1\in Z)\\ &=y(x_1x_2) && \text{(associativité)}\end{aligned}$$

   Cela prouve que $x_1x_2\in Z$.
   - Prenons $x\in Z$ et montrons que son inverse x^{-1} appartient à Z. Pour cela, prenons $y\in G$. On a l'égalité $xy=yx$. En multipliant du côté gauche par x^{-1}, il vient (on ne détaille plus l'utilisation de l'associativité) : $y=x^{-1}yx$. On multiplie ensuite par x^{-1} du côté droit et cela donne $yx^{-1}=x^{-1}y$. On a montré que $x^{-1}\in Z$.

   Ces trois vérifications démontrent bien que E est un sous-groupe de G.
2. On montre que H est un sous-groupe[3] de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
   - En prenant $x=y=z=0$, on voit que $I_3\in H$.
   - Si $M=\begin{bmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{bmatrix}$ et $M'=\begin{bmatrix}1&x'&z'\\0&1&y'\\0&0&1\end{bmatrix}$ appartiennent à H, on constate que

$$MM'=\begin{bmatrix}1&x+x'&z+z'+xy'\\0&1&y+y'\\0&0&1\end{bmatrix}\in H.$$

   - De plus, en prenant $x'=-x$, $y'=-y$ et $z'=-z+xy$, on constate que $MM'=I_3$, c'est-à-dire $M'=M^{-1}$. Cela prouve que, si $M\in H$, alors $M^{-1}\in H$.

   En reprenant les notations précédentes pour M et M', on voit que

$$M'M=\begin{bmatrix}1&x'+x&z'+z+yx'\\0&1&y'+y\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

   Il s'ensuit que M est dans le centre de H ssi

$$\forall(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\quad\begin{cases}x+x'=x'+x\\ z+z'+xy'=z'+z+yx'\\ y+y'=y'+y\end{cases}$$
$$\iff \forall(x',y')\in\mathbb{R}^2,\ \ xy'=yx' \iff x=y=0.$$

3. Pour montrer que H est un groupe, il est souvent plus facile de prouver que H est un sous-groupe d'un groupe déjà connu.

Pour la dernière équivalence, le sens $\Leftarrow$ est évident. Pour le sens $\Rightarrow$, on prend d'abord $x' = 0$ et $y' = 1$, ce qui donne $x = 0$ puis on prend $x' = 1$ et $y' = 0$, ce qui donne $y = 0$.

En conclusion, le centre de H est l'ensemble

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; z \in \mathbb{R} \right\}.$$

C Polynômes

Les polynômes sont des objets spectaculairement efficaces car les techniques disponibles sont très nombreuses.

- *au premier niveau, on peut utiliser les fonctions polynomiales en remplaçant*[4] *l'inconnue X par un nombre x. Cela permet de faire des calculs et d'appliquer tous les théorèmes d'analyse.*
- *au second niveau, on peut employer la forme développée du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Cette écriture est beaucoup utilisée dans les problèmes linéaires. Comme $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, toute l'algèbre linéaire s'applique.*
- *on peut utiliser la forme factorisée ; lorsque P est scindé (ce qui est toujours le cas sur $\mathbb{C}$), celui-ci s'écrit $P = c \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ avec les racines λ_k. Dans le cas général des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$, la factorisation de P peut aussi faire apparaître des facteurs irréductibles du second degré (à discriminant strictement négatif). Cela permet de faire de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.*

Exercice 14 : les polynômes de Tchebychev

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout réel θ, on ait
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Pour $n \geqslant 1$, déterminer les racines de T_n.

Indication : pour la première question, on peut raisonner par récurrence double mais il est encore plus élégant d'utiliser la formule de Moivre.

1. Commençons par l'unicité. Supposons que T_n et P_n soient deux polynômes tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $T_n(\cos\theta) = P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. Comme l'image de la fonction cos est $[-1\,;1]$, cela prouve que pour tout $t \in [-1\,;1]$, on a $T_n(t) = P_n(t)$. En particulier le polynôme $P_n - T_n$ a une infinité de racines et donc $T_n = P_n$.

   Prouvons maintenant l'existence de T_n. D'après la formule de Moivre, il vient :
$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n\right].$$
   En exploitant la formule du binôme de Newton, il vient :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos^{n-p}\theta \; (i\sin\theta)^p.$$
   Les termes de la somme avec p impair font des termes imaginaires purs et ceux avec p pair font des termes réels. Par conséquent :
$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \, i^{2k} \sin^{2k}\theta.$$
   Or $i^{2k} = (-1)^k$ et $\sin^{2k}\theta = (1-\cos^2\theta)^k$ donc :
$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta (1-\cos^2\theta)^k.$$
   On constate donc que le polynôme suivant
$$T_n(X) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} X^{n-2k} \left(X^2 - 1\right)^k$$
   vérifie bien $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Dans la somme obtenue ci-dessus, chacun des termes
$$U_k(X) = \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2-1)^k$$
   est de degré n donc $\deg(T_n) \leqslant n$. Par ailleurs, le terme de degré n de U_k est égal à $\binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2)^k = \binom{n}{2k} X^n$. Par conséquent, le coefficient de degré n de T_n est égal à $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$ ce qui vaut 2^{n-1}. Comme ce coefficient n'est pas nul, T_n est de degré n avec un coefficient dominant égal à 2^{n-1}.

   Remarque : savez-vous redémontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} \; ?$$

4. On notera bien que l'inconnue X **n'est pas un nombre** et que c'est un non-sens d'écrire une phrase comme « lorsque $X = 1$ ». La formulation correcte consiste à dire qu'« on substitue la valeur 1 dans l'inconnue ».

3. Considérons les nombres $t_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ces nombres vérifient :
   - $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < \pi$;
   - $\cos(nt_k) = \cos\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

   Comme la fonction cos est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, les nombres $\cos(t_k)$ sont distincts les uns des autres. Par ailleurs on obtient
$$T_n(\cos(t_k)) = \cos(nt_k) = 0.$$
   Nous venons de trouver n racines distinctes de T_n. Comme T_n est de degré n, il n'a aucune autre racine. Les racines de T_n sont donc exactement les nombres $\cos(t_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Remarque : ayant calculé le coefficient dominant et les racines de T_n, on peut le factoriser :
$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]$$

Exercice 15 : L'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Chaque coefficient peut être décomposé avec partie réelle et partie imaginaire. Posons
$$\lambda_k = \mathrm{Re}(a_k) \quad \text{et} \quad \mu_k = \mathrm{Im}(a_k).$$
Il vient
$$P = Q + iR \quad \text{avec} \quad Q = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{et} \quad R = \sum_{k=0}^{n}\mu_k X^k \in \mathbb{R}_n[X].$$
Ainsi tout polynôme (de degré inférieur ou égal à n) à coefficients complexes est décomposable avec sa partie réelle et sa partie imaginaire, qui sont des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à n. On peut noter $Q = \mathrm{Re}(P)$ et $R = \mathrm{Im}(P)$.

Remarque : ceci n'est pas demandé dans cet exercice mais on peut remarquer qu'on définit ainsi le polynôme conjugué $\overline{P} = Q - iR = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, X^k$ qui a les mêmes propriétés que le conjugué dans $\mathbb{C}$ (conjugué d'une somme, conjugué d'un produit).

L'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ (Q,R) & \longmapsto & Q+iR \end{array}\right.$ est manifestement linéaire.

Elle est bijective et sa réciproque est $\Psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (\mathrm{Re}(P), \mathrm{Im}(P)) \end{array}\right.$

Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et donc
$$\dim \mathbb{C}_n[X] = \dim(\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]) = 2\dim\mathbb{R}_n[X] = 2n+2.$$
Remarque : le raisonnement précédente montre qu'une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ est la famille $(1, X, \ldots, X^n, i, iX, \ldots, iX^n)$.

Exercice 16 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ de degré supérieur ou égal à 2. Montrer que son dérivé P' est aussi un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.
Indication : on peut chercher des racines de P' entre les racines de P puis des racines communes à P et à P'.

Notons $x_1 < \cdots < x_p$ les p racines réelles distinctes de P et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités. Puisque P est scindé sur $\mathbb{R}$, on sait que son degré n est égal à $m_1 + \cdots + m_p$.

1. On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_k\,; x_{k+1}]$ pour $1 \leqslant k < p$: la fonction P y est continue, elle est dérivable sur $]x_k\,; x_{k+1}[$. De plus elle vérifie $P(x_k) = P(x_{k+1})$. Par conséquent, il existe $y_k \in\,]x_k\,; x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$. Puisque les intervalles $]x_k\,; x_{k+1}[$ sont disjoints, ces $p-1$ racines de P' sont distinctes.
2. Si x_k est une racine multiple de P (c'est-à-dire avec $m_k > 1$), alors on sait que $P(x_k) = \cdots = P^{(m_k-1)}(x_k) = 0$ et $P^{(m_k)}(x_k) \neq 0$. Par conséquent, il vient $P'(x_k) = \cdots = (P')^{(m_k-2)}(x_k) = 0$ et $(P')^{(m_k-1)}(x_k) \neq 0$. Par conséquent, x_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$.

   Remarque : c'est encore vrai si $m_k = 1$ en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est pas une racine.
3. Nous avons trouvé ci-dessus un certain nombre de racines pour P' : $p-1$ racines y_k et (comptées avec multiplicités) : $(m_1 - 1) + \cdots + (m_p - 1)$ racines x_k. Nous avons donc trouvé en tout (comptées avec multiplicité) $m_1 + \cdots + m_p - p + p - 1 = n-1$ racines réelles pour P'. Comme par ailleurs $\deg(P') = n-1 \geqslant 1$, on sait que P' a au plus $n-1$ racines réelles. Par conséquent, P' possède exactement $n-1$ racines réelles. Il est donc bien scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On souhaite prouver que
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad P(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A, B \in \mathbb{R}[X], \quad P = A^2 + B^2.$$
1. Traiter le cas où P est scindé sur $\mathbb{R}$.

2. Traiter le cas où P n'a aucune racine réelle.
3. Traiter le cas général.

Indications : pour la première question, regarder les multiplicités des racines réelles ; pour la seconde question, utiliser le fait que les racines complexes sont conjuguées entre elles.

L'équivalence étant triviale si P est constant, on supposera que $\deg(P) \geqslant 1$.
On commence par remarquer que l'implication de droite à gauche est évidente.
Dans toute la suite, supposons que le polynôme P vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

1. Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Alors P se factorise

$$P = c\prod_{j=1}^{p}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}$$

avec $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ les racines distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$. Fixons $k \in [\![1\,;p]\!]$. En mettant à part le terme $(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ dans le produit, on écrit $P = (X-\lambda_k)^{\alpha_k}Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\lambda_k) \neq 0$. Pour $x > \lambda_k$, il vient $(x-\lambda_k)^{\alpha_k} > 0$ et donc $Q(x) \geqslant 0$ puisque $P(x) \geqslant 0$. Par continuité de Q en λ_k, on obtient $Q(\lambda_k) \geqslant 0$ et donc $Q(\lambda_k) > 0$. Toujours par continuité de Q, on en déduit l'existence d'un réel $u < \lambda_k$ tel que Q reste strictement positif sur tout l'intervalle $[u\,;\lambda_k]$. Mais alors $(x-\lambda_k)^{\alpha_k} > 0$ pour $x \in [u\,;\lambda_k[$, ce qui implique que l'entier α_k est pair. Notons $\alpha_k = 2\gamma_k$.

Nous avons prouvé que si P est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et positif sur $\mathbb{R}$, alors les multplicités de toutes ses racines sont paires. En regardant la limite de P en $+\infty$, on constate que $c > 0$. On peut donc écrire

$$P = \left(\sqrt{c}\prod_{j=1}^{p}(X-\lambda_j)^{\gamma_j}\right)^2$$

et donc P est un carré.

2. Supposons que P n'a aucune racine réelle. Dans ce cas sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ s'écrit

$$P = c\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)^{\beta_k}\prod_{k=1}^{m}(X-\overline{\mu_k})^{\beta_k}$$

avec $c \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant, μ_k les racines complexes (non réelles) et $\beta_k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la multiplicité des racines conjuguées est la même (c'est pourquoi on a utilisé le même exposant β_k). Comme ci-dessus, $c > 0$.

Par ailleurs, on constate que les deux polynômes complexes $\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)^{\beta_k}$ et $\prod_{k=1}^{m}(X-\overline{\mu_k})^{\beta_k}$ sont conjugués l'un de l'autre. On peut donc introduire des polynômes réels $R, S \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)^{\beta_k} = R+iS \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{m}(X-\overline{\mu_k})^{\beta_k} = R-iS$$

Mais alors

$$P = c(R+iS)(R-iS) = c(R^2+S^2) = (\sqrt{c}R)^2 + (\sqrt{c}S)^2$$

3. Cas général. Soit c le coefficient dominant de P, $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ les racines réelles de P, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ leurs multiplicités et $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_m, \overline{\mu_m}$ les racines complexes non réelles de P, de multplicités $\beta_1, \ldots, \beta_m$. On écrit alors

$$P = c\underbrace{\left(\prod_{j=1}^{p}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}\right)}_{=P_1}\cdot\underbrace{\left(\prod_{k=1}^{m}(X-\mu_k)^{\beta_k}\prod_{k=1}^{m}(X-\overline{\mu_k})^{\beta_k}\right)}_{=P_2}$$

Comme nous l'avons vu ci-dessus, P_2 est la somme de deux carrés : écrivons $P_2 = R^2+S^2$ avec $R, S \in \mathbb{R}[X]$. En particulier, $P_2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc P_1 vérifie lui aussi l'hypothèse de positivité. Avec la première question, P_1 est un carré : $P_1 = U^2$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$. Mais alors

$$P = U^2(R^2+S^2) = (UR)^2 + (US)^2$$

ce qui démontre le résultat désiré.

Remarque : L'exemple de $P(X) = X^2+1$ montre qu'il existe des polynômes positifs sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas le carré d'un polynôme.

Exercice 18 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de P comptées avec multiplicités. Exprimer $\dfrac{P'}{P}$ en fonction des λ_k.

Soit $c \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant du polynôme P. La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donc :

$$P = c\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k).$$

La dérivée d'un produit est une somme où, dans chaque terme de la somme, on a dérivé un des termes du produit sans toucher aux autres. En appliquant cette règle de calcul, il vient :

$$P' = c\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}(X-\lambda_k) = \sum_{j=1}^{n}\frac{P}{X-\lambda_j}.$$

Par conséquent :
$$\frac{P'}{P}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_j}.$$

Remarque : si on considère les racines **distinctes** qu'on note $\mu_1,\dots,\mu_r$ avec leurs multiplicités $m_1,\dots,m_r$, alors, pour chaque racine μ_k, il y a m_k termes $\dfrac{1}{X-\lambda_j}$ qui sont égaux à $\dfrac{1}{X-\mu_k}$ dans la somme précédente et donc

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{r}\frac{m_k}{X-\mu_k}.$$

Exercice 19 : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x_0,x_1,\dots,x_n$ des réels distincts. On pose :
$$\forall k\in[\![0\,;n]\!],\quad L_k(X)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}}\frac{X-x_j}{x_k-x_j}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}=(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser les coordonnées d'un polynôme P dans la base $\mathscr{B}$.
2. En déduire une démonstration du fait que le déterminant de Vandermonde associé aux nombres $x_0,x_1,\dots,x_n$ n'est pas nul.

1. Il s'agit d'une variation autour des polynômes d'interpolation de Lagrange. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, il est clair que $\deg(L_k)=n$ et les racines de L_k sont les nombres x_j avec $j\in[\![0\,;n]\!]\setminus\{k\}$. Par ailleurs $L_k(x_k)=1$.

   Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice : soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$; considérons le polynôme
   $$Q=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)L_k.$$
   Comme Q est une combinaison linéaire des polynômes L_k, on a bien $Q\in\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, pour $i\in[\![0\,;n]\!]$, on a
   $$Q(x_i)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)L_k(x_i).$$
   Or, comme nous venons de le remarquer, $L_k(x_i)$ vaut 0 pour $k\neq i$ et 1 pour $k=i$. Tous les termes de la somme sauf un disparaissent et il reste $Q(x_i)=P(x_i)$. Le polynôme $P-Q$ est de degré inférieur ou égal à n et on vient de lui trouver $n+1$ racines distinctes $x_0,\dots,x_n$. C'est donc le polynôme nul si bien que $P=Q$. Cela prouve que P est une combinaison linéaire de la famille $\mathscr{B}$. Comme P est quelconque, $\mathscr{B}$ est génératrice.

   Montrons que $\mathscr{B}$ est libre : prenons une combinaison linéaire nulle
   $$\sum_{k=0}^{n}\lambda_kL_k=0$$
   et montrons qu'elle est triviale, c'est-à-dire que tous les λ_k sont nuls. Pour chaque $i\in[\![0\,;n]\!]$, en évaluant l'égalité polynomiale en x_i, il vient, d'après la valeur de $L_k(x_i)$ trouvée précédemment :
   $$0=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kL_k(x_i)=\lambda_i$$
   ce qui prouve la liberté de la famille.

   Nous avons démontré que $\mathscr{B}$ est une base et, dans la première partie, nous avons trouvé les coefficients de la combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ qui donne P. Ce sont les coordonnées de P dans $\mathscr{B}$:
   $$P=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)L_k$$

2. Notons $\mathscr{C}=(1,X,X^2,\dots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après ce que nous venons de dire, les coordonnées de X^j dans la base $\mathscr{B}$ sont les nombres x_i^j (pour $0\leqslant i\leqslant n$). Par conséquent, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$ est la matrice
   $$V(x_0,x_1,\dots,x_n)=\begin{bmatrix}1&x_0&x_0^2&\dots&x_0^n\\1&x_1&x_1^2&\dots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\dots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\dots&x_n^n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   Il s'agit de la matrice de Vandermonde [5] associée aux nombres $x_0,x_1,\dots,x_n$. Puisque c'est une matrice de passage, elle est inversible et donc son déterminant n'est pas nul.

Exercice 20 : Soit $P=X(X-1)(X-2)\dots(X-n)$ et $Q=X^n-1$. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles $F=\dfrac{1}{P}$ et $G=\dfrac{1}{Q}$.

Indication : il y a 2 formules pour calculer le coefficient associé à un pôle simple.

5. On appelle aussi « matrice de Vandermonde associée aux x_i la matrice transposée de $V(x_0,x_1,\dots,x_n)$. Il y a ici une petite ambiguité sur le vocabulaire. C'est souvent sans conséquence puisque ce qui nous intéresse le plus souvent est la valeur du déterminant et vous savez que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée.

On rappelle que si $H \in \mathbb{C}(X)$ est une fraction rationnelle écrite $H = \dfrac{N}{D}$ avec N, D deux polynômes premiers entre eux, que λ est un pôle simple de la fraction rationnelle H (i.e. que λ est une racine simple de D), alors la partie polaire associée à λ est de la forme $\dfrac{c}{X-\lambda}$ avec un coefficient c qui peut se calculer par l'une des deux formules suivantes :

$$c = \frac{N(\lambda)}{R(\lambda)} = \frac{N(\lambda)}{D'(\lambda)}$$

avec R le polynôme intervenant dans la factorisation $D = (X-\lambda)R$.

• Pour la fraction rationnelle F, on utilise la formule de gauche. Les pôles de F sont les nombres $k \in [\![0\,;n]\!]$ et ils sont tous simples. Le degré de F étant négatif, il n'y a pas de partie entière. Par conséquent, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{X-k} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} (k-i)}.$$

On peut écrire :

$$\frac{1}{c_k} = \prod_{i=0}^{k-1}(k-i) \times \prod_{i=k+1}^{n}(k-i) = \prod_{j=1}^{k} j \times \prod_{j=1}^{n-k}(-j) = (-1)^{n-k} k!(n-k)!$$

et donc $c_k = (-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}$ d'où finalement :

$$F = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{X-k}.$$

• Les pôles de $G = \dfrac{1}{X^n-1}$ sont les racines n-èmes de l'unité, c'est-à-dire les nombres $z_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. De plus tous ces pôles sont simples. Comme la partie entière est nulle, la décomposition en éléments simples sera donc de la forme :

$$G = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{X-z_k}.$$

On utilise la seconde formule rappelée ci-dessus pour calculer les coefficients a_k. La dérivée de $X^n - 1$ étant nX^{n-1}, il vient :

$$a_k = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}z_k \quad \text{puisque} \quad z_k^n = 1$$

Finalement :

$$G = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2ik\pi/n}}{X-e^{2ik\pi/n}}.$$

Exercice 21 ($\star$) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$. On note D l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. On suppose que toutes les racines de P sont dans D. Montrer que toutes les racines de son dérivé P' sont dans D.

Soit z une racine de P'. On veut montrer que $|z| \leqslant 1$. Si z est une racine de P, on sait déjà que $z \in D$. On suppose maintenant que $P(z) \neq 0$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines de P répétées selon leurs multiplicités. D'après le résultat de l'exercice 18, on peut écrire :

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\lambda_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{z}-\overline{\lambda_k}}{|z-\lambda_k|^2}.$$

En conjuguant cette égalité et en isolant z au numérateur, il vient :

$$z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-\lambda_k|^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2}.$$

Comme le nombre $s = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{|z-\lambda_k|^2}$ est strictement positif, en passant au module, on obtient :

$$|z|\,s = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{|z-\lambda_k|^2}\right|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire puis le fait que les λ_k appartiennent à D, il vient :

$$|z|\,s \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{|\lambda_k|}{|z-\lambda_k|^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-\lambda_k|^2} = s.$$

En simplifiant par $s > 0$, on obtient la conclusion voulue : $|z| \leqslant 1$.

D Espaces vectoriels

La puissance de l'algèbre linéaire n'est plus à démontrer. Elle est omniprésente en Mathématiques et dans toutes les autres sciences. Nous verrons en deuxième année, avec le calcul différentiel, pourquoi elle intervient, même pour gérer des problèmes qui n'ont pas l'air linéaires a priori. Dans le programme de MPSI, on peut séparer les aspects géométriques (vecteurs, sous-espaces vectoriels, applications linéaires) et les aspects matriciels. Cette première série d'exercices s'intéresse aux aspects géométriques.

Exercice 22 : Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$.
Indication : quel est le sens de la notation $\mathrm{Vect}(\ldots)$ *?*

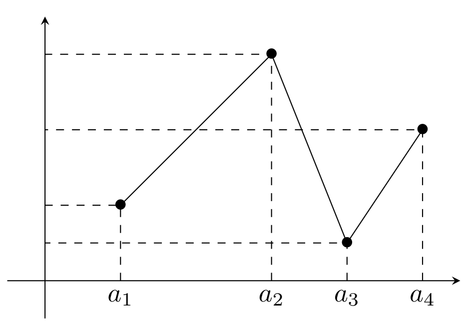
- On constate que
$$\left\{\begin{array}{l} 2v_1 - v_2 = w_1 \\ v_1 + 3v_2 = w_2 \end{array}\right.$$
Cela prouve que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ contient les deux vecteurs w_1, w_2. Or $\mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ est **le plus petit** sous-espace contenant w_1, w_2 et donc $\mathrm{Vect}(w_1, w_2) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
- Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, $\dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2)) = 2$. De même $\dim(\mathrm{Vect}(w_1, w_2)) = 2$. Avec l'inclusion et l'égalité des dimensions, on conclut $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$.

Remarque : ce petit exercice est tout simple mais il faut maîtriser les deux idées qu'il contient :

- pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est inclus dans un certain sous-espace vectoriel F, il suffit de prouver que $u_1, \ldots, u_p$ appartiennent tous à F.
- on peut utiliser les dimensions pour conclure à l'égalité entre deux sous-espaces vectoriels lorsqu'on a prouvé une inclusion.

Exercice 23 : Soient $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ des réels. La lettre E désigne l'ensemble des fonctions réelles, définies sur $[a_1\,;a_4]$, continues sur cet intervalle, et dont les restrictions à chacun des intervalles $[a_i\,;a_{i+1}]$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ sont affines.
Montrer que E est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Pour se faire une intuition des fonctions qui se trouvent dans E, dessinons l'allure de leurs graphes. Pour cela, il suffit de relier « en ligne droite » les points d'abscisses a_1, a_2, a_3, a_4. Ce sont des cas particuliers de fonctions *affines par morceaux*. Voici un exemple :



1. Afin de prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il suffit de prouver que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}([a_1\,;a_4];\mathbb{R})$. Tout d'abord il est clair que la fonction nulle est continue sur $[a_1\,;a_4]$ et qu'elle est affine sur chaque segment $[a_i\,;a_{i+1}]$ donc elle appartient à E.
Prenons f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Tout d'abord $f + \lambda g$ est une fonction continue sur $[a_1\,;a_4]$. De plus, il existe des coefficients p_i, q_i, p'_i, q'_i tels que :
$$\forall i \in [\![1\,;3]\!]\,, \quad \forall x \in [a_i\,;a_{i+1}], \quad \left\{\begin{array}{l} f(x) = p_i x + q_i \\ g(x) = p'_i x + q'_i \end{array}\right.$$
Mais alors :
$$\forall i \in [\![1\,;3]\!]\,, \quad \forall x \in [a_i\,;a_{i+1}], \quad (f + \lambda g)(x) = (p_i + \lambda p'_i)x + (q_i + \lambda q'_i)$$
ce qui prouve que $f + \lambda g$ est affine sur chaque $[a_i\,;a_{i+1}]$. Finalement, on a bien $f + \lambda g \in E$ et E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a_1\,;a_4];\mathbb{R})$.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^4$ définie par $\quad \forall f \in E, \quad \varphi(f) = \big(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\big)$. On vérifie facilement que l'application φ est linéaire.
φ est injective : si $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, alors $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = 0$. Sur chacun des trois intervalles $[a_i\,;a_{i+1}]$, la fonction f est affine et s'annule aux deux extrémités. C'est donc la fonction nulle. Cela prouve que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ et donc φ est injective.
φ est surjective : soit $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ quelconque. Pour $i \in [\![1\,;3]\!]$, il existe des coefficients p_i, q_i tels que $\left\{\begin{array}{l} p_i a_i + q_i = y_i \\ p_i a_{i+1} + q_i = y_{i+1} \end{array}\right.$ car p_i, q_i sont les inconnues d'un système de déterminant $a_i - a_{i+1} \neq 0$. On définit alors f en imposant que $f(x)$ vaille $p_i x + q_i$ pour $x \in [a_i\,;a_{i+1}]$.
Notons que les formules pour deux intervalles voisins $[a_i\,;a_{i+1}]$ et $[a_{i+1}\,;a_{i+2}]$ coïncident au point commun a_{i+1} : la fonction f est continue. Cette fonction f ainsi définie vérifie clairement $\varphi(f) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.
Comme on a exhibé un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^4$, on peut affirmer que $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

Exercice 24 : Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, quel est le rang de la famille $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2n}$ définie par : $\quad \forall k \in [\![1\,;2n]\!]\,,\ y_k = (k+1, k+2, k+3, \ldots, k+n)$?

La famille contient les deux vecteurs suivants qui ne sont pas colinéaires :
$$y_1 = (2, 3, 4, \ldots, 1+n) \quad \text{et} \quad y_2 = (3, 4, 5, \ldots, 2+n)$$
donc le rang de cette famille est supérieur ou égal à 2. Par ailleurs, pour tout $k \in [\![1\,;2n]\!]$, il vient :
$$y_k = k(1, 1, \ldots, 1) + (1, 2, \ldots, n)$$
ce qui prouve que tous les vecteurs y_k appartiennent au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big((1, 1, \ldots, 1), (1, 2, \ldots, n)\big)$ qui est de dimension 2. Par conséquent, le rang de la famille est inférieur ou égal à 2. Finalement, $\mathrm{rg}(y_1, \ldots, y_{2n}) = 2$.

Remarque : pour montrer que le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_m)$ est inférieur ou égal à r, il suffit de trouver r vecteurs $w_1, \ldots, w_r$ tels que tous les u_i soient des combinaisons linéaires des w_j. Dans ce raisonnement, rien n'oblige à ce que les w_j soient pris parmi les u_i. C'est le cas dans cet exercice où il était plus facile d'écrire les y_k comme combinaison linéaire de deux vecteurs qui n'appartiennent pas à la famille (y_k).

Exercice 25 : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. *Indication : pour chaque $m \in \mathbb{N}$, raisonner dans $\mathbb{R}_m[X]$, qui est de dimension finie.*

On constate que, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \ldots, P_m)$ est une famille échelonnée de l'espace $\mathbb{R}_m[X]$. C'est donc une famille libre de $(m+1)$ vecteurs en dimension $(m+1)$: c'est une base de $\mathbb{R}_m[X]$.

- Toute sous-famille finie de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est comprise dans une sous-famille de la forme $(P_0, \ldots, P_m)$ pour un certain m. Comme cette dernière famille est libre, toutes les sous-familles finies de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres, ce qui prouve que la famille infinie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
- Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque. Prenons $m \geqslant \deg(Q)$ de sorte que $Q \in \mathbb{R}_m[X]$. Comme $(P_0, \ldots, P_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$, il existe des coefficients réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ tels que $Q = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_m P_m$. En particulier, Q est une combinaison linéaire de la famille infinie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela prouve que cette famille est génératrice.

La famille infinie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre et génératrice : c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Remarque : une famille infinie de vecteurs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ est libre ssi pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la sous-famille finie $(u_0, u_1, \ldots, u_m)$ est libre.

Exercice 26 : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Considérons F et G deux sous-espaces de E.

1. Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Si F et G sont deux hyperplans, préciser selon le cas la dimension de leur intersection.

1. D'après la formule de Grassmann, il vient :
$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G).$$
Or $(F + G) \subset E$ donc $\dim(F + G) \leqslant n$ alors que $\dim F + \dim G > n$. Cela prouve que $\dim(F \cap G) > 0$ et donc $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel F de E tel que $\dim(F) = n - 1$.
   - Premier cas : $F = G$. Alors clairement $F \cap G = F = G$ et donc $\dim(F \cap G) = n - 1$.
   - Deuxième cas : $F \neq G$. Si nous avions $G \subset F$, vu que $\dim F = \dim G$, nous aurions $F = G$. Ce n'est pas vrai donc G contient un vecteur u qui n'appartient pas à F. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient **strictement** F. Il est donc de dimension strictement plus grande que $n - 1$, c'est-à-dire qu'il est de dimension n. Bref, c'est E lui-même ! Ainsi, $F + G = E$. D'après la formule de Grassmann, il en résulte :

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

En conclusion, si F et G sont deux hyperplans de E, alors
$$\dim(F \cap G) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } F = G \\ n - 2 & \text{si } F \neq G \end{cases}$$

Exercice 27 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in L(E)$. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Démontrons tout d'abord l'inclusion $\mathrm{Im}(f + g) \subset (\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g)$. En effet, pour $y \in \mathrm{Im}(f + g)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f + g)(x)$. Mais alors
$$y = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}\, f} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im}\, g}$$
d'où l'inclusion annoncée.

Remarque : Il n'y a pas égalité en général, comme le prouve l'exemple $f = \mathrm{Id}_E$, $g = -\mathrm{Id}_E$. Alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g = E$ et $\mathrm{Im}(f + g) = \{0_E\}$.

De l'inclusion, nous déduisons, en passant aux dimensions (et en utilisant la formule de Grassmann) :
$$\mathrm{rg}(f + g) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

Cela démontre l'inégalité de droite. Pour obtenir celle de gauche, appliquons celle de droite aux endomorphismes $f + g$ et $-g$. En notant que $\mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}\, g$ et donc $\mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(g)$, on obtient :
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f + g - g) \leqslant \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f + g) + \mathrm{rg}(g)$$

d'où $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f + g)$.
Par symétrie, on obtient également $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f + g)$
et donc finalement : $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g)$.

Exercice 28 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$
Montrer que l'application Δ est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ puis $\operatorname{Im} \Delta$.

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta(P + \lambda Q) &= [P + \lambda Q](X+1) - [P + \lambda Q](X) \\ &= [P(X+1) + \lambda Q(X+1)] - [P(X) + \lambda Q(X)] \\ &= [P(X+1) - P(X)] + \lambda[Q(X+1) - Q(X)] \\ &= \Delta(P) + \lambda \Delta(Q) \end{aligned}$$

donc Δ est une application linéaire.

2. Si $P \in \operatorname{Ker} \Delta$, alors $P(X+1) = P(X)$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) = P(0)$. Cela prouve que le polynôme $P(X) - P(0)$ s'annule sur l'ensemble infini $\mathbb{N}$. C'est donc le polynôme nul ce qui prouve que P est un polynôme constant. Inversement, il est clair que si P est constant, alors $\Delta(P) = 0$.
Finalement, $\operatorname{Ker} \Delta$ est l'ensemble des polynômes constants : $\Delta(P) = \mathbb{R}_0[X]$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} \Delta) + \dim(\operatorname{Ker} \Delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.
Or $\dim(\operatorname{Ker} \Delta) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) = 1$ et donc $\dim(\operatorname{Im} \Delta) = n$.
Par ailleurs, pour $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, il vient :

$$\Delta(P) = a_n \Big[(X+1)^n - X^n \Big] + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big[(X+1)^k - X^k \Big]}_{\text{de degré} < n}$$

Le développement du binôme de Newton de $(X+1)^n$ donne un terme de degré n égal à X^n. Cela prouve que les termes de degré n de $P(X+1)$ et de $P(X)$ se compensent exactement si bien que $\deg(\Delta(P)) < n$. Il en résulte l'inclusion suivante : $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or $\dim(\operatorname{Im} \Delta) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1[X]})$ ce qui permet finalement d'affirmer $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En conclusion :

$$\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Exercice 29 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que : $\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$.
Indication : utiliser la restriction de g à $\operatorname{Im} f$.

Posons $I = \operatorname{Im} f$ et appliquons le théorème du rang à l'application linéaire $g|_I$:

$$\dim I = \dim \operatorname{Ker}\left(g|_I\right) + \dim\left(\operatorname{Im} g|_I\right).$$

Or $\operatorname{Ker}\left(g|_I\right) = I \cap \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im}\left(g|_I\right) = g(I) = \operatorname{Im}(g \circ f)$. Nous obtenons donc :

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim\left(I \cap \operatorname{Ker} g\right) + \dim \operatorname{Im}(g \circ f).$$

Appliquons également le théorème du rang à f :

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f).$$

En combinant ces deux relations, il vient :

$$\dim E - \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) + \dim \operatorname{Im}(g \circ f)$$

soit encore :

$$\dim E - \dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Une dernière application du théorème du rang à $g \circ f$ nous permet de conclure :

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} g).$$

Exercice 30 : Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_p = \operatorname{Im} f^p \qquad \text{et} \qquad N_p = \operatorname{Ker} f^p.$$

1. Montrer que $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et que $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$. Montrer que $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s considérés à la question précédente. Pour $s \geqslant r$, montrer que $I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires.
5. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait $f \circ f(P) = P'$.

Indication : les deux parties de la question 2 ne sont pas indépendantes. On rappelle que f^p désigne $f \circ f \circ \cdots \circ f$ (p fois).

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, nous souhaitons prouver que $I_{p+1} \subset I_p$ et $N_p \subset N_{p+1}$.
   - Prenons $y \in I_{p+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{p+1}(x)$. Mais alors $y = f^p(f(x))$ et donc $y \in I_p$.
   - Prenons $x \in N_p$. Alors $f^p(x) = 0_E$. Mais alors

   $$f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0_E) = 0_E$$

   et donc $x \in N_{p+1}$.

2. La suite définie par $i_p = \dim(I_p)$ est une suite décroissante d'entiers naturels. Elle ne peut donc pas être strictement décroissante. Il existe donc un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que $i_{s+1} = i_s$. Mais alors,

$$I_{s+1} \subset I_s \quad \text{et} \quad \dim(I_s) = \dim(I_{s+1}) \quad \text{d'où} \quad I_s = I_{s+1}.$$

D'après le théorème du rang, il vient :

$$\dim N_{s+1} = n - \dim I_{s+1} = n - \dim I_s = \dim N_s.$$

Comme par ailleurs on a l'inclusion $N_s \subset N_{s+1}$, on conclut $N_s = N_{s+1}$.

Remarque : dans la deuxième partie de la question, il s'agissait bien de montrer que $N_{s+1} = N_s$ **pour le même** s que celui qui a donné $I_{s+1} = I_s$.

3. D'après la question précédente, on a $I_r = I_{r+1}$ et $N_r = N_{r+1}$.
Nous prouvons maintenant par récurrence sur s que, pour $s \geqslant r$, on a $I_s = I_r$. L'initialisation à $s = r$ est évidente. Supposons la propriété prouvée à un certain rang $s \geqslant r$ et prouvons-la au rang $s+1$. Par décroissance de la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il vient $I_{s+1} \subset I_r$. Prenons maintenant $y \in I_r$ et montrons que $y \in I_{s+1}$.
Comme $I_r = I_{r+1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r+1}(x) = f(f^r(x))$. Or $f^r(x) \in I_r$ et $I_r = I_s$ donc il existe $w \in E$ tel que $f^r(x) = f^s(w)$. Il vient alors

$$y = f(f^r(x)) = f(f^s(w)) = f^{s+1}(w)$$

et c'est ce qu'on voulait prouver pour achever la récurrence.

Pour $s \geqslant r$, nous savons d'une part que $N_r \subset N_s$ (par croissance) et d'autre part, grâce au théorème du rang :

$$\dim N_s = n - \dim I_s = n - \dim I_r = \dim N_r$$

d'où finalement $N_s = N_r$.

4. Prenons $y \in N_r \cap I_r$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$. Mais alors

$$f^{2r}(x) = f^r(f^r(x)) = f^r(y) = 0_E$$

d'où $x \in N_{2r}$. Or d'après la question précédente, $N_{2r} = N_r$ et donc $x \in N_r$. Autrement dit $y = f^r(x) = 0_E$.
Nous avons prouvé que $N_r \cap I_r = \{0_E\}$. D'après la formule de Grassmann et le théorème du rang, il vient :

$$\begin{aligned} \dim(I_r + N_r) &= \dim I_r + \dim N_r - \dim(I_r \cap N_r) \\ &= \dim \operatorname{Im}(f^r) + \dim \operatorname{Ker}(f^r) = \dim E \end{aligned}$$

si bien que $I_r + N_r = E$.
Cela prouve que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

5. Notons d l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ d(P) = P'$. Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $f \circ f = d$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que $P^{(n)} = 0 \iff \deg(P) < n$, ce qui revient à dire que $\operatorname{Ker}(d^n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On obtient donc :

$$\mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Ker}(f^{2n}) \subset \operatorname{Ker}(f^{2n+1}) \subset \operatorname{Ker}(f^{2n+2}) = \mathbb{R}_n[X].$$

Or $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$ d'où

$$n = \dim(\operatorname{Ker}(f^{2n})) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f^{2n+1})) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f^{2n+2})) = n+1.$$

Il est impossible que les deux inégalités soient strictes. On a donc $\dim(\operatorname{Ker}(f^{2n})) = \dim(\operatorname{Ker}(f^{2n+1}))$ ou $\dim(\operatorname{Ker}(f^{2n+1})) = \dim(\operatorname{Ker}(f^{2n+2}))$. L'inclusion des sous-espaces et l'égalité des dimensions impliquant l'égalité des sous-espaces, on peut conclure que $\operatorname{Ker}(f^{2n}) = \operatorname{Ker}(f^{2n+1})$ ou bien que $\operatorname{Ker}(f^{2n+1}) = \operatorname{Ker}(f^{2n+2})$. D'après la troisième question, on en déduit que, pour tout $p \geqslant 2n+2$, $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{2n+2})$. Le cas $p = 2n+4$ donne alors $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n+1}[X]$, ce qui est absurde. Cette contradiction prouve qu'il n'existe aucun endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont le carré soit la dérivation.

Exercice 31 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un scalaire $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda(x) \cdot x$.

1. Montrer que, pour chaque $x \in E \setminus \{0_E\}$, le scalaire $\lambda(x)$ dont il est question ci-dessus est unique.
2. Montrer que f est une homothétie.

Indication : cela revient à démontrer que

$$\forall x, y \in E \setminus \{0_E\}, \quad \lambda(x) = \lambda(y).$$

On pourra le démontrer en distinguant deux cas selon que la famille (x, y) est libre ou non.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $f(x) = \lambda x = \mu x$. On veut montrer que $\lambda = \mu$. En effet, il vient :

$$0_E = f(x) - f(x) = \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)x.$$

Or nous savons que le produit d'un scalaire par un vecteur est nul ssi le scalaire est nul ou que le vecteur est nul. Comme ici $x \neq 0_E$, on peut en déduire $\lambda - \mu = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \mu$.

2. • Supposons tout d'abord que les deux vecteurs non nuls x, y sont colinéaires. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \alpha x$. Mais alors

$$\lambda(y) \cdot y = f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda(x) \cdot x = \lambda(x)[\alpha x] = \lambda(x) \cdot y$$

Par unicité de $\lambda(y)$, on en déduit $\lambda(x) = \lambda(y)$.

• Supposons maintenant que (x,y) est libre. On peut alors écrire :

$$\lambda(x+y)\cdot(x+y)=f(x+y)=f(x)+f(y)=\lambda(x)\cdot x+\lambda(y)\cdot y$$

On en déduit :

$$\Big[\lambda(x+y)-\lambda(x)\Big]x+\Big[\lambda(x+y)-\lambda(y)\Big]y=0_E$$

On a trouvé une combinaison linéaire nulle de la famille (x,y). Comme la famille (x,y) est libre, cette combinaison linéaire est triviale, c'est-à-dire :

$$\lambda(x+y)-\lambda(x)=\lambda(x+y)-\lambda(y)=0$$

et donc $\lambda(x)=\lambda(x+y)=\lambda(y)$.

• Conclusion : notons λ le nombre $\lambda(x)$, qui est indépendant de x. On a donc

$$\forall x\in E\setminus\{0\},\quad f(x)=\lambda x.$$

Cette égalité reste évidemment vraie pour $x=0_E$ donc $f=\lambda\,\mathrm{Id}_E$: c'est une homothétie.

Exercice 32 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $f\in L(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $e_2=f(e_1)$.
2. En déduire les $f\in L(E)$ tels que $\forall g\in L(E),\ f\circ g=g\circ f$.

1. En utilisant la contraposée de l'exercice précédent, on sait que, si f n'est pas une homothétie, il existe un vecteur $e_1\in E$ tel que $(e_1,f(e_1))$ soit libre. Posons $e_2=f(e_1)$. Puisque (e_1,e_2) est libre, par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_3,\dots,e_n$ tels que $(e_1,\dots,e_n)$ soit une base de E. Cette base vérifie bien $e_2=f(e_1)$.
2. Si $f=\lambda\,\mathrm{Id}_E$, alors $f\circ g=\lambda g$ et $g\circ f=\lambda g$ si bien que $f\circ g=g\circ f$ pour tout $g\in L(E)$.
   Inversement, supposons que $f\in L(E)$ n'est pas une homothétie. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base obtenue à la question précédente. D'après le théorème de définition d'une application linéaire sur une base, il existe une unique application linéaire $g\in L(E)$ telle que

$$g(e_2)=e_1\quad\text{et}\quad g(e_1)=g(e_3)=\cdots=g(e_n)=0.$$

   Avec cet endomorphisme g, il vient :

$$f\circ g(e_1)=f(0)=0\quad\text{et}\quad g\circ f(e_1)=g(e_2)=e_1.$$

   Par conséquent, $f\circ g\neq g\circ f$.
   En conclusion, les $f\in L(E)$ qui commutent avec tous les $g\in L(E)$ sont les homothéties.

Exercice 33 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On dit que $f\in L(E)$ est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier $q\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^q=0$. On appelle *indice de nilpotence* de f le plus petit entier q tel que $f^q=0$. Soit $f\in L(E)$ un endomorphisme nilpotent. Notons p son indice de nilpotence.
Montrer qu'il existe $x\in E$ tel que la famille $\big(x,f(x),f^2(x),\dots,f^{p-1}(x)\big)$ soit libre.
En déduire que $f^n=0$.

Puisque $f^{p-1}\neq 0$, il existe un vecteur $x\in E$ tel que $f^{p-1}(x)\neq 0$. Montrons alors que la famille $(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est libre. Pour cela, prenons des scalaires $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda_0x+\cdots+\lambda_{p-1}f^{p-1}(x)=0$. En appliquant f^{p-1} à cette égalité, on obtient la nouvelle égalité $\lambda_0f^{p-1}(x)+\lambda_1f^p(x)+\cdots+\lambda_{p-1}f^{2p-2}(x)=0$. Or, pour $k\geqslant p$, $f^k=0$. Nous obtenons donc $\lambda_0f^{p-1}(x)=0$ et donc $\lambda_0=0$.
En appliquant f^{p-2} à la relation de départ, il vient alors $\lambda_0f^{p-2}(x)+\lambda_1f^{p-1}(x)$ et donc $\lambda_1=0$ puisque $\lambda_0=0$ et $f^{p-1}(x)\neq 0$. On procède de même pour prouver que tous les coefficients $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}$ sont nuls. Puisque la seule combinaison linéaire nulle de $(x,f(x),\dots,f^{p-1}(x))$ est la combinaison linéaire triviale, on voit que cette famille est libre. Comme les familles libres ont toujours moins de n vecteurs, il vient $p\leqslant n$ et donc $f^n=0$.

Remarque : On vient de démontrer que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent de $L(E)$ est toujours inférieur ou égal à la dimension de E.

E Matrices

Dans un espace de dimension n, on peut introduire une base et associer à chaque vecteur une collection de n nombres puis, à chaque endomorphisme, une collection de n^2 nombres qu'on représente sous la forme d'un tableau. On développe le calcul matriciel afin qu'il corresponde aux opérations usuelles sur les applications linéaires. Pour maîtriser l'aspect matriciel de l'algèbre linéaire, il est crucial de bien maîtriser la correspondance entre matrice et application linéaire. Un conseil à ce propos : n'en faites jamais l'économie ! Prenez le temps dans votre solution d'introduire une (ou plusieurs) base(s) et d'explicitez quelle matrice correspond à quelle application linéaire dans quelle(s) base(s).

Exercice 34 : Déterminer l'ensemble des matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $AM=MA$.
Indication : utiliser la base canonique.

Notons $E^{k\ell}$ les matrices de la base canonique : pour $(k,\ell)\in[\![1\,;n]\!]^2$, la matrice $E^{k\ell}$ a des zéros partout sauf en position (k,ℓ) où le coefficient vaut 1. Pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$, notons A_{ij} le coefficient de A en position (i,j). Avec ces notations, il vient :

$$E^{k\ell}_{ij}=\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Soit A une matrice qui commute avec toutes les matrices. Pour $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, il vient :

$$(AE^{kl})_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir}E^{kl}_{rj} = A_{ik}\delta_{jl} \quad \text{et} \quad (E^{kl}A)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} E^{kl}_{ir}A_{rj} = \delta_{ik}A_{lj}$$

Comme A commute avec E^{kl}, ces coefficients sont toujours égaux. Prenons tout d'abord $i \neq k$ mais $j = l$. Il vient :

$$A_{ik}\delta_{jj} = \delta_{ik}A_{jj} \quad \text{et donc} \quad A_{ik} = 0.$$

Cela montre que A est une matrice diagonale.
Prenons maintenant $i = k$ et $j = l$. Il vient :

$$A_{ii}\delta_{jj} = \delta_{ii}A_{jj} \quad \text{et donc} \quad A_{ii} = A_{jj}.$$

Cela prouve que tous les coefficients diagonaux de A sont égaux et donc A est une matrice scalaire. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$, alors il est clair que A commute avec toutes les matrices.
Les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices sont les matrices scalaires.

Remarque : En utilisant la correspondance entre les matrices et les endomorphismes, on constate qu'on vient de redémontrer par une autre méthode le résultat de l'exercice 32.

Exercice 35 : Soit $\Phi, \Psi \in L(\mathbb{R}_n[X])$ définis par

$$\Phi : P \mapsto P(X+1) \qquad \text{et} \qquad \Psi : P \mapsto P'.$$

1. Donner les matrices M, N de Φ, Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que M est inversible et donner son inverse. N est-elle inversible ?

Conseil : numéroter les lignes et les colonnes de $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de 0 à n.

Afin de mieux coller aux notations retenues pour les polynômes, dans cet exercice, nous numéroterons les lignes et les colonnes des matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de 0 à n et non pas de 1 à $n+1$.

1. Pour $j \in [\![0\,;n]\!]$, il vient :

$$\Phi(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{j}{i} X^i$$

puisque $\binom{j}{i} = 0$ lorsque $i > j$. Par définition des coefficients de la matrice d'un endomorphisme dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, il vient :

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2, \quad M_{i,j} = \binom{j}{i}.$$

En d'autres termes, la matrice M contient les coefficients du triangle de Pascal. Par exemple pour $n = 5$, il vient :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En procédant de même pour la dérivation, il vient :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!], \quad \Psi(X^j) = (X^j)' = jX^{j-1}$$

ce qui prouve que

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2, \quad N_{i,j} = j\delta_{i,j-1}$$

Par exemple pour $n = 5$, il vient :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Il est clair que Φ est bijective et que $\Phi^{-1} : P \mapsto P(X-1)$. D'après le cours, cela prouve que la matrice M est inversible et nous permet d'écrire les coefficients de la matrice M^{-1}. En effet, pour $j \in [\![0\,;n]\!]$, il vient :

$$\Phi^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i$$

si bien que

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2, \quad (M^{-1})_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j}{i}.$$

La matrice M^{-1} ressemble à la matrice M mais avec des signes négatifs disposés en damier dans la matrice. Par exemple pour $n=5$, il vient :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'endomorphisme Ψ n'est pas bijectif puisque $\operatorname{Ker}\Psi$ est l'ensemble des polynômes constants et est donc différent de $\{0\}$. Cela implique que la matrice N n'est pas inversible (on peut aussi remarquer que N est échelonnée : le calcul de son rang est immédiat et il vaut n, ce qui est strictement inférieur à sa taille $n+1$).

Exercice 36 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{C})$ et une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ telles que $A = CL$.
2. Montrer que $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$.

1. Notons $A = [a_{ij}]$. Puisque $\operatorname{rg}(A) = 1$, toutes les colonnes de la matrice A sont colinéaires entre elles. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Il existe donc une colonne $C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\forall j \in [\![1\,;n]\!]\,,\ C_j = \lambda_j C$. En écrivant $C = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$, on obtient donc :

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad a_{ij} = \lambda_i \mu_j$$

Or si on introduit la matrice-ligne $L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, on constate que CL est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le coefficient en position (i,j) n'est autre que $\lambda_i \mu_j$ si bien que $A = CL$.
NB : on peut calculer le produit dans l'autre sens. Le produit LC est une matrice de taille 1×1. Autrement dit, c'est un nombre. Plus précisément

$$CL = A = \begin{bmatrix} \lambda_1\mu_1 & \cdots & \lambda_1\mu_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n\mu_1 & \cdots & \lambda_n\mu_n \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad LC = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k.$$

2. Puisque $A = CL$, il vient :

$$A^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL = (LC)A$$

car (LC) est un nombre donc nous pouvons le déplacer dans le produit. Par ailleurs :

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(CL) = \operatorname{Tr}(LC)$$

d'après la propriété fondamentale de la trace. Or (LC) est un nombre donc $\operatorname{Tr}(LC) = LC$ et donc finalement :

$$A^2 = \operatorname{Tr}(A)A.$$

Remarque : si ces manipulations sur la trace vous troublent, regardez directement le calcul de la matrice $A = CL$ et du nombre LC à la fin de la question précédente. Vous verrez qu'on a bien $LC = \operatorname{Tr}(A)$.

Exercice 37 : Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *à diagonale dominante* lorsque :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,.$$

1. Donner un exemple de matrice à diagonale dominante de taille n dont aucun terme n'est nul.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale dominante et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. En utilisant un indice $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que

$$|x_k| = \max\Big\{\, |x_j| \ ;\ j \in [\![1\,;n]\!] \Big\},$$

montrer que $X = 0$.
3. Que peut-on en déduire sur la matrice A ?

1. On peut par exemple prendre une matrice dont tous les coefficients hors de la diagonale valent 1 et les coefficients diagonaux valent n :

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{bmatrix}$$

En effet, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, il vient :

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| = \sum_{j \neq i} 1 = n - 1 < n = |a_{ii}|\,.$$

2. Notons que, puisque les $|x_i|$ sont en nombre fini, l'un d'entre eux est le plus grand. Prenons k tel que
$$|x_k| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,.$$
Si nous supposons par l'absurde que $X \neq 0$, alors il existe un (ou plusieurs) indice(s) i tel(s) que $x_i \neq 0$ et donc en particulier $x_k \neq 0$. Puisque $AX = 0$, sa k-ème coordonnée est nulle, ce qui donne :
$$0 = (AX)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = a_{kk}x_k + \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j$$
et donc, par inégalité triangulaire puis par maximalité de $|x_k|$:
$$|a_{kk}|\,|x_k| = \left|-\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\,|x_j| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{kj}|\,|x_k|\,.$$
Le nombre $|x_k|$ étant strictement positif, on peut simplifier par lui et il vient :
$$|a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$$
ce qui est contraire à notre hypothèse. Cette contradiction prouve que X est le vecteur-colonne nul.

3. La matrice A vérifie la propriété :
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}), \qquad AX = 0 \implies X = 0$$
et d'après le cours, nous savons que cela implique que A est inversible (le noyau d'un endomorphisme associé à A est réduit à $\{0\}$).

Exercice 38 :

1. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure stricte* lorsqu'elle est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients diagonaux sont nuls.
Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in L(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $N_k = \operatorname{Ker} f^k$.
   (a) Montrer que $\{0_E\} = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_p = E$.
   (b) Pour $k \in [\![1\,;p]\!]$ et $x \in N_k$, montrer que $f(x) \in N_{k-1}$.
   (c) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte.

Indication : pour la première question, si M est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, dans quel sous-espace se trouve le vecteur $f(e_i)$? La notation $A \subsetneq B$ signifie que $A \subset B$ mais que $A \neq B$.

1. Soit $M = [m_{ij}]$ une matrice triangulaire supérieure stricte.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $f \in L(\mathbb{K}^n)$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f = M$. Notons 0 le n-uplet nul.
Pour $j \geqslant 2$ et tout $i \geqslant j$, on a $m_{ij} = 0$ et donc $f(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{j-1})$.
Nous convenons de poser $e_j = 0$ pour $j \leqslant 0$. Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $f(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_i\,;\,i \leqslant j-1)$.
Nous en déduisons par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad f^k(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_i\,;\,i \leqslant j-k).$$
La propriété est établie pour $k = 1$. Supposons le résultat acquis à une certaine étape k. Alors, pour $j \in [\![1\,;n]\!]$,
$$f^{k+1}(e_j) = f(f^k(e_j)) = f\left(\sum_{i\leqslant j-k} \lambda_i e_i\right) \quad \text{pour certains scalaires } \lambda_i$$
et donc
$$f^{k+1}(e_j) = \sum_{i\leqslant j-k} \lambda_i f(e_i)$$
Chacun de ces $f(e_i)$ appartient à $\operatorname{Vect}(e_\ell\,;\,\ell \leqslant i-1)$ et donc tous ces vecteurs $f(e_i)$ appartiennent à $\operatorname{Vect}(e_\ell\,;\,\ell \leqslant j-k-1)$ si bien que $f^{k+1}(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_i\,;\,i \leqslant j-k-1)$. Cela achève la récurrence
Pour $k = n$, il vient
$$\forall j \in [\![1\,;n]\!]\,, \quad f^n(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_i\,;\,i \leqslant j-n) = \{0\}$$
et donc f^n est l'application nulle. Par conséquent, $M^n = 0$ et M est nilpotente.

2. (a) Il est clair que $N_0 = \operatorname{Ker} \operatorname{Id}_E = \{0_E\}$ et N_p est le noyau de l'application nulle, c'est-à-dire $N_p = E$. Si $x \in N_k$, alors
$$f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$$
et donc $x \in N_{k+1}$. Cela prouve l'inclusion $N_k \subset N_{k+1}$. Il reste à prouver que ces inclusions sont strictes.
Supposons par l'absurde que pour un certain $k \in [\![0\,;p-1]\!]$, on ait $N_k = N_{k+1}$. Prenons alors $x \in E$ quelconque. Puisque
$$0_E = f^p(x) = f^{k+1}(f^{p-k-1}(x)),$$
il vient $f^{p-k-1}(x) \in N_{k+1}$. Mais comme $N_{k+1} = N_k$, il vient alors $f^{p-k-1}(x) \in N_k$ et donc
$$f^{p-1}(x) = f^k(f^{p-k-1}(x)) = 0_E.$$
Cela étant vrai pour tout $x \in E$, il vient $f^{p-1} = 0$, ce qui contredit la minimalité de l'indice de nilpotence p. Cette contradiction prouve que les inclusions sont strictes.

(b) Pour $x \in N_k$, il vient :

$$f^{k-1}(f(x)) = f^k(x) = 0_E \quad \text{et donc} \quad f(x) \in N_{k-1}.$$

(c) Pour $k \in [\![1\,;p]\!]$, notons d_k la dimension de N_k. D'après les inclusions strictes démontrées précédemment, il vient $0 < d_1 < \cdots < d_p = n$. Nous construisons une base de E par étapes :

- Prenons tout d'abord une base $(e_1, \ldots, e_{d_1})$ de N_1.
- La famille $(e_1, \ldots, e_{d_1})$ est une famille libre de N_2 qu'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_{d_2})$ de N_2.
- etc
- La famille $(e_1, \ldots, e_{d_{p-1}})$ est une famille libre de $N_p = E$ qu'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Par construction, chacun des vecteurs de base est dans un certain N_k (avec k minimal) et son image est dans N_{k-1} donc son image est combinaison linéaire des vecteurs précédents de la base. Cela prouve que, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_i\ ;\ i < j)$ et cela montre que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\, f$ est triangulaire supérieure stricte.

On donne les définitions de matrices équivalentes et de matrices semblables. Pour A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit :

- que A et B sont équivalentes lorsqu'il existe deux matrices inversibles P, Q telles que $B = QAP$;
- que A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.

On démontre que deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang. L'étude de la relation de similitude (c'est-à-dire le fait que deux matrices soient semblables) est plus subtile et nous y consacrerons une partie du cours de deuxième année.

Exercice 39 : Pour $1 \leqslant r \leqslant n$, on définit la matrice

$$J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quelles sont les matrices équivalentes à J_r ?
2. Quelles sont les matrices semblables à J_r ?

1. D'après le résultat sur les matrices équivalentes qui a été rappelé en préambule, les matrices équivalentes à J_r sont toutes les matrices de rang r.
2. Tout d'abord, supposons que M est semblable à J_r. Il existe donc une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P^{-1}J_rP$. D'une part, cela implique que $\mathrm{rg}(M) = r$ mais, d'autre part :

$$M^2 = P^{-1}J_rPP^{-1}J_rP = P^{-1}J_r^2P = P^{-1}J_rP = M.$$

Inversement, supposons que M est une matrice de rang r telle que $M^2 = M$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n avec une base $\mathscr{B}$. Soit f l'endomorphisme de E associé à M dans la base $\mathscr{B}$. Comme $M^2 = M$, il vient $f \circ f = f$ et donc f est un projecteur. On sait alors que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Comme $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, M = r$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - r$, introduisons $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de $\mathrm{Im}\, f$ et $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$. En recollant une base de $\mathrm{Im}\, f$ et une base de $\mathrm{Ker}\, f$, on obtient une base de E si bien que $\mathscr{C} = (u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ est une base de E. Mais comme $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}\, f$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1\,;r]\!]\,,\ f(e_i) = e_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![r+1\,;n]\!]\,,\ f(e_i) = 0$$

si bien que la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est J_r. Puisque M et J_r sont deux matrices du même endomorphisme f dans deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, elles sont semblables.

En résumé, on a prouvé :

- M est équivalente à J_r si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) = r$.
- M est semblable à J_r si, et seulement si, $\mathrm{rg}(M) = r$ et $M^2 = M$.

Exercice 40 ($\star$) :

1. Montrer que deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont toujours équivalentes.
2. Déterminer à quelle condition deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

1. Les matrices de la base canonique sont toutes de rang 1. Comme elles ont le même rang, elles sont équivalentes entre elles.
2. Montrons le résultat suivant :

$$E^{ij} \text{ et } E^{kl} \text{ sont semblables si, et seulement si, } \left\{\begin{array}{l} i = j \\ k = l \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} i \neq j \\ k \neq l \end{array}\right.$$

Tout d'abord, si $i = j$ et $k \neq l$ (ou l'inverse), alors $\mathrm{Tr}(E^{ij}) = 1$ et $\mathrm{Tr}(E^{kl}) = 0$ (ou l'inverse). Comme les deux matrices n'ont pas la même trace, elles ne sont pas semblables.

Munissons $\mathbb{K}^n$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et considérons les endomorphismes f_{ij} tels que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}} f_{ij} = E^{ij}$, c'est-à-dire que $f_{ij}(e_j) = e_i$ et $f_{ij}(e_p) = 0$ si $p \neq j$.
Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation de $[\![1\,;n]\!]$, considérons la famille

$$\mathscr{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$$

obtenue en permutant les vecteurs de $\mathscr{B}$ de sorte que, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on ait $e_j = e'_{\sigma(j)}$, c'est-à-dire que le vecteur e_j est maintenant en position $\sigma(j)$ dans la nouvelle famille. La famille $\mathscr{C}$ est toujours une base de $\mathbb{K}^n$.
Fixons maintenant $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ et posons $k = \sigma(i)$, $l = \sigma(j)$. Alors :

$$f_{ij}(e'_l) = f_{ij}(e_j) = e_i = e'_k$$

et pour $p \neq l$, $f_{ij}(e'_p) = 0$ si bien que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}} f = E^{kl}$. Cela prouve que, dès que nous pouvons trouver une permutation σ de $[\![1\,;n]\!]$ telle que $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$, alors E^{ij} et E^{kl} représentent le même endomorphisme f_{ij} dans deux bases différentes donc elles sont semblables.
Pour terminer la preuve, il nous reste à vérifier que si $\begin{cases} i = j \\ k = l \end{cases}$ ou $\begin{cases} i \neq j \\ k \neq l \end{cases}$ alors il existe une permutation σ envoyant i sur k et j sur l.
Dans le cas $\begin{cases} i = j \\ k = l \end{cases}$ c'est clair : n'importe quelle permutation envoyant i sur k enverra aussi j sur l.
Dans le cas $\begin{cases} i \neq j \\ k \neq l \end{cases}$, nous écrivons $[\![1\,;n]\!] = \{i, j\} \cup A = \{k, l\} \cup B$, ces unions étant disjointes. Puisque $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(B) = n - 2$, il y a une bijection σ de A sur B. On complète cette bijection en posant $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$. L'application ainsi construite est une permutation de $[\![1\,;n]\!]$ qui envoie i sur k et j sur l.

F Déterminants

L'outil principal pour le calcul des déterminants est le développement par rapport à une ligne ou à une colonne. Il ne faut toutefois pas oublier les aspects les plus élémentaires sur les déterminants qui suffisent à conclure dans pas mal de cas :

- *le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes et aussi par rapport aux lignes.*
- *le déterminant est alterné : dès que deux colonnes sont égales, le déterminant est nul ; plus généralement, dès que la famille des colonnes est liée, le déterminant est nul (ces remarques sont valables pour les lignes).*
- *le déterminant sert à savoir si une matrice est inversible, si une famille de vecteurs est une base, si un endomorphisme est bijectif.*

Exercice 41 : Que vaut le déterminant d'un endomorphisme nilpotent ?

Si $u^p = 0$, alors $\det(u)^p = \det(u^p) = 0$ donc $\det(u) = 0$.

NB : nous avions vu dans un exercice précédent qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif. Mais, avec le calcul que nous venons de faire dans cet exercice, on constate que $\det(u) = 0$ et donc u n'est pas bijectif (et donc u n'est ni injectif ni surjectif puisque c'est un endomorphisme en dimension finie). Comme on le voit, le calcul du déterminant est immédiat et c'est la méthode la plus rapide pour prouver qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif.

Exercice 42 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $b \neq c$. On note

$$M = \begin{bmatrix} a & c & \dots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose $M(x) = \begin{bmatrix} a-x & c-x & \dots & c-x \\ b-x & a-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c-x \\ b-x & \dots & b-x & a-x \end{bmatrix}$
   puis on définit $P(x) = \det(M(x))$.
   Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.
2. En déduire la valeur de $\det(M)$.

Indication : pour la première question, on peut faire des opérations sur les lignes ou les colonnes pour diminuer le nombre de x dans la matrice.

1. La matrice $M(x)$ est obtenue à partir de la matrice M en retranchant x à chaque coefficient. Si nous écrivons la matrice $N(x)$ obtenue en retranchant la première colonne de $M(x)$ à toutes les autres colonnes, nous trouvons une matrice dont les colonnes 2 à n ne contient pas de x :

$$N(x) = \begin{bmatrix} a-x & c-a & \dots & \dots & c-a \\ b-x & a-b & c-b & \dots & c-b \\ \vdots & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c-b \\ b-x & 0 & \dots & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

   Imaginons maintenant (sans l'écrire en détails) le développement de $\det(N(x))$ par rapport à sa première colonne. Nous voyons qu'interviennent les coefficients de la première colonne multipliés par des mineurs. Dans les mineurs qui interviennent, la première colonne a été rayée. Comme cette colonne est la seule qui contienne des x, on voit que les mineurs ne dépendent pas de x. Quant à eux, les coefficients de la première colonne sont des polynômes en x de degré 1. En sommant tout ceci, on obtient donc un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1.

2. La matrice $M(b)$ est triangulaire supérieure (il y a des $b-b=0$ sous la diagonale). Son déterminant $P(b)$ vaut donc $(a-b)^n$. La matrice $M(c)$ est triangulaire inférieure donc $P(c)=(a-c)^n$.
3. Comme $b\neq c$, nous connaissons les valeurs du polynôme P en deux nombres distincts. Comme ce polynôme est de degré 1, cela suffit à le déterminer totalement. En effet, nous avons $P(x)=px+q$ et $\left\{\begin{array}{l} P(b)=pb+q=(a-b)^n \\ P(c)=pc+q=(a-c)^n \end{array}\right.$
Ce système suffit à déterminer les valeurs de p et q. En multipliant la première équation par c et la seconde équation par b, et en les retranchant, il vient : $cq-bq=c(a-b)^n-b(a-c)^n$ d'où
$$\det(M)=P(0)=q=\frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}\cdot$$

Exercice 43 : Soient a,b deux nombres complexes tels que $a\neq b$. Calculer

$$W_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} \qquad \text{(déterminant de taille } n\text{)}$$

Indication : établir une relation de récurrence double.

1. En développant par rapport à la première ligne, il vient :
$$W_n=(a+b)W_{n-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$
et donc $W_n=(a+b)W_{n-1}-abW_{n-2}$.
2. Nous avons $W_1=a+b$ (matrice 1×1) et
$$W_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)^2-ab=a^2+b^2+ab.$$
3. On montre par récurrence double que $W_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}\cdot$ Notre relation de récurrence étant d'ordre 2 (elle fait intervenir W_{n-1} et W_{n-2} pour calculer W_n), nous devons l'initialiser aux rangs 1 et 2. Au rang 1, cela donne $W_1=a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\cdot$ Au rang 2, on trouve $(a-b)(a^2+b^2+ab)=a^3-b^3$ donc on a bien $W_2=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}\cdot$
Montrons maintenant l'hérédité. D'après notre relation de récurrence, on peut écrire :
$$\begin{aligned} W_n=(a+b)W_{n-1}-abW_{n-2}&=(a+b)\frac{a^n-b^n}{a-b}-ab\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b} \\ &=\frac{a^{n+1}+a^nb-ab^n-b^{n+1}-a^nb+ab^n}{a-b}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, \end{aligned}$$
ce qui achève la preuve par récurrence.

Exercice 44 ($\star$) : Pour $A=[a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S une partie de $[\![1\,;n]\!]$ de cardinal $p\geqslant 1$, on note A_S la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par $A_S=[a_{i,j}]_{(i,j)\in S^2}$. On note Δ_n^+ l'ensemble des matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A_S)>0$ pour toute partie non vide S de $[\![1\,;n]\!]$. Si $A\in\Delta_n^+$, montrer que $A^{-1}\in\Delta_n^+$.

Soit $A\in\Delta_n^+$. Tout d'abord, l'hypothèse implique $\det(A)>0$ donc la matrice A est inversible et
$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}>0.$$
Soit $u\in L(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Soit S une partie de $[\![1\,;n]\!]$ différente de $\varnothing$ et de $[\![1\,;n]\!]$. Des développements successifs par rapport aux colonnes dont les numéros ne sont pas dans S donnent
$$\det(A_S)=\det_{\mathscr{B}}(\dots,\underbrace{u(e_i)}_{\text{quand } i\in S},\dots,\underbrace{e_j}_{\text{quand } j\notin S},\dots).$$
Pour aider à mieux comprendre cette propriété, dessinons ce dernier déterminant dans le cas $S=[\![1\,;p]\!]$ (ce choix de S rend le dessin plus facile à comprendre mais le résultat est identique dans tous les cas) :
$$\det_{\mathscr{B}}(u(e_1),\dots,u(e_p),e_{p+1},\dots,e_n)=\begin{vmatrix} \multicolumn{3}{c}{\boxed{A_S}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En appliquant cette formule à A^{-1} :

$$\det((A^{-1})_S) = \det_{\mathscr{B}}(\dots, \underbrace{u^{-1}(e_i)}_{\text{quand } i\in S}, \dots, \underbrace{e_j}_{\text{quand } j\notin S}, \dots).$$

Mais on a la propriété suivante, pour tout endomorphisme v et toute famille de vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$:

$$\det_{\mathscr{B}}(v(f_1), \dots, v(f_n)) = \det(v) \det_{\mathscr{B}}(f_1, \dots, f_n)$$

si bien que

$$\det((A^{-1})_S) = \det(u^{-1}) \det_{\mathscr{B}}(\dots, \underbrace{e_i}_{\text{quand } i\in S}, \dots, \underbrace{u(e_j)}_{\text{quand } j\notin S}, \dots) = \frac{\det(A_{\overline{S}})}{\det(A)}$$

en notant $\overline{S}$ le complémentaire de S. Par hypothèse $\det(A_{\overline{S}}) > 0$ et $\det(A) > 0$ donc $\det((A^{-1})_S) > 0$, ce qui prouve que $A^{-1} \in \Delta_n^+$.

G Espaces euclidiens

Les espaces euclidiens permettent d'approfondir le lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie. Sur ce chapitre, il est donc particulièrement important de rappeler un conseil général : faites des dessins ! Il est bien plus intuitif de visualiser un projecteur orthogonal avec une figure. L'algorithme de Gram-Schmidt vous paraîtra impossible à retenir jusqu'à ce que vous fassiez un dessin pour comprendre qu'à chaque étape on cherche le projeté orthogonal du nouveau vecteur sur le sous-espace engendré par les vecteurs précédents. Les dessins dont vous avez besoin ne sont pas des œuvres d'art mais des schémas qui guident votre intuition[6].

Exercice 45 : Soit $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Pour $f, g \in \mathbb{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on pose

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $s_k : x \mapsto \sin(kx)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ est une famille orthogonale de $\mathscr{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Est-elle orthonormale ?

On vérifie que les produits scalaires de deux éléments distincts de la famille sont nuls.

- Pour $i \neq j$, montrons que $(c_i|c_j) = 0$.

$$\begin{aligned}(c_i|c_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(it)\cos(jt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos((i+j)t) + \cos((i-j)t)}{2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque $i, j \in [\![0\,;n]\!]$ et $i \neq j$, il vient $i+j > 0$ et $i-j \neq 0$ donc :

$$(c_i|c_j) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((i+j)t)}{i+j} + \frac{\sin((i-j)t)}{i-j}\right]_0^{2\pi} = 0$$

- Pour $i \neq j$, montrons que $(s_i|s_j) = 0$.

$$\begin{aligned}(s_i|s_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(it)\sin(jt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos((i-j)t) - \cos((i+j)t)}{2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque $i, j \in [\![0\,;n]\!]$ et $i \neq j$, il vient $i+j > 0$ et $i-j \neq 0$ donc :

$$(c_i|c_j) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin((i-j)t)}{i-j} - \frac{\sin((i+j)t)}{i+j}\right]_0^{2\pi} = 0$$

- Pour $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, montrons que $(s_i|c_j) = 0$.

$$\begin{aligned}(s_i|c_j) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(it)\cos(jt)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((i+j)t) + \sin((i-j))t}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos((i+j)t)}{i+j}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin((i-j)t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le premier crochet est nul. Lorsque $i = j$, la seconde intégrale est clairement nulle. Lorsque $i \neq j$, on peut écrire :

$$(s_i|c_j) = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos((i-j)t)}{i-j}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Finalement, dans tous les cas possibles, le produit scalaire de deux éléments différents de la famille est nul. Par conséquent, la famille est orthogonale.
La famille n'est pas orthonormale. En effet :

$$\|c_1\|^2 = (c_1|c_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

6. Ce conseil n'est pas valable seulement dans les espaces euclidiens ! Par exemple la trigonométrie ne s'apprend qu'à force de dessiner des cercles trigonométriques pour y visualiser les formules.

Remarque : on démontre de même que $\|c_0\| = 1$ et que pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\|c_i\| = \|s_i\| = \frac{1}{2}\cdot$ Par conséquent, la famille suivante est orthonormale :

$$\left(c_0, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_n\right)$$

Ces familles orthonormales jouent un rôle crucial dans la théorie de Fourier qui permet de décomposer n'importe quel signal périodique comme une superposition de signaux sinusoïdaux.

Exercice 46 : Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tA\,B)$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que $\quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ |\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$.
3. Montrer que $\quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leqslant \|A\|\ \|B\|$.

Indication : *Pour la troisième question, utiliser le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.*

1. • Symétrie.
   Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient :

   $$(B|A) = \mathrm{Tr}\left({}^tB\,A\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\left({}^tB\,A\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tA\,B\right) = (A|B)\,.$$

   NB : on n'a pas utilisé la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

   • Bilinéarité. Par symétrie, il suffit de prouver la linéarité à droite.
   Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$\begin{aligned}(A|B+\lambda C) &= \mathrm{Tr}\left({}^tA\,(B+\lambda C)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tA\,B + \lambda\,{}^tA\,C\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left({}^tA\,B\right) + \lambda\,\mathrm{Tr}\left({}^tA\,C\right) = (A|B) + \lambda\,(A|C)\,.\end{aligned}$$

   • Caractère défini positif.
   Pour toute matrice M, notons $[M]_{ij}$ le coefficient de M en position (i,j). Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient :

   $$(A|A) = \sum_{j=1}^n \left[{}^tA\,A\right]_{jj} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \left[{}^tA\right]_{ji}[A]_{ij} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n [A]_{ij}^2$$

   Cette écriture montre clairement que $(A|A)$ est positif. De plus, lorsque $(A|A) = 0$, alors tous les termes $[A]_{ij}$ sont nuls, ce qui signifie que A est la matrice nulle.

   Ces vérifications prouvent que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme euclidienne de A est :

   $$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j}[A]_{ij}^2}$$

   étant entendu que $\sum\limits_{i,j}$ est mis à la place de $\sum\limits_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$

2. Nous constatons que $\|I_n\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$. Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

   $$|\mathrm{Tr}(A)| = |(I_n|A)| \leqslant \|I_n\|\,\|A\| = \sqrt{n}\,\|A\|\,.$$

3. Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient :

   $$\|AB\|^2 = \sum_{i,j}[AB]_{ij}^2 = \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik}\,[B]_{kj}\right)^2$$

   Notons $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$ et $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$ la norme euclidienne associée. Considérons les deux éléments suivants de $\mathbb{R}^n$:

   $$a = \left([A]_{i1}\,,\ldots,[A]_{in}\right) \quad \text{et} \quad b = \left([B]_{1j}\,,\ldots,[B]_{nj}\right)$$

   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée à ce produit scalaire, il vient :

   $$\left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik}\,[B]_{kj}\right)^2 = \langle a|b\rangle^2 \leqslant \langle\!\langle a\rangle\!\rangle^2\cdot\langle\!\langle b\rangle\!\rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^n [B]_{\ell j}^2\right)$$

   $$\begin{aligned}\text{et donc}\quad \|AB\|^2 &\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sum_{k=1}^n [A]_{ik}^2\right)\left(\sum_{\ell=1}^n [B]_{\ell j}^2\right)\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n [A]_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n\sum_{\ell=1}^n [B]_{\ell j}^2\right) = \|A\|^2\,\|B\|^2\end{aligned}$$

   d'où on déduit finalement $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

Exercice 47 : Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $\quad \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : pour la réciproque, prendre $x \in \mathrm{Im}\,p$, $y \in \mathrm{Ker}\,p$ puis appliquer l'hypothèse aux vecteurs $x + ty$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Supposons tout d'abord que p est le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F. Pour $x \in E$, écrivons $x = x' + x''$ avec $x' \in F$ et $x'' \in F^{\perp}$. Il vient alors $p(x) = x'$.
Puisque $x' \perp x''$, le théorème de Pythagore assure que :

$$\|x\|^2 = \|x' + x''\|^2 = \|x'\|^2 + \|x''\|^2 \geqslant \|x'\|^2$$

et donc $\|x\| \geqslant \|x'\| = \|p(x)\|$.

Réciproquement suposons que p est le projecteur sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à un supplémentaire G et que

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|\,.$$

On cherche à montrer que F et G sont orthogonaux. Pour cela, on prend $x \in F$ et $y \in G$ et on cherche à montrer que $(x|y) = 0$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, considérons

$$f(t) = \|x + ty\|^2 = t^2\,\|y\|^2 + 2t\,(x|y) + \|x\|^2$$

Puisque $x = p(x + ty)$, notre hypothèse assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \|x + ty\|^2 \geqslant \|x\|^2 = f(0)$$

et donc la fonction f atteint son minimum en 0. Puisque f est dérivable, il vient $f'(0) = 0$. Or :

$$f'(t) = 2t\,\|y\|^2 + 2\,(x|y)$$

et donc

$$0 = f'(0) = 2\,(x|y)$$

et c'est bien ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 48 : Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\quad (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire puis orthonormaliser la base canonique $(1, X, X^2)$.

Pour montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire, il faut montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.

- Forme bilinéaire : pour tous polynômes P, Q, R et tout scalaire α, il vient :

$$\begin{aligned}(P|Q + \alpha R) &= \int_0^1 P(t)\big(Q(t) + \alpha R(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + \alpha \int_0^1 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t = (P|Q) + \alpha\,(P|R)\end{aligned}$$

ve qui montre la linéarité à droite. La linéarité à gauche se traite de même (ou bien on peut la déduire grâce à la symétrie vue ci-dessous).

- symétrique : il est évident que, pour deux polynômes P et Q, on a

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = (Q|P)\,.$$

- définie positive : pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$(P|P) = \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

De plus, si $(P|P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0\,;1]$. D'après un théorème du cours d'intégration, cela impose que $P(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0\,;1]$. On obtient ainsi une infinité de racines pour le polynôme P et cela impose que $P = 0$.

Orthonormalisons la base canonique $(1, X, X^2)$. Tout d'abord,

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$$

On pose

$$\boxed{U_0 = 1}$$

C'est un vecteur unitaire.
Construisons le deuxième vecteur U_1 de l'orthonormalisée. Pour cela, posons $F = \mathrm{Vect}(1)$. Le projeté orthogonal de X sur F est donné par :

$$p_F(X) = (X|1)\,1 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

On pose ensuite

$$V_1 = U_1 - p_F(X) = X - \frac{1}{2}$$

puis

$$\|V_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2\,\mathrm{d}u = 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} \quad \text{soit} \quad \|V_1\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

On pose $U_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$, c'est-à-dire

$$\boxed{U_1 = \sqrt{3}\,(2X - 1)}$$

Enfin, construisons le dernier vecteur de l'orthonormalisée : U_2. Pour cela, posons $G = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathrm{Vect}(U_0, U_1)$. Le projeté orthogonal de X^2 sur G est :

$$\begin{aligned}p_F(X^2) &= \big(U_0\big|X^2\big)\,U_0 + \big(U_1\big|X^2\big)\,U_1 = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + 3(2X - 1)\int_0^1 (2t - 1)t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3} + 3(2X - 1)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = X - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

On pose $V_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}\cdot$ Alors

$$\|V_2\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{180}$$

et donc $\|V_2\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}\cdot$ On pose finalement $U_2 = 6\sqrt{5}V_2$ soit encore

$$\boxed{U_2 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)}$$

L'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique est la base (U_0, U_1, U_2).

Exercice 49 : Déterminer la valeur du nombre

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $[0\,;2\pi]$ vers $\mathbb{R}$. Nous le munissons du produit scalaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}, \quad (f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous avons vérifié en cours qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
Considérons ensuite le sous-espace vectoriel de dimension 3 : $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \mathrm{Id})$ et le sous-espace de dimension 2 : $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
La quantité m qu'il faut calculer est égale à $d(\mathrm{Id}, F)^2$, c'est-à-dire le carré de la distance du vecteur Id au sous-espace vectoriel F. Nous savons d'après le cours que $d(\mathrm{Id}, F) = \|\mathrm{Id} - p_F(\mathrm{Id})\|$.
Reste donc à déterminer le projeté orthogonal de Id sur F. Or ici, nous pouvons constater que :

$$(\cos|\sin) = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

De plus, $\|\cos\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi$ et de même $\|\sin\|^2 = \pi$. Par conséquent, en posant :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin$$

on constate que la famille (c, s) est une base orthonormée de F. Par conséquent :

$$p_F(\mathrm{Id}) = (\mathrm{Id}|c)\,c + (\mathrm{Id}|s)\,s = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t\right]\cos + \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,\mathrm{d}t\right]\sin$$

Les deux intégrales ci-dessus se calculent par intégration par partie :

$$\int_0^{2\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} t\sin(t)\,\mathrm{d}t = -2\pi$$

Finalement, $p_F(\mathrm{Id}) = -2\sin$ et donc le nombre recherché est :

$$m = d(\mathrm{Id}, F)^2 = \|\mathrm{Id} + 2\sin\|^2 = \int_0^{2\pi} (t + 2\sin t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi.$$

Exercice 50 : Soit E un espace euclidien et x_0 un vecteur de E tel que $\|x_0\| = 1$. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_0)$.

1. On note p_F le projecteur orthogonal sur F et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Pour $x \in E$, exprimer $p_F(x)$ et $s_F(x)$ à l'aide de x et x_0.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de x_0 dans $\mathcal{B}$. Exprimer les matrices de p_F et de s_F dans la base $\mathcal{B}$.

1. Le vecteur x_0 forme une base orthonormée de la droite F. D'après la formule pour la projection orthogonale :

$$p_F(x) = (x_0|x)\,x_0$$

Or le lien entre projection et symétrie nous dit que $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$ et donc :

$$s_F(x) = 2\,(x_0|x)\,x_0 - x$$

2. La formule du produit scalaire en base orthonormée permet d'écrire, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$:

$$p_F(e_j) = (x_0|e_j)\,x_0 = \alpha_j x_0 = \alpha_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

En notant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, p_F = P = [P_{ij}]$, le coefficient devant e_i dans $p_F(e_j)$ est égal à P_{ij} et donc

$$\boxed{\forall i, j \in [\![1\,;n]\!]^2,\ P_{ij} = \alpha_i\alpha_j}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, s_F = 2P - I_n = [Q_{ij}] \quad \text{avec} \quad \boxed{Q_{ij} = \begin{cases} 2\alpha_i^2 - 1 & \text{si } j = i \\ 2\alpha_i\alpha_j & \text{si } j \neq i \end{cases}}$$

En notant $X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées de x_0 dans la base $\mathcal{B}$, il vient :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} p_F = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \dots & \alpha_1\alpha_n \\ \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1}\alpha_n \\ \alpha_n\alpha_1 & \dots & \alpha_n\alpha_{n-1} & \alpha_n^2 \end{bmatrix} = X_0\, {}^t X_0$$

$$\text{et} \quad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} s_F = \begin{bmatrix} 2\alpha_1^2 - 1 & 2\alpha_1\alpha_2 & \dots & 2\alpha_1\alpha_n \\ 2\alpha_2\alpha_1 & 2\alpha_2^2 - 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\alpha_{n-1}\alpha_n \\ 2\alpha_n\alpha_1 & \dots & 2\alpha_n\alpha_{n-1} & 2\alpha_n^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 51 : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'il existe une famille orthonormale $(P_0, \dots, P_n)$ telle que chaque polynôme P_k soit de degré k.
3. Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$. Soit $a_1, \dots a_p$ les racines de P_k qui sont de multiplicité impaire et situées dans $]0\,;1[$. On définit le polynôme

$$Q = (X - a_1) \dots (X - a_p)$$

avec la convention, si P_k n'a aucune racine de multiplicité impaire située dans $]0\,;1[$, que $Q = 1$.
   (a) Montrer que $t \mapsto P_k(t)Q(t)$ garde un signe constant sur $[0\,;1]$.
   (b) En déduire que $\deg(Q) = k$.
   (c) Montrer que P_k est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $]0\,;1[$.

1. • Symétrie. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il vient :

$$(Q|P) = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = (P|Q)$$

• Bilinéarité. Par symétrie, il suffit de prouver la linéarité à droite. Pour $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il vient :

$$\begin{aligned}(P|Q + \lambda R) &= \int_0^1 P(t)[Q(t) + \lambda R(t)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 P(t)R(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (P|Q) + \lambda\,(P|R)\end{aligned}$$

• Caractère défini positif. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il vient :

$$(P|P) = \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Supposons maintenant que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $(P|P) = 0$. Puisque la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive, la nullité de son intégrale implique :

$$\forall t \in [0\,;1], \quad P(t) = 0$$

Dès lors, le polynôme P possède une infinité de racines et donc c'est le polynôme nul.

Cela prouve que la forme bilinéaire symétrique $(\cdot|\cdot)$ est définie positive. C'est un produit scalaire.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe donc une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$$

Cela impose clairement que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ est donc $\deg(P_k) \leqslant k$. De plus si $\deg(P_k) < k$, alors

$$\operatorname{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \operatorname{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1}) + \operatorname{Vect}(P_k) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$$

Cela donne $k+1$ vecteurs $P_0, \dots, P_k$ libres dans un espace de dimension k. Cette absurdité prouve que $\deg(P_k) = k$.

3. (a) Par définition de Q, les racines de P_kQ sont les mêmes que celles de P_k mais celles qui appartiennent à $]0\,;1[$ et avaient une multiplicité impaire dans P_k ont maintenant une multiplicité augmentée de 1 dans P_kQ (donc paire). Par conséquent, toutes les racines de P_kQ qui sont situées dans $]0\,;1[$ sont de multiplicité paire.

Si λ est une racine de P_kQ de multiplicité paire $2m$, on peut écrire $P_kQ = (X - \lambda)^{2m}S$ avec $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $S(\lambda) \neq 0$. On obtient ainsi

$$P_k(t)\, Q(t) \underset{t \to \lambda}{\sim} S(\lambda)\,(t - \lambda)^{2m}$$

ce qui montre que P_kQ ne change pas de signe au voisinage de la racine. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il ne peut changer de signe qu'au passage d'une racine. Finalement, il ne change pas de signe sur $]0\,;1[$. Par continuité, il ne change pas non plus de signe sur $[0\,;1]$.

(b) Puisque $a_1,\dots,a_p$ sont des racines distinctes du polynôme P, il vient $\deg(Q)=p\leqslant \deg(P_k)=k$. Par l'absurde, si nous avions $\deg(Q)<k$, alors nous aurions

$$Q\in \mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{k-1})=\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$$

Il existerait alors des constantes $\lambda_0,\dots,\lambda_{k-1}\in\mathbb{R}$ telles que :

$$Q=\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_jP_j \quad \text{et donc} \quad (Q|P)=\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j\,(P_j|P_k)=0$$

puisque la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est orthogonale. Cela imposerait donc :

$$\int_0^1 P_k(t)Q(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Comme la fonction P_kQ est continue et de signe constant sur $[0\,;1]$, elle serait nulle sur $[0\,;1]$. Cela donnerait une infinité de racines pour P_kQ et donc $P_kQ=0$. C'est absurde puisque ni P_k ni Q ne sont nuls.

Cette absurdité prouve que Q est de degré k (et donc $p=k$). Comme Q est un diviseur de P_k de même degré que P_k, il lui est associé et donc P_k a les mêmes racines que Q avec les mêmes multiplicités. Les racines de P_k sont $a_1,\dots,a_k$. Elle sont toutes simples et situées dans $]0\,;1[$.

II Analyse

A Suites et séries

Écrivons la définition de la phrase « la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers le nombre ℓ » :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant n_0,\quad |u_n-\ell|$$

ce qui signifie que, quelle que soit la précision désirée ($\forall\varepsilon>0$), il existe un rang ($\exists n_0\in\mathbb{N}$) à partir duquel ($\forall n\geqslant n_0$) la suite réalise une approximation de la limite ℓ à la précision souhaitée ($|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$). C'est une très belle définition qui, historiquement, a mis beaucoup de temps à être formalisée. Toutefois pour de nombreux exercices, on n'utilise pas directement cette définition mais plutôt les théorèmes démontrés dans le cours et qui en découlent. Il convient donc de ne pas se précipiter sur cette définition (sinon le moindre exercice simple devient plus compliqué) mais il ne faut pas non plus rechigner à l'utiliser en cas de besoin. Certains exercices plus délicats de la liste ci-dessous nécessite d'utiliser la définition. Dans ce cas, n'accumulez pas les quantificateurs : ce qu'on veut voir, c'est votre ***raisonnement*** *écrit avec des phrases.*

Le chapitre sur les séries sera partiellement repris en deuxième année. Pour être efficace, il est important de bien comprendre la structure de tous les résultats de ce chapitre : pour étudier une série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$, on devrait normalement étudier la suite des sommes partielles $S_N=\sum_{n=0}^{N}u_n$. Toutefois, dans l'immense majorité des cas, on ne sait pas calculer S_N explicitement[7] *et donc les théorèmes du cours ont des hypothèses qui portent sur le terme général u_n et des conclusions qui portent sur la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$. L'emploi de ces théorèmes a donc pour objectif de vous dispenser de manipuler les sommes partielles.*

Exercice 52 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que la suite $(e^{nz})_{n\geqslant 0}$ converge.

Il s'agit de la suite géométrique de raison e^z. On distingue 4 cas :

- Si z est de la forme $z=2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors $e^z=1$ et donc $e^{nz}=1$. La suite converge vers 1.
- Si $\mathrm{Re}(z)=0$ mais que z n'est pas de la forme $2ik\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors on écrit $z=i\theta$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $\theta\not\equiv 0\,[2\pi]$. Dans ce cas, le nombre $q=e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1 et différent de 1. En supposant par l'absurde que $\lim_{n\to\infty}e^{nz}=\ell$, on obtiendrait alors

$$|\ell|=\lim_{n\to\infty}|q^n|=1$$

  et en particulier $\ell\neq 0$. Mais alors, on aurait

$$q=\frac{q^{n+1}}{q^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ell}{\ell}=1$$

  ce qui est contraire à nos hypothèses. Cette contradiction prouve que $(e^{nz})_{n\geqslant 0}$ est divergente.
- Si $\mathrm{Re}(z)>0$, alors $|e^{nz}|=e^{n\,\mathrm{Re}(z)}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$. En particulier, la suite $(e^{nz})_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée donc elle ne converge pas.
- Si $\mathrm{Re}(z)<0$, alors $|e^{nz}|=e^{n\,\mathrm{Re}(z)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et donc $\lim_{n\to\infty}e^{nz}=0$.

En conclusion, la suite $(e^{nz})_{n\geqslant 0}$ converge si, et seulement si,

$$\mathrm{Re}(z)<0 \quad \text{ou} \quad z\in i\mathbb{R}\setminus\{2ik\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$$

7. à l'exception notable des séries géométriques et des séries télescopiques pour lesquelles on sait calculer les sommes partielles.

Remarque : pour $z \in \mathbb{C}$, on rappelle les formules suivantes :

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{et} \quad \arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\,[2\pi]$$

Exercice 53 : Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Lorsque la série converge, calculer sa somme.

On remarque que

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\left[1+\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

et de même

$$\sqrt{n+2} = \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Par conséquent :

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}a+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Afin que u_n tende vers 0, il est nécessaire que $1+a+b=0$. Si tel est le cas mais que $\frac{1}{2}a+b \neq 0$, alors $u_n \sim \left(\frac{1}{2}a+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est de signe constant et est le terme général d'une série divergente. Par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

En revanche, si $\begin{cases} 1+a+b=0 \\ \frac{1}{2}a+b=0 \end{cases}$ alors $u_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.

En résumé, il y a convergence ssi $\begin{cases} 1+a+b=0 \\ \frac{1}{2}a+b=0 \end{cases}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge \underline{ssi} } a=-2 \text{ et } b=1}$$

Dans le cas où $a=-2$ et $b=1$, on peut écrire :

$$u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = (\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est télescopique et

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1} - 1 \xrightarrow[N\to\infty]{} -1 \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = -1.$$

Exercice 54 : On pose $u_0 = 0$ puis $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l'unique point fixe de la fonction cos dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
Indication : utiliser l'inégalité des accroissements finis entre u_n et le point fixe.

1. La fonction $g : \left\{\begin{array}{ccc} \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x - x \end{array}\right.$ est la somme de deux fonctions strictement décroissantes. Elle est donc strictement décroissante. Par ailleurs, elle est continue. Le théorème de la bijection s'applique. Comme $g(0)=1$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$, il existe un unique $a \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $g(a)=0$, c'est-à-dire $\cos a = a$.
   On a prouvé que cos possède un unique point fixe dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Prouvons par récurrence que tous les termes de la suite se trouvent dans $[0\,;1]$. C'est vrai pour $n=0$. Supposons que c'est prouvé à un certain rang n : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme cos est décroissante sur $[0\,;1]$, on peut en déduire : $\cos(1) \leqslant \cos(u_n) \leqslant \cos(0)$ et, en particulier, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Cela achève la récurrence.
3. Pour tout $t \in [0\,;1]$, il vient :
   $$|\cos'(t)| = \sin(t) \leqslant \sin(1).$$
   Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction cos entre u_n et a qui sont tous deux dans $[0\,;1]$:
   $$|u_{n+1}-a| = |\cos(u_n)-\cos(a)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - a|\,.$$
   On en déduit aussitôt par récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - a| \leqslant (\sin 1)^n\,|u_0 - a|$$
   Puisque $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, il vient $0 < \sin(1) < 1$ et donc $(\sin 1)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   Cela prouve que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Exercice 55 : On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{1+2x^2}.$$

On souhaite étudier la suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Encadrer la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Dans quel cas peut-il exister $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$?

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \neq 1$. On cherche maintenant à démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est divergente et on raisonne par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ pour un certain réel ℓ.

3. Montrer que $\ell = 1$.
4. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\quad \forall x \in [1-\delta\,;1+\delta], \quad f'(x) < -1$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = |u_n - u_{n-1}|$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n > n_0$, on ait $d_{n+1} > d_n$. Conclure.

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+2x^2}$ étant définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucun problème de définition pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. De plus f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et l'image de $[0\,;+\infty[$ par f est l'intervalle $]0\,;3]$ si bien que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :
$$u_n = f(u_{n-1}) \in \,]0\,;3].$$
En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
2. Lorsque $u_0 = 1$, on constate que $u_1 = 1$ puis, par une récurrence immédiate :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1.$$
Comme la fonction f est strictement décroissante et que $f(1) = 1$, on voit que, pour $x \neq 1$, $f(x) \neq 1$. Cela permet de démontrer par une récurrence facile que
$$\text{si } u_0 \neq 0 \text{ alors : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq 1.$$
3. Supposons par l'absurde que f converge vers un nombre ℓ. Comme la fonction f est continue, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ passe à la limite et il vient $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire :
$$\frac{3}{1+2\ell^2} = \ell \iff 2\ell^3 + \ell - 3 = 0$$
On constate que 1 est une solution évidente de cette équation. On peut donc factoriser par $(\ell - 1)$. Il vient :
$$2\ell^3 + \ell - 3 = (\ell-1)(2\ell^2 + 2\ell + 3)$$
Le discriminant du trinôme $(2\ell^2 + 2\ell + 3)$ vaut $-2 < 0$ donc il n'y a pas d'autre racine réelle que 1. Par conséquent $\ell = 1$.
4. Pour $x \geqslant 0$, il vient $f'(x) = \dfrac{-12x}{(1+2x^2)^2}$ et donc $f'(1) = \dfrac{-4}{3}\cdot$ Par continuité de la fonction f', il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall t \in [1-\delta\,;1+\delta], \quad f'(t) < -1. \tag{$*$}$$
5. Puisque nous avons supposé que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, il existe un rang n_0 tel que
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - 1| \leqslant \delta \tag{$**$}$$
Par conséquent, pour $n > n_0$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis entre u_{n-1} et u_n et on trouve un réel c compris entre u_{n-1} et u_n tel que : $\quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f'(c)(u_n - u_{n-1})$.
D'après $(**)$ et $(*)$, on trouve donc :
$$\forall n > n_0, \quad d_n = |u_{n+1} - u_n| > |u_n - u_{n-1}| = d_{n-1}.$$
Comme la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et strictement croissante à partir d'un certain rang, elle ne peut pas tendre vers 0. Or si nous avions $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, nous aurions $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Cette contradiction prouve que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas convergente. Comme elle est bornée, elle ne peut pas admettre de limite infinie si bien que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a aucune limite.

Étude complémentaire (non demandée) :

Comme f est décroissante, les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(u_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ sont monotones de sens contraires.
En effet, supposons tout d'abord $u_0 \leqslant u_2$. Alors $u_1 = f(u_0) \geqslant f(u_2) = u_3$ puis $u_2 = f(u_1) \leqslant f(u_3) = u_4$. Par une récurrence immédiate, on en déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{2k} \leqslant u_{2k+2} \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \geqslant u_{2k+3}$$
si bien que $(u_{2k})_{k\geqslant 0}$ est croissante et $(u_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ est décroissante. Le raisonnement est le même avec des inégalités inversées lorsque $u_0 \geqslant u_2$.

Les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(u_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ sont monotones et bornées par 0 et 3 donc elles convergent respectivement vers deux réels ℓ_0 et ℓ_1 qui appartiennent à $[0\,;3]$.
Comme la fonction f est continue, en passant la relation $u_{2k+1} = f(u_{2k})$ à la limite, il vient $\ell_1 = f(\ell_0)$ et en passant la relation $u_{2k+2} = f(u_{2k+1})$ à la limite, il vient $\ell_0 = f(\ell_1)$ et donc ℓ_0 et ℓ_1 sont des points fixes de $f \circ f$. Il sont solutions de l'équation
$$\begin{aligned} f(f(x)) = x &\iff \frac{12x^4 + 12x^2 + 3}{4x^4 + 4x^2 + 19} = x \\ &\iff 4x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = 0 \end{aligned}$$
Comme 1 est point fixe de f, c'est aussi un point fixe de $f \circ f$ si bien que 1 est une racine évidente de l'équation. On peut factoriser :
$$4x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = (x-1)(4x^4 - 8x^3 - 4x^2 - 16x + 3).$$
En s'inspirant de la résolution de $f(x) = x$, on peut essayer de voir si le trinôme $(2x^2 + 2x + 3)$ divise notre polynôme. C'est effectivement le cas et :
$$4x^5 - 12x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 19x - 3 = (x-1)(2x^2 + 2x + 3)(2x^2 - 6x + 1).$$

Le dernier trinôme a deux racines réelles qui sont $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{7}}{2}\cdot$ Finalement, nous avons démontré que les deux suites extraites $(u_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(u_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ convergent vers des limites égales à $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ (la répartition de ces deux limites entre les deux sous-suites dépend de la valeur de u_0).

Exercice 56 : On définit par récurrence la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $b_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sin(b_n)$.

1. Montrer que $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Montrer que $\frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}\cdot$
3. En utilisant le théorème de Cesaro, déterminer un équivalent de b_n.

1. Puisque $1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, la fonction sin est croissante sur $[0\,;1]$ (et à valeurs dans $[0\,;1]$). Par une récurrence facile, on démontre :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$
La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite $\ell \in [0\,;1]$. Comme sin est continue, la relation $b_{n+1} = \sin(b_n)$ passe à la limite et donne $\ell = \sin(\ell)$. Or pour $x > 0$, on a $\sin(x) < x$ et donc $\ell = 0$. La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
2. Puisque $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nous pouvons appliquer le développement limité en 0 de $\sin x$ avec $x = b_n$. Il vient :
$$b_{n+1} = \sin(b_n) = b_n - \frac{b_n^3}{6} + o(b_n^3)$$
En particulier $b_{n+1} \sim b_n$. Ensuite, on calcule :
$$\frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} = \frac{(b_n - b_{n+1})(b_n + b_{n+1})}{b_n^2 b_{n+1}^2} \sim \frac{\frac{b_n^3}{6}(2b_n)}{b_n^4} = \frac{1}{3}$$
et donc $\quad \frac{1}{b_{n+1}^2} - \frac{1}{b_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}\cdot$
3. En appliquant le théorème de Cesaro énoncé à l'exercice précédent avec $u_n = \frac{1}{b_n^2}$ et $\ell = \frac{1}{3}$, on déduit :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{b_{k+1}^2} - \frac{1}{b_k^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{b_n^2} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}\cdot$$
Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on conclut
$$\frac{1}{nb_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad b_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Exercice 57 : Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels strictement positifs et A, B deux réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = A$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = B$. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n$.
Indication : passer au logarithme et faire un développement asymptotique.

Par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(a_n) = \ln(A)$. On en déduit le développement asymptotique
$$\ln(a_n) = \frac{\ln(A)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et donc} \quad a_n = e^{\frac{\ln(A)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{\ln(A)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
On a évidemment un résultat similaire pour $(b_n)_{n\geqslant 0}$ et donc :
$$\frac{a_n + b_n}{2} = 1 + \frac{\ln(A) + \ln(B)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
Dès lors :
$$\begin{aligned}\ln(u_n) = n\ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) &= n\ln\left(1 + \frac{\ln(A) + \ln(B)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\ln(A) + \ln(B)}{2} + o(1)\end{aligned}$$
En repassant à l'exponentielle, on en déduit :
$$\lim_{n\to\infty} u_n = e^{\frac{\ln(A)+\ln(B)}{2}} = \sqrt{AB}$$

Exercice 58 :

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On note x_n cette solution.
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Déterminer un développement asymptotique de x_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Indication : une fois que vous avez trouvé un équivalent u_n de x_n, écrire x_n sous la forme $x_n = u_n + y_n$ puis réinjecter dans l'équation pour obtenir un équivalent de y_n puis recommencer.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $f : x \mapsto \tan x - x$ est dérivable (et donc continue) sur l'intervalle I_n. De plus, pour $x \in I_n$, il vient :
$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$$

ce qui est positive et ne s'annule qu'au point $n\pi$. Cela prouve que f est strictement croissante sur I_n. Enfin

$$\lim_{x\to(n\pi-\frac{\pi}{2})^+}(\tan x - x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to(n\pi+\frac{\pi}{2})^-}(\tan x - x) = +\infty$$

Le théorème de la bijection s'applique et assure que la fonction f s'annule en un unique réel de I_n.

2. Par construction, nous avons l'encadrement

$$n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{et donc} \quad 1 - \frac{1}{2n} < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$$

ce qui prouve que $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, c'est-à-dire $\boxed{x_n \sim n\pi}$

3. Puisque $x_n > n\pi - \frac{\pi}{2}$, il vient $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc $\tan(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. La suite $y_n = x_n - n\pi$ vérifie $\tan(y_n) = \tan(x_n) = x_n$ et $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ si bien que $y_n = \arctan(x_n)$. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, on peut conclure $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}\cdot$ Cela donne le développement asymptotique suivant de x_n :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}$$

Posons maintenant $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\cdot$ Alors :

$$x_n = \tan(x_n) = \tan\left(z_n + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(z_n)}$$

Puisque $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il vient $\tan(z_n) \sim z_n$ et donc :

$$n\pi \sim x_n = \frac{-1}{\tan(z_n)} \sim \frac{-1}{z_n}$$

si bien que $z_n \sim \dfrac{-1}{n\pi}$ ou encore :

$$\boxed{x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exercice 59 : Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs ou nuls. Considérons :

$$(A)\ \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge} \quad ; \quad (B)\ \lim_{n\to\infty} nu_n = 0$$

A-t-on $(A) \implies (B)$? A-t-on $(B) \implies (A)$? Justifiez vos réponses.

Aucune des deux implications n'est vraie.

- Donnons un contre-exemple qui montre que $(B) \not\Rightarrow (A)$. Considérons la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

Cette suite vérifie bien la propriété (B) puisque $nu_n = \dfrac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\cdot$ Pourtant la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge. En effet, la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} [2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t\ln t}\end{array}\right.$ est continue, décroissante et positive. D'après le théorème de comparaison entre séries et intégrales, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si, et seulement si, la suite d'intégrales $I_N = \displaystyle\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ converge. Or

$$I_N = \Big[\ln(\ln t)\Big]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$$

et donc la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est divergente si bien que (A) n'est pas vérifiée.

- Considérons maintenant la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \left|\begin{array}{ll} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré d'entier} \\ 0 & \text{sinon}\end{array}\right.$$

On constate que nu_n ne tend pas vers 0 (elle vaut 1 pour une infinité de valeurs de n) mais, par contre, les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ sont données par :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 1\leqslant k^2\leqslant N}} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2}$$

Il s'agit d'une certaine somme partielle de la série $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^2}\cdot$ Puisque cette série converge, on en déduit que la suite $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. L'exemple de cette suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ prouve que $(A) \not\Rightarrow (B)$.

Exercice 60 : Dans chaque cas, déterminer la nature de la série $\sum u_n$:

$$u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1} \quad ; \quad u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad ; \quad u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

$$u_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4} \quad ; \quad u_n = \frac{\ln n}{3n^4 - 2}$$

$$u_n = \frac{2^n n!}{n^n} \quad ; \quad u_n = \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) \quad ; \quad u_n = \frac{n^2}{3^n}$$

$$\text{(pour } \alpha > 0 \text{ un paramètre)} \quad u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad ; \quad u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$$

1. On a l'équivalent $u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}\cdot$ Il s'agit d'un équivalent entre suites à termes positifs donc le théorème sur les équivalents dans les séries s'applique. Puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

   Pour les cas suivants, le même raisonnement s'applique. Nous n'en écrivons que le schéma. Ne pas oublier de bien mentionner la positivité à chaque application du théorème sur les équivalents dans les séries.
2. $u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n} > 0$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.
3. $u_n = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \sim \frac{1}{2n} > 0$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.
4. $u_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)(n+3)^{\frac{3}{2}}} \sim n^{\frac{4}{3}-1-\frac{3}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} > 0$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.
5. $u_n = \frac{4^n - n}{5^n + 2n^4} \sim \left(\frac{4}{5}\right)^n > 0$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.
6. Ici nous ne donnons pas un équivalent mais juste une comparaison asymptotique :
$$u_n = \frac{\ln n}{3n^4 - 2} = o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
   Puisque $\frac{1}{n^3} > 0$, le théorème de comparaison (version o) s'applique [8] et il permet de conclure que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.
7. Pour $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$, on peut utiliser l'équivalent de Stirling.
$$u_n \sim \frac{2^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

8. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites strictement positives telles que $a_n = o(b_n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ converge. Alors $0 < a_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang et donc le théorème de comparaison pour l'ordre usuel assure que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

Comme $\frac{2}{e} < 1$, on peut introduire un réel k tel que $\frac{2}{e} < k < 1$. Alors :
$$u_n \sim \left(\frac{2}{ke}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, k^n$$

D'après le théorème des croissances comparées, comme $0 < \frac{2}{ke} < 1$, il vient
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{ke}\right)^n \sqrt{2\pi n} = 0$$

et donc $u_n = o(k^n)$. Comme $k^n > 0$, le théorème de comparaison (version o) s'applique et prouve que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

Toutefois, l'équivalent de Stirling est un résultat difficile à démontrer dont l'emploi peut paraître peu excessif. Pour démontrer le résultat sans y avoir recours, on peut préférer utiliser la règle de d'Alembert qui énonce [9] que si une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ et que $\ell < 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. Ici :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{e} < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

8. $u_n = \ln\left(\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2} > 0$: la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
9. $u_n = \frac{n^2}{3^n} = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\frac{1}{2^n} > 0$. Par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
10. Pour $\alpha > 0$, $u_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}} > 0$. D'après le théorème sur les équivalents dans les séries (et le résultat sur les séries de Riemann), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge ssi $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{2}\cdot$
11. Pour tout $\alpha > 0$, u_n présente la forme indéterminée « 1^∞ ». Pour la lever, on passe au logarithme :
$$\ln(u_n) = n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{-n^{\alpha-2}}{2}$$

9. La règle de d'Alembert énonce aussi que si $\ell > 1$, alors la série diverge. En revanche, lorsque $\ell = 1$, la règle de d'Alembert n'énonce rien.

- Si $\alpha > 2$, alors $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Si $\alpha = 2$, alors $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}$ donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1/2}$.
- Si $0 < \alpha < 2$, alors $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Pour $\alpha \leqslant 2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est grossièrement divergente.
Supposons dorénavant $\alpha > 2$. Alors :

$$\ln(n^2 u_n) = 2\ln(n) + u_n = 2\ln(n) - \frac{n^{\alpha-2}}{2} + o\big(n^{\alpha-2}\big) \sim \frac{-n^{\alpha-2}}{2}$$

et donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si bien que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème de comparaison assure que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

B Fonctions usuelles et développements limités

Le calcul asymptotique joue un rôle central dans le programme de deuxième année. Plus largement, une bonne maîtrise des techniques asymptotiques (calculs de limites, développements limités) est indispensable en analyse. Il est donc particulièrement important de mutiplier les occasions de vous entraîner à pratiquer ces calculs. Voici quelques conseils :

- *essayez de prévoir l'ordre des DL dont vous aurez besoin afin d'éviter les calculs inutiles.*
- *ne conservez jamais des termes plus petits qu'un $o(\ldots)$ qui apparaît dans la même somme : ce ne serait pas cohérent.*
- *séparez vos calculs avec des étapes intermédiaires pour éviter les expressions énormes qui amènent presque toujours à des erreurs de calcul.*
- *n'oubliez pas que « 1^∞ » est aussi une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, passez au logarithme.*
- *n'additionnez jamais deux équivalents, ne passez jamais un équivalent à l'exponentielle ou au logarithme. Pour faire cela proprement, il faut revenir à une écriture avec $o(\ldots)$. À ce propos, rappelons que*

  $$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

  Il y a donc bien un $o(\ldots)$ sous-entendu dans un équivalent : c'est l'équivalent lui-même qu'il faut mettre dans le $o(\ldots)$.
- *que faire des constantes numériques ? Dans une somme, on les néglige si elles sont face à une quantité qui tend vers l'infini ; par exemple $2+n \sim n$. Au contraire, elles sont prépondérantes si elles sont à côté d'une quantité qui tend vers 0 ; par exemple $3 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 3$. Dans un produit, on ne doit pas simplifier les constantes numériques ; ainsi $2n \not\sim n$ (le quotient vaut 2 et il ne tend pas vers 1).*
- *les équivalents passent à n'importe quel exposant* ***fixe*** *; si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^2 \sim v_n^2$ et, si les suites sont positives, $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$. En revanche, on ne peut pas élever un équivalent à une puissance non fixe. Par exemple*

  $$\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ et } \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

  mais

  $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

  donc, après passage à l'exposant n, les deux suites ne sont plus équivalentes.

Exercice 61 : Simplifier les expressions $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$.
Indication : n'oubliez surtout pas de mentionner l'intervalle où se situe $\arctan x$.

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ puis cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$. Il n'y a aucun problème de définition et donc $\cos(\arctan x)$ et $\sin(\arctan x)$ sont définis pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Posons $\theta = \arctan x$. Par définition de la fonction arctan, on sait que

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \tan\theta = x.$$

Or $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta$ et donc $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+x^2}$ et donc $\cos\theta = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+x^2}}$. Or $|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cos x > 0$. On peut conclure :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour le sinus, il suffit d'écrire : $\sin\theta = (\cos\theta)(\tan\theta)$ soit

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 62 :

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \in]1\,; +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que

   $$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

   Indication : fixer y et étudier une fonction de la variable x.

2. En appliquant l'inégalité précédente, démontrer par récurrence l'inégalité arithmético-géométrique : pour tous $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

1. Notons tout d'abord que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff q = 1 + \frac{1}{p-1} \iff q = \frac{p}{p-1}$$

Fixons un réel $y \geqslant 0$ et considérons la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par la formule $\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$. Cette fonction est dérivable et, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - y.$$

Comme $p > 1$, la fonction φ' est croissante. De plus φ' s'annule en $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$. Par conséquent, φ est décroissante sur $[0\,; x_0]$ puis croissante sur $[x_0\,; +\infty[$. Elle est donc minimale en x_0. Or :

$$\varphi(x_0) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{1+\frac{1}{p-1}} = y^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Cela prouve que la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et démontre l'inégalité annoncée.

2. On remarque que l'inégalité demandée est triviale si l'un des x_i est nul. On peut donc supposer que les x_i sont strictement positifs. Procédons par récurrence. L'inégalité est évidente pour $n = 1$. Supposons la démontrée à un certain rang $n - 1$. Alors

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = xy \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = x_n^{1/n} \\ y = (x_1 \cdots x_{n-1})^{1/n} \end{cases}$$

Choisissons $p = n$ et $q = \frac{n}{n-1}$ si bien que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$. L'inégalité précédente donne :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = xy \leqslant \frac{x^n}{n} + \frac{(n-1)y^{n/(n-1)}}{n} = \frac{x_n}{n} + \frac{n-1}{n}(x_1 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$$

Par hypothèse de récurrence, il vient :

$$(x_1 \cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

ce qui permet de conclure :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Exercice 63 : Déterminer un équivalent de $\arccos(1-x)$ lorsque x tend vers 0.

La fonction arccos étant définie sur $[-1\,;1]$, la quantité $\arccos(1-x)$ est définie pour $x \in [0\,;2]$. On cherche donc un équivalent de $\arccos(1-x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Posons alors $\theta = \arccos(1-x)$. D'après le cours sur arccos, nous savons que :

$$\cos\theta = 1 - x \quad \text{et} \quad \theta \in [0\,;\pi]$$

Par ailleurs, la fonction arccos est continue donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \theta = \arccos(1) = 0$. Nous pouvons donc utiliser le développememnt de $\cos\theta$ valable lorsque θ tend vers 0 :

$$1 - x = \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2) \quad \text{et donc} \quad x = \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

ce qui signifie que

$$x \sim \frac{\theta^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad 2x \sim \theta^2$$

On peut passer les équivalents à la racine (en utilisant le fait que x et θ sont positifs) et on obtient ainsi :

$$\arccos(1-x) = \theta \sim \sqrt{2x}$$

Exercice 64 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\quad \forall x \neq 0,\ f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

En tout réel $x \neq 0$, la fonction f est dérivable et

$$f'(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par conséquent, pour $x \neq 0$ fixé, il vient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Lorsque x tend vers 0, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée donc $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. En revanche, $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 (puisque cos n'a pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$). Il s'ensuit que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 et donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \quad \text{n'existe pas}$$

La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, comme $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si bien que, pour $h \neq 0$ fixé,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} = h\sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Comme nous l'avions remarqué plus haut, $\lim\limits_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ et donc :

$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = 0.$$

Remarque : De cet exercice, nous retiendrons qu'il n'est pas possible d'intervertir deux symboles de limites sans précaution.

Exercice 65 : Donner les développements limités en 0 des fonctions suivantes :

1. ordre quelconque : $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$; $\sqrt{1-2x}$.
2. ordre 3 : $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+\frac{x}{2}}$; $\sqrt{1+e^x}$; $\dfrac{1}{\arcsin x} - \dfrac{1}{x}$.
3. ordre 4 : $\dfrac{x}{\cos x}$; $e^x\ln(1+2x)$

Indication : pour $\sqrt{1-2x}$, écrire le résultat avec des factorielles.

1. (a) Le premier terme de la somme donnant le développement limité de $\cos x$ est 1 donc il se simplifie avec le -1 qui suit, si bien que :

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - 1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-2} + o(x^{2n-2})\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j+2)!}x^{2j} + o(x^{2n-2}).\end{aligned}$$

   (b) On utilise le développement limité de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $u = -2x$.

Il vient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-2x)^k + o(x^n)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1\times(-1)(-3)\dots(3-2k)}{k!}(-1)^k x^k + o(x^n)\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1\times 3\times\dots\times(2k-3)}{k!}x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

On peut écrire cela de façon plus compacte avec des factorielles. Pour cela, on fait apparaître le produit des termes pairs en haut et en bas, ainsi que le terme impair manquant : $(2k-1)$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x} &= 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1\times 2\times 3\times\dots\times(2k)}{2\times 4\times\dots\times(2k)}\times\frac{x^k}{(2k-1)k!} + o(x^n)\\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2(2k-1)}x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

2. (a) Comme le développement limité de $\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}}$ est multiplié par x, il suffit de le pousser à l'ordre 2. En posant $u = \dfrac{-x}{2}$, et en utilisant la formule $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$, il vient :

$$\frac{x}{1+\frac{x}{2}} = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

   Puisque $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, il vient :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+\frac{x}{2}} = \frac{x^3}{12} + o(x^3).$$

   (b) Tout d'abord :

$$1 + e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

   Afin de pouvoir utiliser le développement limité de $(1+u)^{\frac{1}{2}}$ **avec** u **qui**

tend vers 0, il faut mettre 2 en facteur :

$$\sqrt{1+e^x} = \sqrt{2}\Big(1+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}_{=u}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{2}\left(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}+o(u^3)\right)$$

$$\text{Or}\quad u=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\quad;\quad u^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}+o(x^3)$$
$$u^3=\frac{x^3}{8}+o(x^3)\quad;\quad o(u^3)=o(x^3)$$

En injectant dans la formule précédente, il vient :

$$\sqrt{1+e^x} = \sqrt{2}\left[1+\left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}\right)-\left(\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{32}\right)+\frac{x^3}{128}+o(x^3)\right]$$
$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2+\frac{7\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3)$$

(c) A priori, l'expression $\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0. Toutefois, les $\frac{1}{x}$ se simplifient comme le montre le développement suivant :

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

et donc :

$$\frac{1}{\arcsin x}=\frac{1}{x+\frac{x^3}{6}+o(x^6)}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^6)\right)=\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+o(x).$$

On voit qu'apparaît un terme en $\frac{1}{x}$ qui se simplifiera avec le $\frac{-1}{x}$ qui suit si bien que la fonction $x\mapsto\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}$ se prolonge par continuité en $x=0$ (avec la valeur 0). Par ailleurs, on voit qu'en étant parti d'un développement limité de $\arcsin x$ à l'ordre 3, nous avons obtenu un développement limité de l'inverse à l'ordre 1. Deux degrés ont été perdus (un premier en factorisant par x au numérateur pour faire apparaître une quantité de la forme $\frac{1}{1-u}$ et un deuxième en divisant par x à la fin du calcul). Par conséquent, pour obtenir le développement désiré, nous partons d'un développement limité de $\arcsin x$ à la précision $o(x^5)$.

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)\quad\text{et donc}$$

$$\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\underbrace{\frac{x^2}{6}+\frac{3x^4}{40}+o(x^4)}_{=-u}}-1\right)$$

On pose $u=-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+o(x^4)$ et il vient :

$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4)\quad;\quad o(u^2)=o(x^4)$$

En injectant dans le calcul précédent, on trouve :

$$\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(1+u+u^2+o(u^2)-1)$$
$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{6}-\frac{3x^4}{40}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right)$$
$$=-\frac{x}{6}-\frac{17}{360}x^3+o(x^3)$$

3. (a) Le développement limité de $\frac{1}{\cos x}$ étant multiplié par x, il suffit de mener ce développement à l'ordre 3. On écrit :

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

et donc :

$$\frac{x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{2}+o(x^4).$$

(b) Le développement limité de e^x est multiplié par celui de $\ln(1+2x)$, qui commence avec le terme $2x$. Par conséquent, on gagne un degré de précision et il suffit d'écrire le développement limité de e^x à l'ordre 3. On écrit :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\quad\text{et}$$
$$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+o(x^4)$$
$$=2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}-4x^4+o(x^4)\quad\text{d'où}$$

$$e^x \ln(1+2x) = \left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\left[2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}-4x^4+o(x^4)\right]$$

On constate effectivement que la précision obtenue est $o(x^4)$. En développant, on trouve :

$$e^x \ln(1+2x) = 2x + \frac{5}{3}x^3 - 2x^4 + o(x^4).$$

Exercice 66 : Étudier les limites en 0 des expressions suivantes :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)} \quad ; \quad \frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x}$$

$$\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln\cos x} \quad ; \quad \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

Indication : des développements limités permettent d'obtenir un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.

1. Pour la première, on cherche un équivalent en 0 du numérateur et du dénominateur. Un développement limité à l'ordre 3 donne :

$$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

Par ailleurs, $\sin x \sim x$ et un développement limité à l'ordre 2 donne :

$$\cos(2x) - \cos(x) \sim \frac{-3x^2}{2}$$

Finalement, nous trouvons :

$$\frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos(2x) - \cos x)} \sim \frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{-3x^3}{2}} = -\frac{1}{3} \quad \text{et}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos(2x) - \cos x)} = -\frac{1}{3}.$$

2. Là encore, des développements limités à l'ordre 3 du numérateur et du dénominateur donnent :

$$\frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x} \sim \frac{28x^3}{-14x^3} = -2$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x - 4\tan 3x}{3\sin 4x - 4\sin 3x} = -2$$

3. $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^2)$

Par conséquent :

$$\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln\cos x} = \frac{2\ln(\cos x) + \sin^2 x}{\sin^2 x\ \ln(\cos x)} \sim \frac{\frac{-x^4}{2}}{x^2\left(\frac{-x^2}{2}\right)} = 1$$

et donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln\cos x} = 1$$

4. Le x^3 du dénominateur suggère un développement limité à l'ordre 3 du numérateur. Cela donne :

$$x(e^x+1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad 2(e^x-1) = 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

d'où on déduit :

$$x(e^x+1) - 2(e^x-1) \sim \frac{x^3}{6} \quad \text{et donc} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 67 : Étudier les limites suivantes :

$$\text{En } 1 : \quad \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} \quad ; \quad \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

$$\text{En } +\infty : \quad \frac{\sin\left(\frac{x+1}{x}\right) - \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad \frac{(x+\ln x)^x}{x^{x+1}}$$

Indication : on peut faire un changement de variable pour se ramener à un développement limité en 0.

1. On remplace x qui tend vers 1 par $x = 1+h$ avec h qui tend vers 0. Il vient :

$$\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \frac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}}$$

Un développement limité d'ordre 2 donne :

$$\frac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}} = \frac{\frac{-h^2}{2}+o(h^2)}{\frac{h^2}{2}+o(h^2)} = -1 + o(1)$$

si bien que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}} = -1.$$

2. Posons $h = x - 1$ (avec h qui tend vers 0). Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)} &= 1 + \frac{1}{h} - \frac{1}{h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)} \\ &= 1 + \frac{1}{h}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + o(h)}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{h}\left[1 - \left(1 + \frac{h}{2} + o(h)\right)\right] = \frac{1}{2} + o(1)\end{aligned}$$

et donc $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} + \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{2}\cdot$

3. On fait apparaître $\frac{1}{x}$ avant de poser $h = \frac{1}{x}$ (et h tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$). Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\frac{x+1}{x}\right) - \sin\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}} &= \frac{\sin\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]} \\ &= \frac{2\cos(1)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x\left[1+\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]} \\ &= \frac{4\cos(1)\sin(h)}{h + o(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 4\cos(1)\end{aligned}$$

4. Nous pouvons écrire :

$$\frac{(x+\ln x)^x}{x^{x+1}} = \frac{1}{x}\left(\frac{x+\ln x}{x}\right)^x = \frac{1}{x}\exp\left[x\ln\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)\right]$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 et donc :

$$\ln\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2x^2} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x^2}\right)$$

Il s'ensuit que :

$$x\ln\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)x = \ln x + o(1)$$

Par conséquent :

$$\frac{(x+\ln x)^x}{x^{x+1}} = \frac{1}{x}e^{\ln x + o(1)} = \frac{1}{x}xe^{o(1)} = e^{o(1)}$$

Or l'exponentielle d'une quantité tendant vers 0 est une quantité qui tend vers 1 et donc finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\ln x)^x}{x^{x+1}} = 1.$$

Exercice 68 :

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+x+x^3)$ définit une bijection d'un intervalle ouvert I contenant 0 vers un intervalle ouvert J contenant 0. On note $g : J \to I$ la réciproque de cette bijection.
2. Donner un développemement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Indication : montrer que $g(y)$ possède un DL (avec des coefficients inconnus). Injecter le DL de $f(x)$ dans celui de $g(y)$ pour obtenir un système sur ces coefficients.

1. La fonction $h : x \mapsto 1+x+x^3$ est polynomiale (donc continue) et strictement croissante. Comme elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, nous savons que h s'annule en un unique réel α, et que h est strictement positive sur $I =]\alpha\,;+\infty[$ donc f est définie sur I. Comme $h(0) = 1$, on sait que $\alpha < 0$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous voyons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par ailleurs $f' : x \mapsto \frac{1+3x^2}{1+x+x^3}$ est une fonction strictement positive sur I. Le théorème de la bijection s'applique donc f est bijective de I vers $J = \left]\lim_{x\to\alpha} f(x)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$.
2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J car c'est la réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée de s'annule pas. Par conséquent, g a des DL à tout ordre. Écrivons

$$g(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + o(y^3).$$

Comme $g(0) = 0$, on sait que $a = 0$. Comme $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$, on sait que $b = 1$. Reste à trouver c et d.

$$x = g(f(x)) = f(x) + cf(x)^2 + df(x)^3 + o(x^3).$$

Or un $DL_3(0)$ de $f(x)$ est

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).$$

En injectant, il vient :

$$x = x + \left(c - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(d - c + \frac{4}{3}\right)x^3 + o(x^3).$$

Par unicité du DL, on obtient $c = \dfrac{1}{2}$ et $d = c - \dfrac{4}{3} = \dfrac{-5}{6}\cdot$ Finalement, lorsque y tend vers 0 :

$$g(y) = y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{5}{6}y^3 + o(y^3)$$

C Continuité, dérivabilité, convexité

Voici le domaine des « grands théorèmes de l'analyse » comme le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis. Je vous signale un certain nombre de résultats dont les énoncés sont souvent mal restitués par les étudiants. Reprenez votre cours de MPSI pour les apprendre avec précision :

- *le théorème des valeurs intermédiaires, qui est un théorème d'existence. Ce n'est pas un résultat d'unicité.*
- *existence de limites à droite/à gauche pour une fonction monotone.*
- *le théorème de la limite de la dérivée, qui sert à prouver la dérivabilité de f en un point exceptionnel.*
- *la formule de Taylor avec reste intégral.*

À propos des accroissements finis, gardez en tête l'interprétation cinématique ($f(t)$ = position tandis que $f'(t)$ = vitesse) car elle fournit une bonne intuition des résultats. Par exemple, une majoration de $|f'|$ permet de majorer $|f|$ (si la vitesse reste toujours petite, on ne peut pas aller très loin) ; en revanche, une majoration de $|f|$ ne dit rien sur $|f'|$ (un photon coincé entre deux miroirs va très vite mais il ne va pas très loin).

Exercice 69 : Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction continue.

1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Si f est décroissante, montrer que f possède un unique point fixe.

1. Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ puisque f est continue. De plu $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque f est à valeurs dans $[0\,;1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $x_0 \in [0\,;1]$ tel que $g(x_0) = 0$. On a alors $f(x_0) = x_0$: x_0 est un point fixe de f.
2. D'après la question précédente, f possède au moins un point fixe. Par ailleurs, f est décroissante et $x \mapsto -x$ est strictement décroissante donc leur somme g est strictement décroissante. En particulier, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois si bien que le point fixe de f est unique.

Exercice 70 : **Vrai ou faux ?**

1. La somme de deux fonctions impaires est impaire.
2. La composée de deux fonctions impaires est impaire.
3. La composée de deux fonctions monotones est monotone.
4. Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
5. Toute fonction périodique monotone est constante.
6. Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
7. Toute fonction monotone sur $\mathbb{R}$ admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.
8. Toute fonction admettant en un point des limites égales à droite et à gauche est continue en ce point.
9. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $f(a)$, alors f est continue en a.
10. L'image d'un intervalle ouvert par une application continue est un intervalle ouvert.
11. Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
12. La fonction partie entière est continue sur $[0\,;1[$.

1. `VRAI`. Prenons f et g deux fonctions impaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient :
$$[f+g](-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f+g](x)$$
et donc $f+g$ est impaire.
2. `VRAI`. Avec les notations précédentes :
$$[f \circ g](-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -[f \circ g](x)$$
donc $f \circ g$ est impaire.
3. `VRAI`. La composée $f \circ g$ de deux fonctions monotones est monotone et son sens de variation est donné par le tableau suivant :

	f est croissante	f est décroissante
g est croissante	$f \circ g$ est croissante	$f \circ g$ est décroissante
g est décroissante	$f \circ g$ est décroissante	$f \circ g$ est croissante

Il y a quatre preuves à écrire. Écrivons par exemple la démonstration du cas où f et g sont toutes les deux décroissantes. Pour tous réels $x < y$, il vient : $g(x) \geqslant g(y)$ puisque g est décroissante. Puis, d'après la décroissance de f : $f(g(x)) \leqslant f(g(y))$. Cela prouve que $f \circ g$ est croissante.

4. `FAUX`. Prenons la fonction $f : x \mapsto x + 2\sin x$. Pour tout réel x, il vient $f(x) \geqslant x - 2$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Toutefois, la dérivée de f est donnée par : $f' : x \mapsto 1 + 2\cos x$ et il n'existe aucune demi-droite $[A\,;+\infty[$ sur laquelle f' reste positive. Par conséquent, f n'est croissante sur aucun voisinage de $+\infty$.

5. `VRAI`. Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et T-périodique. Pour tout $x \in [0\,;T]$, il vient $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(T)$. Mais comme f est T-périodique, $f(0) = f(T)$ et donc, pour tout $x \in [0\,;T]$, $f(x) = f(0)$. Par conséquent, f est constante sur $[0\,;T]$. Comme f est T-périodique, f est constante sur $\mathbb{R}$. Un raisonnement similaire est valable lorsque f est périodique et décroissante.
6. `FAUX`. Prenons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Q},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0.$$

   Pour n'importe quel nombre rationnel $q > 0$ et pour tout réel x, il vient $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+q) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est q-périodique pour tout rationnel $q > 0$. Il n'y a donc pas de plus petite périodique strictement positive.

   Plus simplement, on peut aussi penser aux fonctions constantes, qui sont T-périodiques pour n'importe quel $T > 0$ mais l'exemple précédent montre que les fonctions constantes ne sont pas le seul contre-exemple possible.
7. `VRAI`. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et $x \in \mathbb{R}$. Prenons des réels a et b tels que $a < x < b$. D'après le théorème du cours sur les limites de fonctions monotones, la fonction f possède une limite à droite (finie) en chaque élément de $[a\,;b[$ (et donc en particulier en x) et une limite à gauche (finie) en chaque élément de $]a\,;b]$ (et donc en particulier en x). Pour une fonction décroissante, on applique ce raisonnement avec la fonction $-f$, qui est croissante.
8. `FAUX`. Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 2.$$

   Cette fonction vérifie

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \quad \text{mais} \quad 2 \neq f(0)$$

   donc f est discontinue en 0, bien qu'elle y ait une limite à droite et à gauche qui sont finies et égales entre elles.
9. `FAUX`. Prenons n'importe quelle fonction f (continue ou discontinue) et n'importe quel réel a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = a$. Alors

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$$

   et pourtant f n'est pas forcément continue en a.
10. `FAUX`. $\cos\big(]-\infty\,;+\infty[\big) = [-1\,;1]$.
11. `FAUX`. Prenons l'intervalle $I =]0\,;1]$ et la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$

    L'intervalle I est borné et la fonction f est continue sur I. Pourtant $f(I) = [1\,;+\infty[$ n'est pas borné.
12. La réponse est `VRAI` ou `FAUX` selon la façon dont on explicite la phrase. Que signifie « être continue sur $[0\,;1[$ » ? Il y a deux façons de le comprendre :
    (a) On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est on se demande si c'est une fonction continue sur son ensemble de définition. La réponse est alors `VRAI`. En effet, la fonction f est la fonction nulle.
    (b) On considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ et on se demande si chacun des points de $[0\,;1[$ est un point de continuité de g. La réponse est alors `FAUX`. En effet, la fonction g n'est pas continue en 0 (elle est discontinue à gauche en 0).

    Les deux façons de comprendre la phrase écrite sont légitimes. Dans la pratique, on préfèrera comprendre la phrase écrite en lui donnant le sens du (a) et pour exprimer (b), on dira plutôt « la fonction g est continue en chacun des points de $[0\,;1[$ » (ce qui est faux en l'occurrence).

Exercice 71 : Soit $k > 0$ un réel et $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne sur l'intervalle $[0\,;1]$. Dans chaque cas, donnez la meilleure majoration possible de $M = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ en tenant compte de la contrainte imposée :

1) lorsque $f(0) = 0$
2) lorsque $f(1) = 0$
3) lorsque $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
4) lorsque $f(0) = f(1) = 0$.

Indication : faites un dessin. Par exemple pour la première condition, on sait que $f(0) = 0$, ce qui donne un point de la courbe de f et on sait par ailleurs que f est k-lipschitzienne. Cela permet d'encadrer le graphe de f entre deux droites.

Rappelons qu'une fonction $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne si, et seulement si,

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|\,. \tag{L}$$

1. Comme $f(0) = 0$, en appliquant (L) avec $y = 0$, il vient :

$$\forall x \in [0\,;1], \quad |f(x)| \leqslant kx \leqslant k$$

   et donc $M \leqslant k$. On ne peut pas améliorer cette inégalité car l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & kx \end{array} \right.$ est k-lipschitzienne et vérifie $M = k$.
2. Comme $f(1) = 0$, en appliquant (L) avec $y = 1$, il vient :

$$\forall x \in [0\,;1], \quad |f(x)| \leqslant k\,|x-1| = k(1-x) \leqslant k$$

   et donc $M \leqslant k$. On ne peut pas améliorer cette inégalité car l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(1-x) \end{array} \right.$ est k-lipschitzienne et vérifie $M = k$.

3. Comme $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, en appliquant (L) avec $y = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\forall x \in [0\,;1], \quad |f(x)| \leqslant k\left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{k}{2}$$

et donc $M \leqslant \frac{k}{2}\cdot$ On ne peut pas améliorer cette inégalité car l'application $f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$ est k-lipschitzienne et vérifie $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $M = \frac{k}{2}\cdot$

4. Comme $f(0) = f(1) = 0$, il est intéressant d'appliquer l'inégalité (L) avec $y = 0$ et avec $y = 1$. Il vient :

$$\forall x \in [0\,;1], \quad \begin{cases} |f(x)| \leqslant kx \\ |f(x)| \leqslant k(1-x) \end{cases}$$

Lorsque $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, la première inégalité donne $|f(x)| \leqslant \frac{k}{2}$ et, lorsque $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, la seconde inégalité donne $|f(x)| \leqslant \frac{k}{2}\cdot$ Cela prouve $M \leqslant \frac{k}{2}\cdot$
Là encore l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \frac{k}{2} - k\left|x - \frac{1}{2}\right|$, qui est k-lipschitzienne et vérifie $f(0) = f(1) = 0$ et $M = \frac{k}{2}$, montre qu'on ne peut pas améliorer cette inégalité.

Exercice 72 : Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction f' est continue sur $[a\,;b]$. D'après le théorème des bornes, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in [a\,;b], \quad |f'(x)| \leqslant C$$

Pour tout $x < y$ dans $[a\,;b]$, le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $z \in \,]x\,;y[$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$. Mais alors

$$|f(y) - f(x)| = |f'(z)| \cdot |y - x| \quad \text{et donc} \quad |f(y) - f(x)| \leqslant C\,|y - x|$$

ce qui montre que f est C-lipschitzienne sur $[a\,;b]$.

Exercice 73 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue et surjective. On suppose que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $f^{-1}\big(\{y\}\big)$ est borné.

1. Soit $A > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $B \geqslant 0$ tel que $\forall x > B,\ f(x) \neq A$.
2. Montrer que $f\big(]B\,;+\infty[\big) \subset \,]A\,;+\infty[$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et surjective qui ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. Justifier que cet exemple convient.

1. L'ensemble $f^{-1}(\{A\})$ est borné donc il existe $B \geqslant 0$ tel que $f^{-1}(\{A\}) \subset [0\,;B]$. Par conséquent, pour $x > B$, il vient $f(x) \neq A$.
2. Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $I = f\big(]B\,;+\infty[\big)$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$. Or cet intervalle ne contient pas A donc il est inclus dans $]A\,;+\infty[$ ou dans $[0\,;A[$. Supposons par l'absurde que $f\big(]B\,;+\infty[\big) \subset [0\,;A[$. D'après le théorème des bornes, $f\big([0\,;B]\big)$ est borné. Mais alors on voit que $f(\mathbb{R}_+) = f\big([0\,;B]\big) \cup f\big(]B\,;+\infty[\big)$ est borné. C'est absurde puisque f est surjective. Cette contradiction prouve que $f\big(]B\,;+\infty[\big) \subset \,]A\,;+\infty[$.
3. Nous avons prouvé : $\forall A > 0,\ \exists B \geqslant 0,\ f\big(]B\,;+\infty[\big) \subset \,]A\,;+\infty[$, ce qui se réécrit :
$$\forall A > 0, \quad \exists B \geqslant 0, \quad \forall x > B, \quad f(x) > A$$
c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto x(1+\cos x)$. Il est clair que f est continue et à valeurs positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient $f(2n\pi+\pi) = 0$. Puisque $2n\pi + \pi \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ceci prouve que $f(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$. Par ailleurs $f(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n\pi) = 4n\pi$. Puisque f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et $4n\pi$. Puisque n est quelconque, cela prouve que f prend toutes les valeurs positives ou nulles, ou encore que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

Exercice 74 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

En recherchant un minimum de f sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction f' s'annule.
Indication : le théorème des bornes offre l'existence d'un minimum mais il ne fonctionne que sur un ***segment****. Il faut donc utiliser les hypothèses pour se ramener à un segment.*

En appliquant la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ avec la hauteur $f(0)$, il existe un réel $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, on ait $f(x) \geqslant f(0)$. En raisonnant de même en $-\infty$, il existe un réel $A < 0$ tel que, pour $x < A$, on ait $f(x) \geqslant f(0)$.

La fonction est continue sur le segment $[A\,;B]$ donc, d'après le théorème des bornes, il existe $a \in [A\,;B]$ tel que

$$f(a) = \min_{x\in[A;B]} f(x).$$

Pour $x \in \mathbb{R}\setminus[A\,;B]$, il vient $f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(a)$. Finalement :

$$f(a) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x).$$

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un minimum en a, on sait alors que $f'(a) = 0$.

Remarque : Nous avons prouvé qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 75 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Quand cela est défini, on note $m_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+t$ puis entre x et $x-t$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{m_0}{t} + \frac{m_2\,t}{2}\cdot$$

2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $m_1 \leqslant \sqrt{2\,m_0\,m_2}$.

1. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x+t$ donne :

$$|f(x+t) - f(x) - f'(x)t| \leqslant \frac{m_2\,|t|^2}{2}\cdot$$

De même, entre x et $x-t$, on obtient :

$$|f(x-t) - f(x) + f'(x)t| \leqslant \frac{m_2\,|t|^2}{2}\cdot$$

Il en résulte, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|2f'(x)t| &= \Big|[f'(x)t + f(x) - f(x+t)] + [f'(x)t - f(x) + f(x-t)] \\ &\qquad + [f(x+t) - f(x-t)]\Big| \\ &\leqslant |f(x+t) - f(x) - f'(x)t| + |f(x-t) - f(x) + f'(x)t| \\ &\qquad + |f(x+t)| + |f(x-t)| \\ &\leqslant m_2t^2 + 2m_0\end{aligned}$$

L'inégalité voulue s'obtient en divisant par $2t$, qui est strictement positif.

2. Pour un x donné, l'inégalité précédente est valable pour tout $t > 0$. Or la fonction $g : t \mapsto \dfrac{m_0}{t} + \dfrac{m_2 t}{2}$ a pour dérivée $g'(t) = \dfrac{-m_0}{t^2} + \dfrac{m_2}{2}$.
Lorsque $m_2 = 0$, on obtient $g' < 0$ et donc g est décroissante. En faisant tendre t vers $+\infty$, il vient $|f'(x)| \leqslant 0$, ce qui correspond bien à $m_1 = 0$.
Lorsque $m_0 = 0$, la fonction f est la fonction nulle donc f' aussi et l'inégalité à prouver est évidente.
Supposons $m_0 > 0$ et $m_2 > 0$. Alors g' est croissante, et g' s'annule en $t_0 = \sqrt{\dfrac{2m_0}{m_2}}$ donc g est décroissante sur $]0\,;t-0]$ puis croissante sur $[t_0\,;+\infty[$ donc g est minimale en t_0. Or $g(t_0) = \sqrt{2m_0m_2}$ et donc $|f'(x)| \leqslant g(t_0) = \sqrt{2m_0m_2}$. Cette inégalité étant valable pour tout réel x, on a bien prouvé que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $m_1 \leqslant \sqrt{2m_0m_2}$.

Exercice 76 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.
2. Dans cette série de questions, on suppose que $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ et on veut montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
   (a) Fixons $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall x \in [n_0\,;n_0+1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x+n) - f(x)| \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$
   (b) Trouver une constante M telle que pour tout réel $y \geqslant n_0$, on ait
   $$|f(y)| \leqslant M + (y - n_0)\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$
   (c) Conclure.
3. Étudier les réciproques des implications démontrées ci-dessus.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x\,;x+1]$. Il existe un réel c_x tel que

$$x < c_x < x+1 \quad \text{et} \quad f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x)$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, l'inégalité $x < c_x$ prouve que c_x tend vers $+\infty$ et donc, $\lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

2. (a) Fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et appliquons la définition de la limite $\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ avec la précision $\frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Il existe un réel $A > 0$

tel que
$$\forall x \geqslant A, \quad |f(x+1)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
Prenons maintenant un entier $n_0 \geqslant A$. Pour n'importe quel réel $x \in [n_0\,;n_0+1]$ et n'importe quel entier naturel n, il vient :
$$\begin{aligned}\big|f(x+n)-f(x)\big| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k+1)-f(x+k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \big|f(x+k+1)-f(x+k)\big|\end{aligned}$$
Cette somme contient n termes et tous les réels $x, x+1, x+2, \ldots$ sont supérieurs à A donc chaque terme $\big|f(x+k+1)-f(x+k)\big|$ est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$ si bien que :
$$\big|f(x+n)-f(x)\big| \leqslant n\frac{\varepsilon}{2}$$
Cela prouve bien la ligne de quantificateurs demandée.

(b) Comme la fonction $|f|$ est continue sur le segment $[n_0\,;n_0+1]$, le théorème des bornes assure que $|f|$ possède un maximum sur ce segment, ce qui permet de définir le nombre
$$M = \max_{[n_0;n_0+1]} |f|\,.$$
Pour $y \geqslant n_0$, notons n le plus grand entier naturel tel que $y-n \geqslant n_0$. Comme $y-n-1 < n_0$, il vient $y-n < n_0+1$ si bien que le nombre x défini par $x = y-n$ appartient à $[n_0\,;n_0+1]$. D'après la question (2a), on peut écrire :
$$|f(y)-f(x)| = |f(x+n)-f(x)| \leqslant n\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et donc} \quad |f(y)| \leqslant |f(x)|+n\frac{\varepsilon}{2}$$
Comme $x \in [n_0\,;n_0+1]$, il vient $|f(x)| \leqslant M$. Par ailleurs, l'entier n vérifie $n = y-x \leqslant y-n_0$ et donc :
$$|f(y)| \leqslant M + (y-n_0)\frac{\varepsilon}{2}$$

(c) Fixons une précision $\varepsilon > 0$. Introduisons n_0 et M comme défini ci-dessus. Pour $y > n_0$, il vient :
$$\left|\frac{f(y)}{y}\right| \leqslant \frac{M}{y} + \left(1-\frac{n_0}{y}\right)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{M}{y}+\frac{\varepsilon}{2}$$
Posons maintenant $C = \max\left(n_0, \frac{2M}{\varepsilon}\right)$. Pour tout $y > n_0$, il vient :
$$\left|\frac{f(y)}{y}\right| \leqslant \frac{M}{y}+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{M}{\frac{2M}{\varepsilon}}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous avons prouvé la ligne de quantificateurs suivante :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C > 0, \quad \forall y > C, \quad \left|\frac{f(y)}{y}\right| \leqslant \varepsilon$$
ce qui prouve bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

3. Les deux réciproques sont fausses, comme le montrent les deux contre-exemples suivants :

- La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ vérifie bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ mais
$$f(x+1)-f(x) = \sin(\pi x+\pi)-\sin(\pi x) = -2\sin(\pi x)$$
Cette fonction ne possède pas de limite en $+\infty$.
- La fonction $f : x \mapsto \sin(2\pi x)$ vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1)-f(x) = \sin(2\pi x+2\pi)-\sin(2\pi x) = 0$$
En revanche, $f'(x) = 2\pi\cos(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 77 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 > 0$ pour que l'application f définie par
$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[, \quad f(x) = \left|\begin{array}{ll} a\sqrt{x} & \text{si } x \in \,]0\,;x_0[\\ x^2+12 & \text{si } x \in [x_0\,;+\infty[\end{array}\right.$$
soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Recherchons d'abord des conditions nécessaires en supposant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
Comme f est supposée continue en x_0, il vient :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = a\sqrt{x_0} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = x_0^2+12$$
Pour $x < x_0$, il vient clairement $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$ et, pour $x > x_0$, $f'(x) = 2x$ si bien que :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f'(x) = 2x_0$$
Les deux nombres x_0 et a vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{r} a\sqrt{x_0} = x_0^2+12 \\ \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x_0^2 = x_0^2+12 \\ a = 4x_0\sqrt{x_0} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_0^2 = 4 \\ a = 4x_0\sqrt{x_0} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x_0 = 2 \\ a = 8\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Réciproquement, supposons $a = 2$ et $x_0 = 8\sqrt{2}$. Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;x_0[\cup]x_0\,;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = 16 = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) \quad \text{donc } f \text{ est continue en } x_0$$

De plus,

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f'(x) = 4 = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f'(x).$$

Cela prouve que la fonction f' a une limite finie en x_0. D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = 4$. Comme cette valeur est la limite à droite et à gauche de f' en x_0, on voit que f' est continue en x_0. Finalement, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

En résumé, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $x_0 = 2$ et $a = 8\sqrt{2}$.

Remarque : le théorème de prolongement de la dérivée est un théorème subtil très souvent mal employé. Il convient de soigner particulièrement sa rédaction quand on veut l'utiliser.

Exercice 78 $(\star)$: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la propriété :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall y \in [x\,;x+\delta], \quad f(y) \geqslant f(x) \tag{C}$$

Montrer que f est croissante. Donner un exemple de fonction non-croissante vérifiant la propriété (C).

Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie la propriété (C). Fixons un réel $a \in \mathbb{R}$. On veut démontrer que, pour tout réel $x \geqslant a$, il vient $f(x) \geqslant f(a)$. Pour cela, on considère l'ensemble suivant :

$$A = \left\{ x > a \;\middle|\; \forall y \in [a\,;x] \;\; f(y) \geqslant f(a) \right\}$$

On veut prouver que $A =]a\,;+\infty[$.
Tout d'abord l'ensemble A est non vide : en appliquant la propriété (C) en a, on obtient un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in [a\,;a+\delta], \quad f(y) \geqslant f(a)$$

et donc $a + \delta \in A$.
Par définition de l'ensemble A, il est clair que si $a < x' \leqslant x$ et que $x \in A$, alors $x' \in A$. Par conséquent, A est un intervalle de la forme $A =]a\,;b]$ bien ou $A =]a\,;b[$ (pour un certain réel $b > a$) ou bien $A =]a\,;+\infty[$. Nous souhaitons prouver que c'est la troisième éventualité qui a lieu et nous raisonnons par l'absurde en supposant $A =]a\,;b[$ ou $A =]a\,;b]$ pour un certain réel $b > a$.

Pour $x \in]a\,;b[$, il existe $z \in A$ tel que $x \leqslant z$. Par définition de A, on en déduit $f(x) \geqslant f(a)$. Comme f est continue en b, on obtient également :

$$f(b) = \lim_{x \overset{<}{\to} b} f(x) \geqslant f(a)$$

et donc $b \in A$ si bien que $A =]a\,;b]$.
Appliquons alors la propriété (C) en b. Il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in [b\,;b+\delta], \quad f(x) \geqslant f(b) \geqslant f(a)$$

et cela montre que $b+\delta \in A$. Comme $A = [a\,;b]$, c'est absurde. Cette contradiction prouve que $A =]a\,;+\infty[$ et donc f est croissante.

Considérons maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x < 0, \quad f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \geqslant 0, \quad f(x) = 0$$

Cette fonction f n'est pas continue. Elle n'est pas croissante. Pourtant elle vérifie la propriété (C). En effet, pour $x \geqslant 0$, on peut prendre n'importe quel $\delta > 0$ et, pour $x < 0$, il suffit de prendre $\delta = \frac{|x|}{2}$.

Exercice 79 : Soit f une fonction convexe sur $[0\,;1]$. Sur quel intervalle la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) + f(1-x)$ est-elle définie ? Étudier son sens de variation.

Le nombre $\varphi(x)$ est défini lorsque $x \in [0\,;1]$ et $1 - x \in [0\,;1]$, ce qui revient à dire que $x \in [0\,;1]$. Par conséquent, la fonction φ est définie sur $[0\,;1]$.
Pour $x, y \in [0\,;1]$, posons $x' = 1 - x$ et $y' = 1 - y$. Alors $\varphi(x) = f(x) + f(x')$ et $\varphi(y) = f(y) + f(y')$.

- Prenons $x < y \leqslant \frac{1}{2}$. Il vient alors $0 \leqslant x < y < y' < x' \leqslant 1$. D'après le lemme des trois cordes, on en déduit :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y') - f(x)}{y' - x} \leqslant \frac{f(x') - f(y')}{x' - y'}$$
Or $x' - y' = y - x > 0$ et donc :
$$f(y) - f(x) \leqslant f(x') - f(y') \quad \text{d'où} \quad \varphi(y) \leqslant \varphi(x).$$
- Prenons $\frac{1}{2} \leqslant x < y$. Il vient alors $0 \leqslant y' < x' < x < y \leqslant 1$. D'après le lemme des trois cordes, on en déduit :
$$\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} \leqslant \frac{f(y') - f(x)}{y' - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
Or $x' - y' = y - x > 0$ et donc :
$$f(y') - f(x') \leqslant f(x) - f(y) \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

En résumé, la fonction φ est décroissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

Remarque : dans cet exercice, on n'a pas supposé f dérivable. On ne peut donc pas raisonner avec la dérivée pour obtenir le sens de variation de φ.

Exercice 80 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

On montre par contraposée que si f n'est pas constante, alors f n'est pas majorée. Supposons que f n'est pas constante. Il existe donc $a < b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Posons $\Delta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
D'après le lemme des trois cordes, il vient :

$$\forall x > b, \quad \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant \Delta \qquad \text{et} \qquad \forall x < a, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \Delta$$

Il en résulte (attention à $x-a<0$ dans la deuxième inégalité) :

$$\forall x > b, \quad f(x) \geqslant f(b) + \Delta(x-b) \qquad \text{et} \qquad \forall x < a, \quad f(x) \geqslant f(a) + \Delta(x-a)$$

Si $\Delta > 0$, la première inégalité montre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Si $\Delta < 0$, la deuxième inégalité montre que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
Dans les deux cas, la fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ et c'est ce qu'il fallait prouver.

D Intégration

Sur ce chapitre, il est important de bien maîtriser les points suivants :

- *dérivation de la fonction* $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
- *sommes de Riemann.*
- *primitives usuelles, intégration par parties et changement de variable.*

Exercice 81 : Primitiver les fonctions arcsin et arctan.

Pour ces deux fonctions, l'idée est la même, on calcule l'intégrale

$$F(x) = \int_0^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t$$

à l'aide d'une intégration par parties en primitivant 1 et en dérivant $\arcsin(t)$:

$$F(x) = \big[t \arcsin(t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = x \arcsin x + \Big[\sqrt{1-t^2}\Big]_0^x$$

On obtient finalement :

$$F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 1$$

En ajoutant n'importe quelle constante, on trouve toutes les primitives de arcsin. On procède de même pour arctan :

$$G(x) = \int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = \big[t \arctan t\big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Exercice 82 : Primitiver $f : x \mapsto \frac{1}{x^3-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Les pôles complexes de f sont $1, j, j^2$ en posant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. La factorisation du dénominateur donne $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$. Nous savons qu'il existe des coefficients réels a, b, c tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

En multipliant par $x-1$, on obtient :

$$\frac{1}{x^2+x+1} = a + \frac{(bx+c)(x-1)}{x^2+x+1}$$

En évaluant ceci en $x=1$, on obtient $a = \frac{1}{3}$. En multipliant maintenant par x^2+x+1, on obtient :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{a(x^2+x+1)}{x-1} + bx + c$$

En évaluant en $x = j$, il vient alors

$$bj + c = \frac{1}{j-1} = \frac{j^2-1}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{-j-2}{3}$$

en utilisant $j^2 = -j-1$. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, j)$ est libre. On peut donc identifiant les coefficients de la combinaison linéaire $bj+c$. On en déduit

$$b = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad c = -\frac{2}{3}$$

et finalement

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \times \frac{x+2}{x^2+x+1}$$

Le terme $\frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1}$ se primitive en $\frac{1}{3}\ln(x-1)$. Pour le second, on écrit :

$$-\frac{1}{3} \times \frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{1}{6} \times \frac{(2x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}$$

Or $-\frac{1}{6} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ se primitive en $-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)$. Enfin

$$-\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \text{ a pour primitive } -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Au final, nous trouvons comme primitives de f :

$$\boxed{F : x \mapsto \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{Cte}}$$

Exercice 83 : Primitiver $\frac{1}{\cos x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$

On veut calculer

$$F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\cdot$$

L'élément différentiel $\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ est invariant par la transformation $t \leftarrow \pi - t$ car $\cos(t)$ et $\mathrm{d}t$ sont tous les deux changés en leur opposé. Il est alors conseillé d'effectuer le changement de variable $u = \sin t$. Alors $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$ et donc

$$F(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sin x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\sin x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \frac{1}{2}\int_0^{\sin x} \frac{\mathrm{d}u}{1-u}$$

d'où

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

En ajoutant une constante quelconque, on trouve toutes les primitives.

Exercice 84 : Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer : $\quad 0 \leqslant e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exp à l'ordre n entre 0 et 1. Puisque $\exp^{(n+1)} = \exp$, il vient :

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t$$

On veut montrer $0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e}{(n+1)!}\cdot$ La minoration est évidente. Par ailleurs,

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,\mathrm{d}t \leqslant e\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = e\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

Exercice 85 : Déterminer le signe de $\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\cdot$

Pour $x > -1$, posons

$$L(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

La fonction L est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $T_n(x)$ est son polynôme de Taylor (c'est-à-dire son DL à l'ordre n sans le o(...)). On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à L entre 0 et x. Il vient :

$$L(x) = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} L^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

On a $L'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$. D'après le cours, il vient :

$$L^{(n+1)}(x) = (L')^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

et donc

$$L(x) - T_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

Lorsque x est positif, la fonction sous l'intégrale $\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}$ est positive et donc $\ln(1+x) - T_n(x)$ est du signe de $(-1)^n$.
Lorsque x est négatif, la quantité $(x-t)$ est négative donc $(x-t)^n$ est du signe de $(-1)^n$. Autrement dit, $(-1)^n(x-t)^n = |x-t|^n$. Mais alors :

$$\ln(1+x) - T_n(x) = \int_0^x \frac{|x-t|^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

La fonction sous l'intégrale est positive mais les bornes sont rangées dans l'ordre décroissant donc $\ln(1+x) - T_n(x) \leqslant 0$. En conclusion :

- si $-1 < x \leqslant 0$, $\ln(1+x) - T_n(x) \leqslant 0$.
- si $x \geqslant 0$ et n pair, alors $\ln(1+x) - T_n(x) \geqslant 0$.

- si $x \geqslant 0$ et n impair, alors $\ln(1+x) - T_n(x) \leqslant 0$.

Exercice 86 : Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $S_n(k) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$.
En comparant les termes p^k, $(p+1)^k$ et $\displaystyle\int_p^{p+1} x^k \,\mathrm{d}x$, déterminer un équivalent de $S_n(k)$ lorsque n tend vers l'infini (à k fixé).

Notons que la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il s'ensuit que, pour tout entier naturel p et tout réel $x \in [p\,;p+1]$, on a :

$$p^k \leqslant x^k \leqslant (p+1)^k$$

En intégrant entre p et $p+1$, il vient :

$$p^k = \int_p^{p+1} p^k \,\mathrm{d}x \leqslant \int_p^{p+1} x^k \,\mathrm{d}x \leqslant \int_p^{p+1} (p+1)^k \,\mathrm{d}x = (p+1)^k$$

En décalant l'entier p, l'inégalité de droite se réécrit, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{(p-1)}^{p} x^k \,\mathrm{d}x \leqslant p^k \quad \text{et rappelons :} \quad p^k \leqslant \int_p^{p+1} x^k \,\mathrm{d}x$$

En sommant cet encadrement pour p variant de 1 à n, il vient :

$$\int_0^n x^k \,\mathrm{d}x \leqslant S_n(k) \leqslant \int_1^{n+1} x^k \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{n+1} x^k \,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\int_0^n x^k \,\mathrm{d}x = \frac{n^{k+1}}{k+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{n+1} x^k \,\mathrm{d}x = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$$

On en déduit :

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} \leqslant S_n(k) \leqslant \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} \quad \text{et donc} \quad 1 \leqslant S_n(k) \cdot \frac{k+1}{n^{k+1}} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+1}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on peut conclure :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(k) \cdot \frac{k+1}{n^{k+1}} = 1 \quad \text{et donc} \quad S_n(k) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

Exercice 87 : Donner un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^{n} k\, e^{k/n}$.

Pour $t \in [0\,;1]$, on pose $f(t) = te^t$. La fonction f est continue sur le segment $[0\,;1]$ donc la somme de Riemann

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} e^{k/n}$$

converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Par IPP :

$$\int_0^1 te^t \,\mathrm{d}t = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t \,\mathrm{d}t = e - (e-1) = 1.$$

Or $u_n = n^2 v_n$ et donc $u_n \sim n^2$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 88 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On suppose ici que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.
2. Soit $T > 0$. On suppose maintenant que la fonction f est T-périodique. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On remarque que

$$u_n - \ell = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_0^n \ell \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^n (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, en remplaçant f par $g : t \mapsto f(t) - \ell$, on peut se ramener au cas $\ell = 0$. Dorénavant, nous supposons $\ell = 0$.
Fixons une précision arbitraire $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que,

$$\forall t \geqslant A, \quad |f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons maintenant $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > A$. Pour tout $n \geqslant n_0$, il vient :

$$\begin{aligned} |u_n| = \frac{1}{n}\left|\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^n |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_A^n |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{n-A}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Le nombre $\displaystyle\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est constant donc $\frac{1}{n}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il existe donc un rang $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \frac{1}{n}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons enfin $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour $n \geqslant n_2$, il vient $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Cela prouve que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Remarque : Ce résultat est l'équivalent du théorème de Cesaro pour les intégrales. Vous pouvez relire la démonstration du théorème de Cesaro et comparer avec la preuve que nous venons d'écrire.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons la division euclidienne de n par le réel T. Il existe un unique couple (q_n, r_n) avec $q_n \in \mathbb{N}$ et $r_n \in [0\,;T[$ tel que $n = q_nT + r_n$. Notons que $q_n = \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor$. Alors :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\int_0^{q_nT} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{q_nT}^{q_nT+r_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Comme f est T-périodique, l'intégrale de f sur un intervalle de longueur T est toujours la même et donc :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(q_n \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{r_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Or, d'une part, comme $0 \leqslant r_n < T$, il vient :

$$\left|\int_0^{r_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{r_n} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^{r_n} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{n}\int_0^{r_n} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part,

$$n = q_nT + r_n \quad \text{donc} \quad \frac{q_n}{n} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{r_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{T}$$

puisque la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
En tenant compte de ces deux limites, on obtient :

$$u_n = \frac{q_n}{n}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{n}\int_0^{r_n} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 89 : Soit $k \geqslant 0$ et $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Montrer que l'application F définie par :

$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne de rapport inférieur ou égal à $\frac{k}{2}$.
Indication : un changement de variable ramène à une intégrale de 0 à 1.

Pour $x > 0$, nous commençons par faire le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ dans l'intégrale. Il vient :

$$F(x) = \int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u.$$

Notons que cette égalité reste valable lorsque $x = 0$ car alors

$$\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0) = F(0).$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, il vient :

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_0^1 f(uy)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 f(ux)\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^1 (f(uy) - f(ux))\,\mathrm{d}u\right|$$

Par inégalité triangulaire, il vient :

$$|F(y) - F(x)| \leqslant \int_0^1 |f(uy) - f(ux)|\,\mathrm{d}u$$

Puisque f est k-lipschitzienne, il vient finalement :

$$|F(y) - F(x)| \leqslant \int_0^1 k\,|uy - ux|\,\mathrm{d}u = k\,|y - x|\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{k}{2}\,|y - x|$$

et donc F est $\frac{k}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 90 : Pour $u > 0$, on pose $f(u) = \displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[0\,;+\infty[$. On précisera les valeurs en 0 des prolongements de f et de f'.
Indication : utiliser la décroissance de $\cos$ *sur un intervalle à droite de* 0.

Lorsque $u > 0$, il vient $0 < u < 3u$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur tout le segment $[u\,;3u]$ si bien que l'intégrale $f(u) = \displaystyle\int_u^{3u} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est correctement définie : la fonction f est donc correctement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Prolongeons-la par continuité en 0.
Pour $0 < u < \frac{\pi}{3}$, la fonction $\cos$ est décroissante sur $[u\,;3u] \subset [0\,;\pi]$. Il vient alors :

$$\cos(3u)\int_u^{3u} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant f(u) \leqslant \cos(u)\int_u^{3u} \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{i.e.} \quad \cos(3u)\ln(3) \leqslant f(u) \leqslant \cos(u)\ln(3)$$

On peut alors conclure que

$$\lim_{u\to 0} f(u) = \ln(3).$$

Cela prouve que f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = \ln(3)$.

Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, définissons maintenant $G(u) = \displaystyle\int_1^u \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Il vient alors

$$f(u) = G(3u) - G(u).$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, le cours nous assure que G est de classe $\mathscr{C}^1$ et que, pour $u > 0$, on a $G'(u) = \dfrac{\cos(u)}{u^2}\cdot$ Par composition, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et, pour $u > 0$:

$$f'(u) = 3\,G'(3u) - G'(u) = 3\frac{\cos(3u)}{3u} - \frac{\cos(u)}{u} = \frac{\cos(3u) - \cos(u)}{u}.$$

À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, il vient, quand u tend vers 0 :

$$f'(u) = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{9u^2}{2} - 1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = -4u + o(u).$$

En particulier, nous pouvons en déduire $\lim\limits_{u\to 0} f'(u) = 0$.

Nous avons montré que (une fois prolongée) f est une fonction continue sur $[0\,;+\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0\,;+\infty[$ et que f' a une limite finie (nulle) en 0. D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela prouve que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$ avec $f'(0) = 0$.

E Équations différentielles

Le cours de première année sur les équations différentielles est très bref et centré sur la résolution explicite d'équations différentielles à l'aide des fonctions usuelles. Il faut bien maîtriser la technique de variation de la constante et comprendre la preuve de la résolution de l'équation du premier ordre qui repose sur la dérivation de $x \mapsto e^{\lambda x} f(x)$. La résolution de l'équation du second ordre à coefficients constants est très utilisée en Physique et doit être connue.

Exercice 91 : Trouver toutes les applications dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait $f'(x) = f(-x) + e^x$.
Indication : à cause de la présence de $f(-x)$, ce n'est pas une vraie équation différentielle mais, en redérivant, on obtient une équation du second ordre.

Analyse : supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x) + e^x.$$

Puisque $x \mapsto f(-x) + e^x$ est dérivable, la fonction f' est dérivable et, en dérivant l'égalité, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(-x) + e^x = -[f(x) + e^{-x}] + e^x$$

en exploitant la relation $f'(x) = f(-x) + e^x$ avec $-x$ à la place de x. Il s'ensuit que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = e^x - e^{-x}$.
La solution générale de l'équation homogène est $y_0(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ avec α et β deux constantes réelles.
Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, nous utilisons le principe de superposition. Les calculs montrent que la fonction y_1 définie par $y_1(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}(x)$ est solution.
En conclusion, nous pouvons dire que si f est une solution du problème posé, alors il existe deux constantes α et β telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \mathrm{sh}(x).$$

Synthèse : parmi ces fonctions, vérifions lesquelles sont effectivement solutions du problème posé. Avec cette formule, il vient, pour tout réel x :

$$f'(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x + \mathrm{ch}\,x \quad \text{et}$$

$$f(-x) + e^x = \alpha\cos x - \beta\sin x - \mathrm{sh}(x) + e^x = \alpha\cos x - \beta\sin x + \mathrm{ch}(x)$$

ce qui prouve que f vérifie le problème initial si, et seulement si, $\alpha = \beta$.

En conclusion, les solutions du problème posé sont les fonctions

$$f : x \mapsto \alpha(\cos x + \sin x) + \mathrm{sh}(x) \quad \text{avec} \quad \alpha \text{ une constante réelle.}$$

Exercice 92 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions telles que
$$g \text{ est paire} \quad ; \quad h \text{ est impaire} \quad ; \quad f = g + h.$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ ssi g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$.
2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(-x).$$

1. Existence :
Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}\cdot$ On vérifie facilement que g est paire, que h est impaire et que $f = g + h$.
Unicité : supposons que G est une fonction paire, que H est une fonction impaire et que $f = G + H$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient :
$$f(x) = G(x) + H(x) \quad \text{et} \quad f(-x) = G(-x) + H(-x) = G(x) - H(x).$$

En ajoutant ces deux égalités, il vient $f(x)+f(-x)=2G(x)$ et donc $G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
En retranchant ces deux égalités, il vient $f(x)-f(-x)=2H(x)$ et donc $H(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Cela prouve que $G=g$, $H=h$ et donc il y a bien unicité.

Lorsque f est $\mathscr{C}^2$, les deux formules de définition de g et h montrent clairement que g et h sont $\mathscr{C}^2$. Réciproquement, lorsque g et h sont $\mathscr{C}^2$, la formule $f=g+h$ montre clairement que f est $\mathscr{C}^2$.

Remarque : g s'appelle la *partie paire* de f et h s'appelle la *partie impaire* de f.

2. Écrivons f sous la forme $f=g+h$ avec g paire et h impaire. Alors :

$$f''(x)=g''(x)+h''(x) \quad \text{et} \quad f(-x)=g(x)-h(x).$$

On constate que g'' est paire et h'' est impaire. Par conséquent, g'' est la partie paire de f'' et h'' est la partie impaire de f''.
Analyse : supposons que f est solution du problème. En identifiant les parties paires et impaires de f'' et de $x\mapsto f(-x)$, il vient $g''=g$ et $h''=-h$. La résolution de ces deux équations différentielles donne quatre constantes a,b,c,d telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x \quad \text{et} \quad h(x)=c\cos x+d\sin x.$$

Comme g est paire, $b=0$. Comme h est impaire, $c=0$. Finalement, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=a\operatorname{ch}x+d\sin x.$$

Synthèse : prenons deux constantes a,d et définissons la fonction

$$f:x\mapsto a\operatorname{ch}x+d\sin x.$$

D'une part, f est de classe $\mathscr{C}^2$. Par ailleurs, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f''(x)=a\operatorname{ch}x-d\sin x=f(-x)$$

donc toute fonction de cette forme est bien solution du problème posé.

Exercice 93 : Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dite additive lorsque

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Soit f une fonction additive continue. Exprimer $f(\lambda x)$ en fonction de $f(x)$ pour λ successivement dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. En déduire la liste de toutes les fonctions additives continues.
2. Grâce à l'intégration, montrer que toute fonction additive continue est de classe $\mathscr{C}^1$. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

1. On constate tout d'abord que $f(0)=f(0+0)=2f(0)$ et donc $f(0)=0$. On en déduit que $0=f(x-x)=f(x)+f(-x)$ et donc $f(-x)=-f(x)$. On prouve ensuite, par une récurrence immédiate, que $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et, avec la propriété sur l'opposé, on en déduit $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{Z}$. Pour $r\in\mathbb{Q}$, on écrit $r=\frac{a}{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$. Mais alors, en appliquant ce qui précède, on obtient

$$af(x)=f(ax)=f(brx)=bf(rx) \quad \text{d'où} \quad f(rx)=\frac{a}{b}f(x)=rf(x)$$

Enfin, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on introduit une suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres rationnels qui converge vers λ. Par continuité de f, il vient :

$$f(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}f(r_nx)=\lim_{n\to\infty}r_nf(x)=\lambda f(x).$$

On applique finalement ceci avec $x=1$. En posant $\alpha=f(1)$, on a donc démontré :

$$f(\lambda)=\alpha\lambda$$

Réciproquement, il est clair que, pour toute constante α, la fonction $\lambda\mapsto\alpha\lambda$ est continue et additive.

2. Fixons un réel x. Nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 f(t+x)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\big(f(t)+f(x)\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+f(x)$$

et donc :

$$f(x)=\int_0^1 f(t+x)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+1}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue, la fonction $F:x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Or, d'après l'égalité précédente, $f(x)=F(x+1)-F(x)-F(1)$, ce qui prouve que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Repartons de la relation $f(x+y)=f(x)+f(y)$. En fixant x et en dérivant par rapport à y (ce qu'on peut faire maintenant qu'on sait que f est de classe $\mathscr{C}^1$), on obtient $f'(x+y)=f'(y)$. Choisissons maintenant d'appliquer cela en $y=0$. On obtient $f'(x)=f'(0)$, ce qui prouve que f' est constante et donc f est une fonction affine. Il existe donc deux constantes $a,b\in\mathbb{R}$ telles que $f:x\mapsto ax+b$. Mais alors

$$f(x+y)=ax+ay+b \quad \text{et} \quad f(x)+f(y)=ax+ay+2b \quad \text{et donc} \quad b=0$$

On a prouvé que $f:x\mapsto ax$ et, là encore, la réciproque est évidente. Toute fonction $f:x\mapsto ax$ est continue et additive.

Exercice 94 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie pour tout x :

$$f(x)+f'(x)>0$$

Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x)=f(x)e^x$. Alors $\varphi'(x)=(f(x)+f'(x))e^x>0$ et donc φ est une application strictement croissante. Or $\varphi(0)=0$ et donc pour $x>0$, $\varphi(x)>0$ d'où on déduit immédiatement $f(x)>0$.

F Fonctions de deux variables

Le cours de première année sur les fonctions de deux variables se concentre sur le calcul et la manipulation des dérivées partielles. Il sera complété en deuxième année par un cours plus général sur les fonctions de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$. Pour l'heure, voici deux exercices d'entraînement sur les manipulations des dérivées partielles.

Exercice 95 : Soit $f\colon (x,y)\mapsto e^{x\sin(y)}$. Étudier les extrema de f.

- Prenons $y=\frac{\pi}{2}$. On remarque alors que

$$f\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

La fonction f n'est pas majorée donc elle ne possède pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
- Il est clair que $f>0$ et donc f est minorée. En revanche, elle ne possède pas de minimum car, avec $y=-\frac{\pi}{2}$:

$$f\left(x,-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=0$$

et, comme la fonction f est strictement positive, elle n'atteint pas sa borne inférieure.
- On peut maintenant se demander si f possède des extrema locaux. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et définie sur un ouvert, on cherche ses éventuels extrema parmi ses points critiques :

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y)e^{x\sin(y)}=0 \\ x\cos(y)e^{x\sin(y)}=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \sin(y)=0 \\ x\cos(y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k\in\mathbb{Z}, \quad y=k\pi \\ x=0 \end{cases}$$

En effet, après avoir traduit la condition $\sin y=0$ en $y=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, on a $\sin y=(-1)^k$ si bien que la seconde équation mène à $x=0$.
Il y a une infinité de points critiques, à savoir tous les couples $(0,k\pi)$ pour $k\in\mathbb{Z}$.
Fixons maintenant $k\in\mathbb{Z}$ et montrons que $(0,k\pi)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local. Pour cela, montrons que dans n'importe quel disque de centre $(0,k\pi)$ et de rayon $r>0$ (avec un rayon r aussi petit qu'on veut), on peut trouver des couples (x,y) et (x',y') tels que $f(x,y)<f(0,k\pi)<f(x',y')$.
La fonction sin change de signe en $k\pi$: pour k pair, elle est négative juste à gauche de $k\pi$ et positive juste à droite ; c'est le contraire pour k impair. Il est donc possible de trouver $h\in\left]-\frac{r}{2};\frac{r}{2}\right[$ tel que $\sin(k\pi+h)>0$. Le couple $(x,y)=(-\frac{r}{2},k\pi+h)$ vérifie $\|(x-y)-(0,k\pi)\|<r$ et $f(x,y)=e^{-\sin(k\pi+h)r/2}<1=f(0,k\pi)$ tandis que le couple $(x',y')=(\frac{r}{2},k\pi+h)$ vérifie $\|(x',y')-(0,k\pi)\|<r$ et $f(0,k\pi)=1<e^{\sin(k\pi+h)r/2}=f(x',y')$.
Finalement, la fonction f ne possède aucun extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 96 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $g(x,y)=f\big(f(y,y),f(y,x)\big)$. Exprimer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f.

La fonction g s'obtient par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$. Pour calculer ses dérivées partielles, il faut appliquer la règle de la chaîne, c'est-à-dire dériver par rapport à chaque apparition de la variable par rapport à laquelle on veut dériver.
Rappelons que la première dérivée partielle de f se note $\partial_1 f$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ et que la seconde se note $\partial_2 f$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- Posons $\mathtt{u}=f(y,y)$ et $\mathtt{v}=f(y,x)$. On constate tout d'abord que

$$\frac{\partial \mathtt{u}}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathtt{u}}{\partial y}(x,y)=\partial_1 f(y,y)+\partial_2 f(y,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

alors que

$$\frac{\partial \mathtt{v}}{\partial x}(x,y)=\partial_2 f(y,x)=\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathtt{v}}{\partial y}(x,y)=\partial_1 f(y,x)=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).$$

- On applique la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=\partial_1 f(\mathtt{u},\mathtt{v})\times\frac{\partial \mathtt{u}}{\partial x}(x,y)+\partial_2 f(\mathtt{u},\mathtt{v})\times\frac{\partial \mathtt{v}}{\partial x}(x,y)\\ &=\frac{\partial f}{\partial y}\big(f(y,y),f(y,x)\big)\times\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\end{aligned}$$

- et de même pour la seconde dérivée partielle de g :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \partial_1 f(\mathtt{u},\mathtt{v}) \times \frac{\partial \mathtt{u}}{\partial y}(x,y) + \partial_2 f(\mathtt{u},\mathtt{v}) \times \frac{\partial \mathtt{v}}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(f(y,y),f(y,x)\big) \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(f(y,y),f(y,x)\big) \times \frac{\partial f}{\partial x}(y,x).\end{aligned}$$

III Probabilités

*Voilà bien un chapitre où il est facile de dire de nombreuses bêtises. Gardez en tête l'idée suivante : les probabilités sont une partie des Mathématiques tout aussi rigoureuse que le reste ; laissez les explications fumeuses de côté et appliquez plutôt les définitions et les théorèmes du cours. Le but des probabilités est de quantifier l'**information** disponible (oubliez l'image du hasard qui agirait par magie...) ; la probabilité est une fonction permettant de quantifier à quel point un événement risque de se produire (ou pas) d'après les informations dont on dispose. Quand on calcule une probabilité conditionnelle $P(A|B)$, on ne modifie pas l'événement A (l'événement « A sachant B » n'existe pas !) et on ne modifie pas non plus l'univers des possibles Ω mais on change la fonction de probabilité (P_B au lieu de P) afin de prendre en compte l'information nouvelle (à savoir que l'événement B s'est produit) pour recalculer les probabilités de tous les événements.*
Le programme de première année se limite au cadre des espaces probabilisés finis. On peut distinguer trois grands types d'exercices :

- *une description peu formalisée de l'expérience aléatoire est proposée par l'énoncé (boules dans des urnes, etc) et on sait décrire l'univers des possibles Ω avec une probabilité uniforme. Alors l'exercice de probabilités devient un exercice de dénombrement et il faut calculer le cardinal d'une partie de Ω pour répondre.*
- *l'énoncé donne un certain nombre d'informations indirectes qu'on traduit en donnant les valeurs des probabilités d'un certain nombre d'événements (ou des probabilités conditionnelles). On utilise alors les formules du cours telles que la loi des probabilités totales ou la formule de Bayes pour obtenir les autres probabilités demandées.*
- *l'énoncé impose ou suggère l'emploi de variables aléatoires. On utilise alors les formules sur les lois usuelles dans le but de calculer des espérances, des variances, etc.*

Exercice 97 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, et avec remise, 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire modélisant le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire X.

1. Utilisant que $P(X \geqslant k) = \sum_{\ell=k}^{n} P(X=\ell)$, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} P(X=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} P(X=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} P(X=\ell)\,\ell$$

On reconnaît la formule qui donne l'espérance de X.

2. Il est clair que $X(\Omega) = [\![1\,;n]\!]$ et plutôt que de calculer (comme d'habitude) $P(X=k)$, il est plus astucieux (et la première question était là pour le suggérer) de commencer par calculer $P(X \geqslant k)$.
En effet, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, désignons par X_i la variable aléatoire modélisant le numéro de dossard de la i-ème boule extraite.
D'après le texte, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. Comme $X = \min(X_1,X_2,X_3)$, il vient :

$$P(X \geqslant k) = P(\{X_1 \geqslant k\} \cap \{X_2 \geqslant k\} \cap \{X_3 \geqslant k\})$$

Comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, on a :

$$P(X \geqslant k) = P(X_1 \geqslant k)P(X_2 \geqslant k)P(X_3 \geqslant k).$$

De plus, elles ont même loi, d'où

$$P(X \geqslant k) = P(X_1 \geqslant k)^3.$$

Puisque la variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$, on en déduit :

$$P(X \geqslant k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3.$$

Ensuite, il suffit de remarquer que

$$P(X \geqslant k) = P(X=k) + P(X>k) = P(X=k) + P(X \geqslant k+1),$$

On en déduit que

$$P(X=k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^3$$

$$= \frac{3(n-k)(n-k+1)+1}{n^3},$$

Comme X est à valeurs dans $[\![1\,;n]\!]$, elle est a fortiori à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$ donc on peut appliquer la première question pour calculer $E(X)$. Il vient :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^3$$

en faisant le changement d'indice $\ell = n-k+1$. On conclut :

$$P(X) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{4n}$$

Exercice 98 : Une urne contient dix boules rouges, dix boules vertes et dix boules bleues. On tire simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité que le tirage soit unicolore ? bicolore ? tricolore ?

L'univers des possibles est Ω l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 30 : $\text{Card}(\Omega) = \binom{30}{3} = 4\,060$. Il y a équiprobabilité. On traite, dans cet ordre, les tirages : unicolore, tricolore, bicolore.

1. unicolore : soit U_R [resp. U_V, U_B] l'événement « les trois boules sont rouges » [resp. vertes, bleues]. Soit C_1 l'événement « le tirage est unicolore ». Alors $C_1 = U_B \cup U_V \cup U_R$ et ces événements sont incompatibles donc

$$P(C_1) = P(U_B) + P(U_V) + P(U_R)$$

Comme il y a 10 boules bleues, il vient $\text{Card}(U_B) = \binom{10}{3} = 120$ et donc $P(U_B) = \frac{120}{4060} = \frac{6}{203}$.
Les nombres de boules de chaque couleur étant les mêmes, il vient $P(U_V) = P(U_R) = P(U_B)$ et donc :

$$P(C_1) = 3 \times \frac{6}{203} = \frac{18}{203}.$$

2. Soit C_3 : « le tirage est tricolore ». Un tirage tricolore consiste à choisir une boule bleue parmi les 10, puis une boule verte parmi les 10 et enfin une boule rouge parmi les 10 si bien que $\text{Card}(C_3) = 10^3 = 1000$ et donc

$$P(C_3) = \frac{1000}{4060} = \frac{50}{203}.$$

3. Soit C_2 : « le tirage est bicolore ». Comme (C_1, C_2, C_3) est un système complet d'événements, il vient :

$$P(C_2) = 1 - P(C_1) - P(C_3) = \frac{135}{203}.$$

Exercice 99 : On fixe un entier $n \geqslant 1$. On choisit un entier au hasard entre 1 et n. On note X ce premier nombre. On choisit ensuite un entier au hasard entre 1 et X. On note Y ce deuxième nombre. Déterminer la loi de Y et calculer $E(Y)$.
Indication : attention, la notation $\mathcal{U}_X$ ne veut rien dire ! Pour traduire proprement les hypothèses de l'énoncé, il faut passer par le calcul des probabilités conditionnelles $P(Y = k|X = \ell)$.

D'après le texte, $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et $P(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ (loi uniforme). De même, il est clair que $Y(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$. Il ne reste donc qu'à trouver $P(Y = k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Il suffit de partitionner selon les valeurs que peut prendre X et d'utiliser la loi des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{\ell=0}^{n} P(Y = k|X = \ell) \cdot P(X = \ell).$$

Il faut distinguer les cas $k > \ell$ et $k \leqslant \ell$:

- Lorsque $\ell < k$, on a $P(Y = k|X = \ell) = 0$.
- Lorsque $\ell \geqslant k$, on a $P(Y = k|X = \ell) = \frac{1}{\ell}$

Par conséquent,

$$P(Y = k) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=k}^{n} \frac{1}{\ell}$$

On peut en déduire l'espérance de X grâce à une interversion de sommation :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{1}{\ell} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{k}{\ell} = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{\ell} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}\frac{k}{\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} k = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}\times\frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{\ell=1}^{n}(\ell+1) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=2}^{n+1} i = \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 100 : Une urne contient au départ une boule jaune et une bleue. On y effectue une série de N extractions selon le protocole suivant : chaque fois que l'on obtient une boule jaune, on la remet dans l'urne, en ajoutant une boule bleue. Quand on tire la boule bleue, on la remet dans l'urne.
Soit X_N la variable aléatoire modélisant le rang d'apparition de la première boule bleue au cours des N extractions ($X_N = \infty$ si la boule bleue n'apparaît pas). Quelle est la loi de X_N ? Que vaut $\lim\limits_{N\to\infty} P(X_N = \infty)$? Interpréter.

1. Il est clair que $X(\Omega) = [\![1\,;N+1]\!]$.
Notons A_i l'événement « la i eme boule extraite est jaune » et introduisons l'événement $B_k = A_1 \cap \cdots \cap A_k$: « les k premières boules sont toutes jaunes ». Calculons tout d'abord les nombres $P(B_k)$.
   - Tout d'abord, $P(B_1) = P(A_1) = \frac{1}{2}\cdot$
   - Comme $B_k = A_k \cap B_{k-1}$, il vient $P(B_k) = P(A_k|B_{k-1})P(B_{k-1})$.
   Après $k-1$ tirages tous jaunes, l'urne contient 1 boule jaune et k boules bleues donc $p(A_k|B_{k-1}) = \frac{1}{k+1}$ et donc
   $$P(B_k) = \frac{1}{k+1} P(B_{k-1}).$$
   Par une récurrence immédiate, il vient :
   $$p(B_k) = \frac{1}{(k+1)!}$$

   Maintenant, calculons $P(X = k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
   - Tout d'abord, $P(X = 1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}\cdot$
   - Pour $2 \leqslant k \leqslant N$, il vient :
   $$P(X = k) = P(B_{k-1} \cap \overline{A_k}) = P(\overline{A_k}|B_{k-1})P(B_{k-1})$$
   Après $k-1$ tirages jaunes, l'une contient k boules bleues et 1 boule jaune donc $p(\overline{A_k}|B_{k-1}) = \frac{k}{k+1}$ et finalement :
   $$p(X = k) = \frac{k}{(k+1)} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

   Enfin, $P(X = \infty) = P(B_N) = \frac{1}{(N+1)!}\cdot$
2. Il est clair que $\lim\limits_{N\to\infty} P(X = \infty) = 0$ avec une convergence très rapide. Si on tire de très nombreuses fois, il devient extrêmement improbable qu'aucune boule bleue ne sorte.

Exercice 101 : Une série d'appareils (numérotés $1, 2, 3, \ldots$) transmettent un bit de message (0 ou 1). Chaque appareil transmet fidèlement le bit qu'il reçoit avec une probabilité $q \in]0\,;1[$ et le change en son contraire avec une probabilité $p = 1 - q$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n la probabilité que le bit à l'entrée du transmetteur n soit le même qu'à l'entrée du transmetteur 1 (ainsi $\pi_1 = 1$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer π_{n+1} en fonction de π_n.
2. Montrer que $(\pi_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Exprimer π_n en fonction de n et de p.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$. Que remarque-t-on ?

1. Notons A_n l'événement « le message à l'entrée du transmetteur n est le même qu'à l'entrée du transmetteur 1 » et B_n l'événement « le transmetteur n modifie le message qu'il a reçu ». D'après l'énoncé :
$$P(A_n) = \pi_n \quad \text{et} \quad P(B_n) = p = 1 - q.$$
Le message à l'entrée du transmetteur $n+1$ peut être correct pour deux raisons :
   - le message était correct à l'entrée du transmetteur n et celui-ci a transmis fidèlement ce qu'il a reçu.
   - le message était incorrect à l'entrée du transmetteur n et celui-ci a modifié le message qu'il a reçu.

   Ces deux possibilités s'excluent l'une l'autre donc (en exploitant l'indépendance des événements A_n et B_n) :
$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap \overline{B_n}) + P(\overline{A_n} \cap B_n) \\ &= P(A_n)[1 - P(B_n)] + [1 - P(A_n)]P(B_n) \\ &= \pi_n(1-p) + (1-\pi_n)p \end{aligned}$$
d'où finalement :
$$\pi_{n+1} = (1-2p)\pi_n + p.$$
2. Cette relation de récurrence est bien celle d'une suite arithmético-géométrique. En posant $u_n = \pi_n - \frac{1}{2}$, on constate que :
$$u_{n+1} = \pi_{n+1} - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(\pi_n - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)u_n$$
si bien que
$$u_n = (1-2p)^{n-1} u_1 = \frac{1}{2}(1-2p)^{n-1} \quad \text{et} \quad \pi_n = \frac{1}{2}\left(1 + (1-2p)^{n-1}\right).$$
3. Comme $-1 < 1 - 2p < 1$, on voit que $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = \frac{1}{2}\cdot$ On constate que la probabilité que le message soit correctement transmis tend vers $\frac{1}{2}$, indépendamment de p (c'est-à-dire indépendamment de la qualité des transmetteurs).

Exercice 102 : On joue à pile ou face n fois de suite avec une pièce équilibrée. On définit les événements suivants :

- A_n : au cours des n lancers, on a obtenu au moins une fois “pile” et au moins une fois “face”.
- B_n : au cours des n lancers, on a obtenu au plus une fois “pile”.

1. Pour $n \geqslant 2$, calculer les probabilités de A_n et de B_n.
2. Les événements A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?
4. Pour quelles valeurs de l'entier $n \geqslant 2$ les événements A_n et B_n sont-ils indépendants ?

Remarquons tout d'abord qu'il y a une expérience aléatoire différente pour chaque valeur de n avec un univers $\Omega_n = \{0,1\}^n$ et une probabilité P_n sur Ω_n. Pour simplifier, nous notons P la probabilité pour toutes les valeurs de n.

Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons F_k l'événement « on obtient “face” au tirage numéro k ». Remarquons que l'événement « on obtient “pile” au tirage numéro k » est égal à $\overline{F_k}$. Comme la pièce est équilibrée, il vient $P(F_k) = P(\overline{F_k}) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$. Comme les lancers de la pièce sont successifs, on modélise l'expérience en disant que les événements $F_1, \dots, F_n$ sont mutuellement indépendants.

1. Notons $E = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n}$ et $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n$. Il vient $\overline{A_n} = E \cup F$. De plus, les événements E et F sont incompatibles. Par conséquent, $P(\overline{A_n}) = P(E) + P(F)$. Par indépendance mutuelle des événements F_i, on trouve :
$$P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\cdot$$
Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons G_k l'événement « on tire $G_k = \overline{F_k} \cap \bigcap_{j\neq k} F_j$. Nous constatons alors que $B_n = F \cup G_1 \cup \cdots \cup G_n$. De plus, ces événements sont incompatibles et ont tous la même probabilité $\frac{1}{2^n}$ (en raison de l'indépendance mutuelle des F_i) si bien que :
$$P(B_n) = P(F) + P(G_1) + \cdots + P(G_n) = \frac{n+1}{2^n}$$
2. Pour $n = 2$, on peut écrire :
$$A_2 \cap B_2 = (\overline{F_1} \cap F_2) \cup (F_1 \cup \overline{F_2})$$
Les deux événements entre parenthèses sont incompatibles donc, par indépendance de F_1 et F_2 :
$$P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
On constate que
$$P(A_2)P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$
ce qui prouve que A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.
3. Pour $n = 3$, on peut écrire :
$$A_3 \cap B_3 = (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3})$$
Il s'ensuit que $P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}\cdot$ Par ailleurs
$$P(A_3)P(B_3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$
et donc A_3 et B_3 sont indépendants.
4. Dans le cas général :
$$A_n \cap B_n = \bigcup_{k=1}^{n} (F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_n)$$
si bien que $P(A_n \cap B_n) = \frac{n}{2^n}$ tandis que
$$P(A_n)P(B_n) = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \times \frac{n+1}{2^n}\cdot$$
Les événements A_n et B_n sont indépendants si, et seulement si, ces deux quantités sont égales, c'est-à-dire :
$$\frac{n}{2^n} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \times \frac{n+1}{2^n} \iff 2^{n-1} - n = 1.$$
Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = 2^{n-1} - n$. Il vient :
$$u_{n+1} - u_n = 2^{n-1} - 1 > 0$$
donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante. Or $u_3 = 1$ et donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ ne prend la valeur 1 pour aucune autre valeur de n. Par conséquent, A_n et B_n sont indépendants si, et seulement si, $n = 3$.

Exercice 103 ($\star$) **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$, on considère une variable aléatoire S_n qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Pour tout λ tel que $0 < \lambda < p$, montrer que :
$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant \lambda n) = 0.$$

Pour tout réel x, si $x \leqslant \lambda$, alors $|x-p| \geqslant p-\lambda$· Par conséquent :

$$\{S_n \leqslant \lambda n\} = \left\{\frac{S_n}{n} \leqslant \lambda\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant p-\lambda\right\}$$

Or nous savons que $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = p$ et donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(S_n \leqslant \lambda n) \leqslant P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant p-\lambda\right) \leqslant \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{(p-\lambda)^2} = \frac{1}{n^2(p-\lambda)^2} V(S_n)$$

D'après le cours, nous savons que $V(S_n) = np(1-p)$ si bien que :

$$P(S_n \leqslant \lambda n) \leqslant \frac{p(1-p)}{n(p-\lambda)^2}$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n \leqslant \lambda n) = 0$.