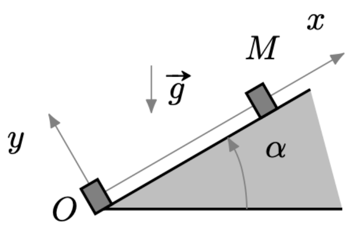
Devoir Surveillé n°7

I Interaction entre deux aimants

On étudie le mouvement de deux aimants considérés comme des points matériels de même masse m. L'un est immobile en un point O et l'autre, de masse m et de position M, est mobile sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale dans le champ de pesanteur d'accélération $\overrightarrow{g}$.



Les aimants sont orientés de manière à se repousser et la force que O exerce sur M se met sous la forme :

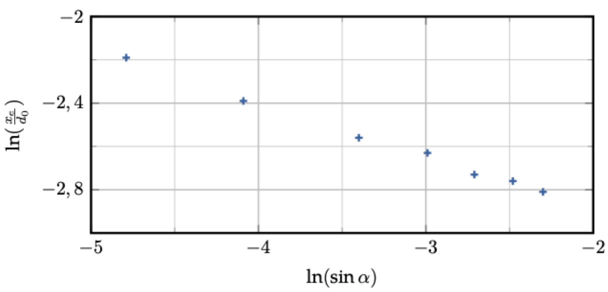
$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{K}\left(\frac{d_0}{d}\right)^n \overrightarrow{e}_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

avec $d_0 \geqslant 0$, $\mathrm{K} \geqslant 0$ et $n \neq 1$ des constantes, d la distance les séparant et $\overrightarrow{e}_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$ le vecteur unitaire de O à M. Sur la figure, on a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{K}\left(\frac{d_0}{d}\right)^n \overrightarrow{e}_x$$

Données : masse d'un aimant : $m = 5$ g ; accélération de la pesanteur $g = 9{,}8$ m.s^{-1}.

1. (a) La constante d_0 est une homogène à une longueur. Préciser la dimension de la constante K.
   Montrer que la force F est conservative et donner l'expression d'une énergie potentielle associée. On prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.
   (b) En déduire que le système est conservatif et donner une expression de son énergie potentielle globale, qu'on désignera par $\mathrm{E_{pot}}$ dans toute la suite.
   (c) Montrer l'existence d'une position d'équilibre de coordonnée notée x_e. On donnera l'expression de x_e en fonction de K, m, d_0, g, n et α.
   (d) À quelle condition portant sur n l'équilibre est-il stable ? Tracer l'allure de $\mathrm{E_{pot}}$ quand il est stable et quand il est instable.
2. On étudie les petits mouvements au voisinage de la position x_e dans le cas d'un équilibre stable. On note $x = x_e + \varepsilon$.
   (a) Établir le développement limité de $\mathrm{E_{pot}}$ au terme non nul d'ordre non nul le plus bas en $\varepsilon/x_e \ll 1$.
   (b) En déduire l'expression de la période T des oscillations de faible amplitude autour de l'équilibre. Comment varie-t-elle avec la masse m ?
3. Afin de déterminer la valeur de n, on mesure x_e pour différentes valeurs de α, et on trace $\ln(x_e/d_0)$ en fonction de $\ln(\sin\alpha)$ (avec $d_0 = 1$ m). On obtient la courbe ci-dessous.



(a) Déduire de cette courbe et de 1c la puissance n. On l'arrondira à l'entier le plus proche.

(b) La position d'équilibre est-elle stable ?

(c) Calculer la valeur de $\mathrm{K}\, d_0^n$ si on mesure $x_e = 20$ cm pour $\alpha = \pi/6$.

(d) Calculer la valeur de T correspondante.

On pourra aborder les questions suivantes même si la valeur de n n'a pas été déterminée.

4. On lâche l'aimant M sans vitesse initiale de l'abscisse $4x_e$.

(a) Déterminer sa vitesse quand il passe par l'abscisse x_e.

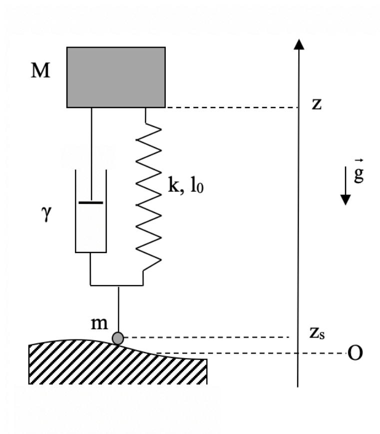
(b) Calculer le quotient de l'énergie potentielle magnétique et de l'énergie potentielle de pesanteur quand il se trouve en $x = 4x_e$. Commenter.

(c) Proposer une détermination graphique de l'abscisse x minimale qu'il atteint au cours de son mouvement notée $x_{\min}$. Utiliser le résultat de la question précédente pour donner une approximation de $x_{\min}$ dont on calculera la valeur.

Données : R = 0,10 m, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m, $g = 9{,}8$ m/s^2, Q $= 1{,}0 \times 10^{-5}$ C et $q = 1{,}0 \times 10^{-7}$ C.

II Étude d'une suspension de voiture

On modélise la suspension d'un véhicule par le schéma ci-contre. La liaison entre une masse M, d'altitude z et le sol se fait par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k et de masse négligeable.



A l'extrémité inférieure de ce ressort, le contact avec le sol se fait par l'intermédiaire d'une petite masse $m <$ M. Les masses M et m seront assimilées à des points matériels.

On ajoute en parallèle avec le ressort de suspension, un amortisseur qui exerce sur la masse M une force de frottement visqueux de la forme : $\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\gamma \dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$ où $\ell = z - z_s$ est la longueur instantanée du ressort et γ est une constante.

1. La vibration verticale du sol a pour élongation $\overrightarrow{z_s}(t) = z_0 \cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$.

(a) En supposant que la masse m reste en contact avec le sol, montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement de M s'écrit sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2(z - \ell_1) = \frac{1}{\tau}\dot{z}_s + \omega_0^2 z_s$$

où ω_0, ℓ_1 et τ sont des constantes à déterminer.

(b) On pose $y(t) = z(t) - \ell_1$. Expliquer quelle sera la forme de $y(t)$ en régime établi (aucun calcul n'est demandé à cette question).

(c) On s'intéresse à l'amplitude Y_0 de vibration de M en fonction de ω. Montrer en posant $x = \omega/\omega_0$ que l'on peut obtenir

$$\frac{Y_0}{Z_0} = \sqrt{\frac{1+\alpha^2x^2}{(1-x^2)^2+\alpha^2x^2}}$$

α étant un paramètre que l'on précisera.

2. On s'intéresse maintenant à la masse m.
   (a) Etablir l'équation du mouvement de la masse m.
   (b) Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{R}{M} - (1+\beta)g = \beta\ddot{z}_s + \omega_0^2 z_s - \omega_0^2 y$$

   où $\beta = m/M$ et R un paramètre dont on précisera la dimension et la signification physique.
   (c) Montrer qu'en régime établi : $\frac{R}{M} = (1+\beta)g + A\cos(\omega t + \Phi)$ et, en utilisant la notation complexe, déterminer l'amplitude A.
   (d) En déduire la condition pour que la masse m ne décolle pas du sol et montrer que cette condition se met sous la forme

$$h(x) < \frac{(1+\beta)g}{z_0\omega_0^2} \qquad \text{où} \qquad h(x) = x^2\sqrt{\frac{(1+\beta-\beta x^2)^2+\alpha\beta^2x^2}{(1-x^2)^2+\alpha x^2}}$$

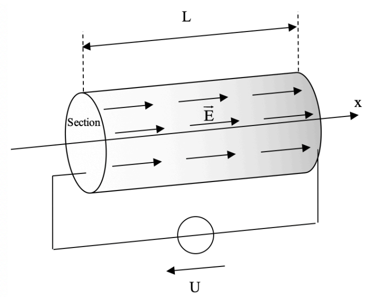
   (e) Donner l'équivalent haute fréquence de la fonction $h(x)$. Comment doit-on choisir le paramètre β pour que les roues restent en contact permanent avec le sol, dans le domaine des pulsations très supérieures à la pulsation propre ω_0 ?
3. On considère une roue imparfaitement plane, comportant une succession de bosses que l'on assimilera à une sinusoïde de période spatiale $\lambda = 2$ m et de hauteur crête à crête 5 cm. Le véhicule se déplace sur cette route à une vitesse v constante sa suspension est caractérisée par une fréquence propre $f_0 = 1{,}5$ Hz.
   (a) Expliquer pourquoi on retrouve la vibration $\vec{z}_s(t)t = z_0\cos(\omega t)\,\vec{u_z}$ et donner la relation entre ω, λ et v.
   (b) On souhaite qu'un passager ne ressente pas les bosses de la chaussée doit-on rouler à faible ou grande vitesse. Donner une vitesse caractéristique, cette vitesse est-elle réaliste ?

III Conduction et effet Hall

On rappelle :
- charge élémentaire $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C
- masse de l'électron $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
- constante d'Avogadro $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol−1

III.1 Modèle de conduction dans un métal ou un semi conducteur

Pour modéliser la conduction électrique dans un matériau, on considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L, dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel U (voir schéma ci-dessous).



Un champ électrique uniforme $\overrightarrow{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}\overrightarrow{e_x}$ orthogonal à la section S règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique n d'électrons libres ($n \times \mathrm{V}$ électrons libre dans un volume V), de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise l'action du réseau atomique sur les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{frottement} = -\alpha\overrightarrow{v}$.

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite $\overrightarrow{v_\infty}$. Exprimer la loi d'évolution temporelle de la vitesse d'un électron et en donner la durée τ caractéristique.
2. Exprimer le nombre dN d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée dt en fonction des paramètres pertinents. On supposera pour cela que tous les électrons ont atteint leur vitesse limite. En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.
3. Montrer qu'une relation de proportionnalité lie la tension U aux bornes du conducteur à l'intensité qui le traverse. Montrer que sa résistance peut se mettre sous la forme $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{L}\alpha}{\mathrm{S}ne^2}$; cette forme se rapproche-t-elle d'une expression connue ?
4. Le cuivre a une résistivité $\rho = 1{,}68 \times 10^{-8}$ Ω.m, une masse volumique $\mu_{\mathrm{Cu}} = 8{,}96 \times 10^3$ kg.m^{-3} et une masse molaire $\mathrm{M_{Cu}} = 63{,}5$ g.mol^{-1}. En supposant que chaque atome de cuivre libère un électron pour la conduction électrique, calculer la densité n puis la constante de temps τ. Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite ?
5. Le germanium, Ge, est un bon isolant électrique. Lorsqu'on introduit des impuretés en très faible concentration, par exemple de l'antimoine (Sb), la conductivité électrique du germanium augmente fortement : on obtient un semi-conducteur "dopé", noté Ge :Sb dont les propriétés électriques dépendent à la fois du nombre d'atomes Sb introduits par unité de volume, $n_{\mathrm{S}b}$, et de la température T.

   On propose le modèle suivant de la conduction dans le germanium dopé : dans Ge pur, tous les électrons sont engagés dans des liaisons chimiques et ne peuvent participer à la conduction électrique. On suppose que lorsque l'on dope Ge par Sb, à raison de $n_{\mathrm{S}b}$ atomes de Sb par unité de volume, à la température ambiante, chaque atome Sb "libère" un électron du réseau cristallin. On mesure la résistivité $\rho = 1{,}22 \times 10^{-2}$ Ω.m pour un échantillon de « concentration » $n_{\mathrm{S}b} = 1{,}6 \times 10^{21}$ m^{-3}. On donne la masse atomique de Ge : M = 72,6 g.mol^{-1} et la masse volumique de Ge : $\mu = 5{,}32 \times 10^3$ kg.m^{-3}.

   (a) Calculer le nombre $n_{\mathrm{G}e}$ d'atomes de germanium par m^3 d'échantillon. En déduire le taux d'atomes d'antimoine : $n_{\mathrm{S}b}/n_{\mathrm{G}e}$. Conclusion ?

   (b) Calculer τ dans le modèle utilisé. Conclusion ?

III.2 Mouvement dans des champs électrique et magnétique

On étudie maintenant le mouvement d'un électron dans une région de l'espace où sont superposés un champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}_0} = \mathrm{E}_0\overrightarrow{u_x}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \mathrm{B}_0\overrightarrow{u_z}$ (E_0 et B_0 sont positifs). La particule est émise à l'instant $t = 0$ en O, sans vitesse initiale. On néglige les effets de la force de frottement.

On pose $\omega = \dfrac{e\mathrm{B}_0}{m}$ et $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

6. Ecrire les équations différentielles du mouvement de l'électron.
7. En déduire les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Représenter la trajectoire de la particule. Montrer que l'étude du mouvement peut être limitée à l'intervalle de temps $[0, \mathrm{T}]$, en déduire la périodicité spatiale du mouvement.
8. On définit la vitesse de dérive de l'électron par $\overrightarrow{v_\mathrm{D}} = \langle\overrightarrow{v}\rangle = \dfrac{1}{k\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{k\mathrm{T}}\overrightarrow{v}(t)\,\mathrm{d}t$ (k entier). Montrer que $\overrightarrow{v_\mathrm{D}} = -\dfrac{\mathrm{E}_0}{\mathrm{B}_0}\overrightarrow{u_y}$.

III.3 Conduction électrique en présence des champs électrique et magnétique

On s'intéresse maintenant à la conduction électrique de l'échantillon de Ge :Sb, étudié précédemment, les valeurs numériques pour ρ_{el}, n, ...sont celles du paragraphe III.1. On se replace dans le cadre du modèle décrit au paragraphe I avec à nouveau une force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{\mathrm{F}}_{frottement} = -\alpha\overrightarrow{v}$.

On découpe Ge :Sb sous forme d'un ruban de longueur $L = 20$ mm parallèle à l'axe Ox, de section rectangulaire de largeur $\ell = 1$ mm parallèle à l'axe Oy et d'épaisseur $d = 0{,}2$ mm parallèle à Oz. Un générateur de courant délivrant un courant d'intensité constante I_0 disposé en série avec l'échantillon crée un champ électrique uniforme

9. Montrer que $E_0 = \dfrac{\rho_{el} I_0}{\ell d}$ (on pourra réutiliser tous les résultats donnés dans la première partie).
10. On place l'échantillon, toujours alimenté par le générateur de courant et donc parcouru par I_0, dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ constant et colinéaire à l'axe Oz.
    (a) Montrer **qualitativement** que la vitesse de dérive des électrons libres (§ III.2) entraîne l'apparition d'une distribution de charges sur les bords du matériau. Cette distribution crée alors un champ électrique $\overrightarrow{E_1} = E_1 \overrightarrow{u_y}$ considéré comme uniforme et colinéaire à l'axe Oy.
    (b) En **régime stationnaire (ou permanent)**, les conditions aux limites du matériau imposent que la vitesse des électrons de conduction soit colinéaire à l'axe Ox. Ecrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron libre. En déduire l'expression du champ $\overrightarrow{E_1}$ en fonction de B_0, E_0, e et α puis en fonction de B_0, I_0, n, e, ℓ et d.
    (c) Application numérique : Calculer la différence de potentiel V_1 (donnée par $V_1 = -E_1 \ell$) que l'on peut mesurer entre les deux bords de l'échantillon de part et d'autre de sa largeur -voir figure- pour $I_0 = 10$ mA et $B_0 = 0{,}1$ T. Quelle application voyez-vous au phénomène étudié ?