

DEVOIR SURVEILLÉ n°9
Correction

Problème I : expérience de Fizeau

1- $\boxed{\omega = 2\pi.f}$ A.N. : $\omega = 2\pi.6,88.10^{14} = 4,32.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

$\boxed{\lambda = c.T = \frac{c}{f}}$ A.N. : $\lambda = \frac{3.10^8}{6,88.10^{14}} = 436.10^{-9} \text{ m}$

2- La symétrie de la figure 2 par rapport à l'axe (SO) assure que les temps de parcours sur les trajets SS₁O et SS₂O : les deux ondes qui se superposent en O sont donc en phase. **On a donc des interférences constructives en O et une intensité maximale**

3a- Sur le trajet SS₁O le temps de trajet dans le tube sur la longueur ℓ est $t_{\text{sup}} = \frac{\ell}{c} = n \frac{\ell}{c_0}$

Sur le trajet SS₂O le temps de trajet correspondant est $t_{\text{inf}} = \frac{\ell}{c_0}$

La différence des temps de trajets sur les deux trajets est donc $\Delta t = t_{\text{sup}} - t_{\text{inf}} = (n-1) \frac{\ell}{c_0}$

Il s'en suit que le déphasage des ondes se superposant en O est $\boxed{\varphi = \omega \Delta t = \frac{\omega(n-1)\ell}{c_0}}$

3b- COURS : On peut supposer que les deux ondes se superposant en O on la même amplitude (cela suppose que les parois du tube et le milieu d'indice n sont non absorbants).

On a alors : $\boxed{A_{\text{tot}}^2 = A_0^2 + A_0^2 + 2A_0A_0 \cos(\varphi) = 2A_0^2(1 + \cos(\varphi))}$

4a- Le temps de parcours de la lumière dans le tube sera plus cours ; le milieu de propagation se déplaçant dans le référentiel d'étude. **Le déphasage variera donc et l'intensité de la lumière en O sera plus faible.**

4b- La vitesse de propagation de la lumière dans le milieu est $c = \frac{c_0}{n}$

La vitesse d'entraînement du fluide dans le référentiel du laboratoire est u

Dans le cadre de la cinématique classique, la vitesse de propagation de la lumière dans le référentiel du laboratoire est $c + u = \frac{c_0}{n} + u$

Le temps de parcours dans le tube est maintenant $t_{\text{sup}} = \frac{\ell}{\frac{c_0}{n} + u} = n \frac{\ell}{c_0 + nu}$

La différence des temps de trajets sur les deux trajets est maintenant

$$\Delta t = t_{\text{sup}} - t_{\text{inf}} = n \frac{\ell}{c_0 + nu} - \frac{\ell}{c_0} = \frac{\ell}{c_0} \left(n \frac{1}{1 + \frac{nu}{c_0}} - 1 \right) \quad \text{avec } n \frac{u}{c_0} \ll 1, \text{ on pourra alors utiliser}$$

le développement limité de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\left(f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \right)$ au premier ordre au voisinage

$$\text{de } 0 : f(x) = f(0) + x.f'(0) + x.\varepsilon(x) = 1 - x + x.\varepsilon(x)$$

$$\text{Soit au premier ordre : } \frac{1}{1 + \frac{nu}{c_0}} = 1 - \frac{nu}{c_0}$$

$$\Delta t = \frac{\ell}{c_0} \left(n \frac{1}{1 + \frac{nu}{c_0}} - 1 \right) = \frac{\ell}{c_0} \left(n \left(1 - \frac{nu}{c_0} \right) - 1 \right)$$

$$\text{Le déphasage correspondant sera donc } \boxed{\varphi = \omega \Delta t = \omega \frac{\ell}{c_0} \left(n \left(1 - \frac{nu}{c_0} \right) - 1 \right) = \frac{\omega \ell}{c_0} \left(n - 1 - \frac{u}{c_0} n^2 \right)}$$

5- On s'intéresse maintenant au montage complet (figure 1).

5a- Les temps de trajet sont modifiés sur les deux voies : $t_{\text{sup}} = n \frac{\ell}{c_0} \frac{1}{1 + \frac{nu}{c_0}}$ et $t_{\text{inf}} = n \frac{\ell}{c_0} \frac{1}{1 - \frac{nu}{c_0}}$

$$\Delta t = t_{\text{sup}} - t_{\text{inf}} = n \frac{\ell}{c_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{nu}{c_0}} - \frac{1}{1 - \frac{nu}{c_0}} \right) = n \frac{\ell}{c_0} \left(\left(1 - \frac{nu}{c_0} \right) - \left(1 + \frac{nu}{c_0} \right) \right) = -2 \frac{n^2 u}{c_0^2} \ell$$

$$\text{Le déphasage correspondant sera donc } \boxed{\Delta \varphi = \omega \Delta t = -2 \omega \frac{n^2 u}{c_0^2} \ell}$$

Remarque le signe « moins » qui apparaît ici est simplement lié au fait que l'on mesure le déphasage du signal passant par la voie SS₁O par rapport au signal passant par SS₂O

5b- L'intérêt de placer un tube sur chaque voie est double :

- 1- Cela permet de compenser le terme indépendant de u
- 2- Cela permet de doubler cette effet.

5c- Pour avoir une frange sombre en O il faut que le déphasage soit congru à π (module 2π) :

$$\text{soit } 2\omega \frac{n^2 u}{c_0^2} \ell = (2k+1)\pi \text{ ou } u = (2k+1) \frac{\pi c_0^2}{2\omega n^2 \ell} = \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_0^2}{2f n^2 \ell} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{La plus faible de } u \text{ pour avoir une frange sombre est donc : } \boxed{u_{\text{min}} = \frac{1}{4} \frac{c_0^2}{f n^2 \ell}}$$

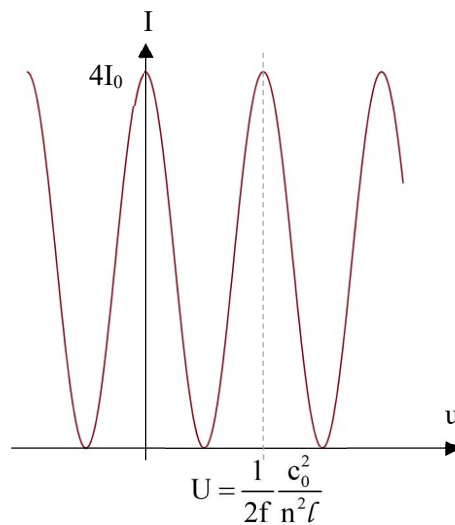
$$\text{A.N. : } u_{\text{min}} = \frac{1}{4} \frac{(3.10^8)^2}{6,88.10^{14}.1,70^2.1,80} = \frac{1}{4} \frac{9}{6,88.1,70^2.1,80} . 10^2 = 6,3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$5d- \Delta p = \frac{2\omega n^2 u}{2\pi c_0^2} \ell = 2f \frac{n^2 u}{c_0^2} \ell$$

$$\Delta p = 2 \frac{\omega n^2 u}{2\pi c_0^2} \ell = 2.6,88.10^{14} \frac{1,70^2.7}{(3.10^8)^2} 1.80 = 2.6,88 \frac{1,70^2.7}{9.10^2} 1.80 = 0,56$$

$$5e- A_{\text{tot}}^2 = 2A_0^2 (1 + \cos(\varphi)) \text{ donc } I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(2\omega \frac{n^2 \ell}{c_0^2} u \right) \right) \text{ fonction périodique de période :}$$

$$U = \frac{2\pi c_0^2}{2\omega n^2 \ell} = \frac{1}{2f} \frac{c_0^2}{n^2 \ell} \quad \text{A.N.: } U = \frac{1}{2.6,88.10^{14}} \frac{(3.10^8)^2}{1,70^2.1,80} = \frac{1}{6,88} \frac{9}{1,70^2.1,80} 10^2 = 12,6 \text{ m.s}^{-1}$$



$$6- \text{ On utilisera la première relation : } v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + \beta_e \frac{v'_x}{c_0}} \text{ avec } v_e = \pm u ; \beta_e = \pm \frac{u}{c} \text{ et } v'_x = \frac{c_0}{n}$$

Pour le tube du haut :

$$v_x = \frac{\frac{c_0}{n} + u}{1 + \frac{u}{c_0} \frac{1}{n}} = \frac{c_0}{n} \frac{1 + n \frac{u}{c_0}}{1 + \frac{u}{c_0} \frac{1}{n}} = \frac{c_0}{n} \left(1 + n \frac{u}{c_0} \right) \left(1 - \frac{u}{c_0} \frac{1}{n} + o \left(\frac{u}{c_0} \right) \right) = \frac{c_0}{n} \left(1 + \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0} + o \left(\frac{u}{c_0} \right) \right)$$

$$\text{Pour celui du bas : } v_x = \frac{\frac{c_0}{n} - u}{1 - \frac{u}{c_0} \frac{1}{n}} = \frac{c_0}{n} \left(1 - \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0} + o \left(\frac{u}{c_0} \right) \right)$$

En reprenant le raisonnement de la question 5a- on obtient :

$$\Delta t = t_{\text{sup}} - t_{\text{inf}} = n \frac{\ell}{c_0} \left(\frac{1}{1 + \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0}} - \frac{1}{1 - \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0}} \right)$$

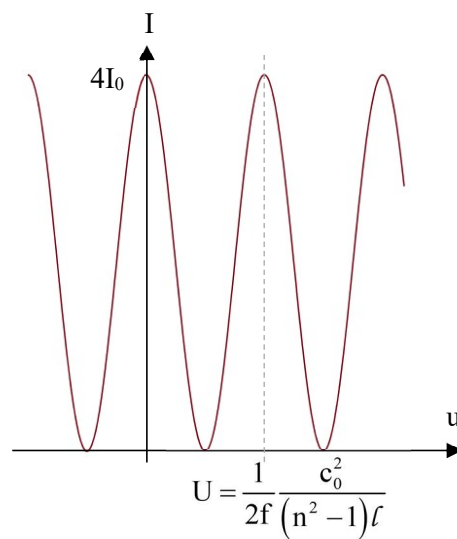
$$= n \frac{\ell}{c_0} \left(\left(1 - \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0} \right) - \left(1 + \left(n - \frac{1}{n} \right) \frac{u}{c_0} \right) \right) = -2 \frac{u}{c_0^2} \ell (n^2 - 1)$$

Le déphasage correspondant sera donc $\Delta\varphi = \omega\Delta t = -2\omega \frac{u}{c_0^2} \ell (n^2 - 1)$

$A_{\text{tot}}^2 = 2A_0^2 (1 + \cos(\varphi))$ donc $I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\omega \frac{2\ell u}{c_0^2} (n^2 - 1) \right) \right)$ fonction périodique de

période : $U = \frac{2\pi}{2\omega} \frac{c_0^2}{(n^2 - 1)\ell} = \frac{1}{2f} \frac{c_0^2}{(n^2 - 1)\ell}$

A.N.: $U = \frac{1}{2.6,88.10^{14}} \frac{(3.10^8)^2}{(1,70^2 - 1).1,80} = \frac{1}{6,88} \frac{9}{(1,70^2 - 1).1,80} 10^2 = 19,3 \text{ m.s}^{-1}$



Problème 2

A- Moment cinétique - énergie - vecteur excentricité

1- Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique le **principe d'inertie** : c'est-à-dire un référentiel dans lequel un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme (ou au repos)

2- Théorème du moment cinétique en O, centre de force (O fixe dans R galiléen) :

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_R = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r = \vec{0} \quad \vec{L}_O = L_o \vec{u}_z \text{ vecteur constant de R.}$$

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m.\vec{v} = L_o \vec{u}_z \quad \forall t \quad \vec{OM} \text{ vecteur position est orthogonal à } \vec{u}_z \text{ vecteur fixe de R.}$$

Le point M est donc contenu dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$ (ou à $\vec{L}_O$) passant par O :

mouvement plan.

Dans le plan du mouvement, la position du mobile étant repérée par ses coordonnées polaires

$$(r, \theta) : \vec{OM} = r\vec{u}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = L_o \vec{u}_z$$

On en déduit $\boxed{r^2 \dot{\theta} = \frac{L_o}{m} = \text{cst}}$ désignée par constante des aires.

$$3- -\delta W = -\vec{F}.d\vec{OM} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r.d(r\vec{u}_r) = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r.(\vec{u}_r.dr + r.d\vec{u}_r) = \frac{k}{r^2}dr \quad \text{car } \vec{u}_r.d(\vec{u}_r) = 0 \quad \|\vec{u}_r\| = 1$$

$$\text{Ainsi } -\delta W = d\left(-\frac{k}{r}\right)$$

La force newtonienne est conservative :

$$E_p = -\frac{k}{r} + E_o = -\frac{k}{r} \quad \text{ayant fait le choix } E_p = 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty.$$

L'énergie mécanique est donc constante, le système n'étant soumis qu'à des forces

$$\text{conservatives } \boxed{E_m = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{k}{r} = \text{cste}}$$

4a- Si $\vec{e}$ est un vecteur constant de R, sa dérivée par rapport à t dans R doit être nulle $\forall t$.

$$\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L_o}{k}.\vec{v} \quad \left(\frac{d\vec{e}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right)_R - \frac{L_o}{k} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R \quad \text{car } L_o = \text{cste}$$

$$\left(\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right)_R = -\dot{\theta}\vec{u}_r \quad \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m.r^2}\vec{u}_r$$

$$\text{D'après 2- } m.r^2 \dot{\theta} = L_o \quad \left(\frac{d\vec{e}}{dt} \right)_R = -\dot{\theta}.\vec{u}_r + \frac{m.r^2.\dot{\theta}}{k}.\frac{k}{m.r^2}.\vec{u}_r = \vec{0}$$

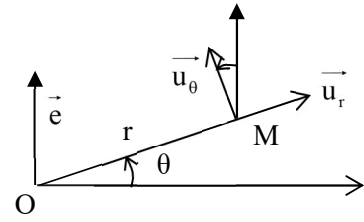
$$\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L_o}{k}.\vec{v} \quad \text{est donc une constante du mouvement de M dans R.}$$

4b- L'axe polaire est choisit tel que $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$: l'axe polaire

est orthogonal au vecteur $\vec{e}$, vecteur lié à R.

En effectuant le produit scalaire :

$$\vec{e} \cdot \vec{u}_\theta = e \cdot \cos(\theta) = \left(\vec{u}_\theta - \frac{L_o}{k} \vec{v} \right) \cdot \vec{u}_\theta = 1 - \frac{L_o}{k} \cdot r \cdot \dot{\theta} = 1 - \frac{L_o^2}{k \cdot m \cdot r}$$



d'après 2-

$$\text{On en déduit : } r \cdot (1 - e \cdot \cos(\theta)) = \frac{L_o^2}{k \cdot m} = p$$

$$\text{Soit } \boxed{r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos(\theta)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{p = \frac{L_o^2}{k \cdot m}}$$

Remarques : 1- $[p] = L$ p homogène à une longueur

2- p est bien positif car k est positif.

L'équation obtenue est, en coordonnées polaires, l'équation d'une conique dont un des foyers est le centre de force O.

La trajectoire est une branche d'hyperbole si $e > 1$, une parabole si $e = 1$ et une ellipse si $0 \leq e < 1$ (cercle si $e = 0$).

p représente le paramètre de la conique.

$$4c- \vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L_o}{k} \vec{v}$$

$$\text{Donc } e^2 = 1 + \frac{L_o^2}{k^2} v^2 - 2 \frac{L_o}{k} \cdot \vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = 1 + \frac{L_o^2}{k^2} v^2 - 2 \frac{L_o}{k} \cdot r \dot{\theta} = 1 + 2 \frac{L_o^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{k}{L_o} \cdot \frac{C}{r} \right)$$

$$e^2 = 1 + 2 \frac{L_o^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{r} \right)$$

$$\boxed{e^2 = 1 + 2 \frac{L_o^2}{m k^2} E_m}$$

On retrouve que si $E_m < 0$; $e^2 < 1$; la trajectoire est elliptique

Si $E_m = 0$; $e^2 = 1$; la trajectoire est parabolique

Si $E_m > 0$; $e^2 > 1$; la trajectoire est hyperbolique

B- Satellites terrestres

1- La trajectoire du satellite est un cercle de centre O. Il apparaît clairement sur le document que le plan de l'orbite de GOCE n'est pas équatorial mais au contraire très incliné par rapport à ce plan.

Sur l'axe équatorial, l'écart entre 2 traces consécutives correspond à une période. On compte

$$\text{environ 16 périodes sur 24 heures. Soit une période : } \boxed{T = \frac{24.3600}{16} = 5400 \text{ s} = 1 \text{ h } 30 \text{ min}}$$

2- On utilisera la 2^{ème} loi de Newton pour retrouver les résultats propres à la trajectoire circulaire :

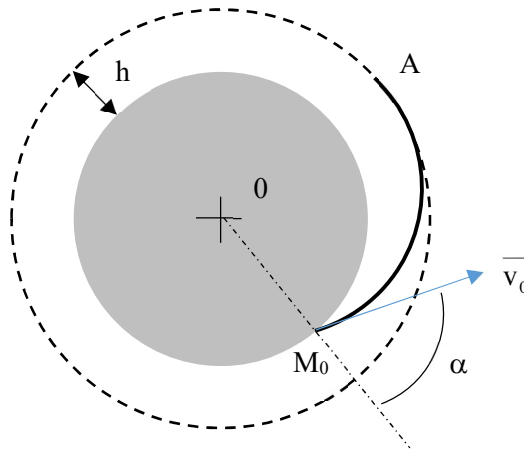
$$m\vec{a} = m \left(-r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r$$

On obtient donc $\dot{\theta} = \text{cst} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} = \frac{2\pi}{T}$ et $r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$

AN : $r = \left(\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 5400^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,66 \cdot 10^6 \text{ m}$ $h = r - R = 2,60 \cdot 10^5 \text{ m} = 260 \text{ km}$

Cette valeur est cohérente avec l'altitude donnée dans le texte $h = 270 \text{ km}$. Cette altitude est très faible.

Lors du lancement du satellite depuis un point M_0 à la surface de la Terre, on communique au lanceur une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec $\vec{u}_r$ (cf schéma ci-dessous). On souhaite que la trajectoire M_0A amène le satellite au point A de l'orbite circulaire souhaitée (d'altitude h) avec une vitesse en A ayant la même orientation que sur l'orbite circulaire.



- 3- En A la direction de la vitesse sur l'orbite de transfert est suivant $\vec{e}_\theta$ comme sur l'orbite circulaire. Donc $\dot{r} = 0$. En A le rayon est extrémal. A ne peut être le périhélie de la trajectoire de transfert ; **il s'agit donc de son apogée** et la trajectoire est donc **elliptique**

4- $\vec{L}_0(M, t=0) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0 = mRv_0 \sin \alpha \vec{e}_z$

- 5- Pour que le système atteigne le point A, on doit avoir : (conservation de l'énergie mécanique)

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{r_A}$$

Pour que la vitesse en A ait la bonne direction, on doit avoir : (conservation du moment cinétique) : $Rv_0 \sin \alpha = r_A v_A$

$$\text{Ainsi } \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = \frac{1}{2}m\left(v_0 \sin \alpha \frac{R}{r_A}\right)^2 - G\frac{mM}{r_A}$$

$$\text{Soit } v_0^2 = 2GM \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A}}{1 - \left(\sin \alpha \frac{R}{r_A}\right)^2}.$$

6- Dans le cas où $\alpha = 0$, $\vec{L}_0(M, t=0) = \vec{0}$; le mouvement sera **rectiligne**.

$$\text{Vitesse initiale à communiquer } v_0^2 = 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\text{Vitesse en A : } v_A'^2 = v_0^2 - 2G\frac{M}{R} + 2G\frac{M}{r_A} = 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A} \right) - 2G\frac{M}{R} + 2G\frac{M}{r_A} = 0$$

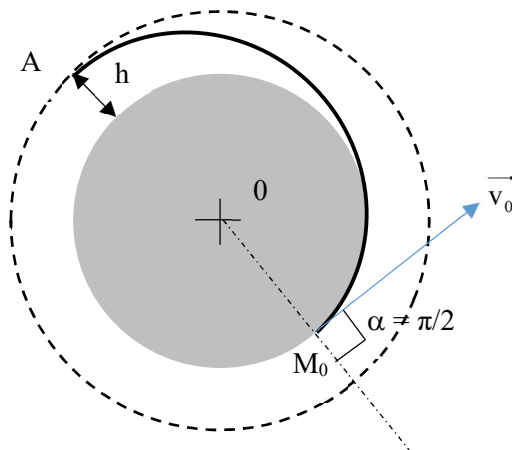
(logique, la vitesse étant toujours colinéaire à $\vec{e}_r$ la seule façon d'avoir en A une vitesse colinéaire à $\vec{e}_0$ est d'avoir une vitesse nulle)

$$\text{Energie à communiquer en A } \Delta E_m = E_{m,\text{circulaire}} - E_{m,\text{transfert}} = \frac{1}{2}mv_A'^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r_A}$$

7- Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la relation obtenue à la question 5- devient $v_0^2 = 2GM \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A}}{1 - \left(\frac{R}{r_A}\right)^2}.$

$$\text{Soit } v_0 = \sqrt{2GM \frac{r_A}{R} \cdot \frac{1}{r_A + R}}$$

8- On a alors en M_0 et A la vitesse orthogonale au rayon $\vec{OM}$: les points M_0 et A sont donc respectivement le **périgée et l'apogée de l'ellipse de transfert**.



$$\text{Energie mécanique : } E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R} = GmM \frac{r_A}{R} \cdot \frac{1}{r_A + R} - G\frac{mM}{R}$$

$$E_m = -G \frac{mM}{R} \left(1 - \frac{r_A}{r_A + R} \right) = -G \frac{mM}{r_A + R}$$

On retrouve la relation caractéristique des orbite elliptique $E_m = -G \frac{mM}{2a}$; M_0 et A étant le périégée et l'apogée de la trajectoire de transfert $2a = r_A + R$ est le grand axe de l'ellipse

9- Durée de transfert : une demie période de l'orbite elliptique de transfert

Or la relation trouvée à la question 2 se généralise au cas des orbites elliptiques :

$$\Delta T = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{GM}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(R + \frac{h}{2}\right)^3 \frac{4\pi^2}{GM}}$$

$$AN : \Delta T = \frac{1}{2} \sqrt{\left(6400 + \frac{270}{2}\right)^3 \cdot 10^9 \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} = 2,6 \cdot 10^3 \text{ s} = \underline{44 \text{ min}}$$

L'orbite de transfert est proche d'une orbite circulaire (car h est faible devant R ; il est normale de trouver une durée proche d'une période de l'orbite circulaire.

10- $E_m = -G \frac{mM}{r_A + R} = \frac{1}{2} m v_A'^2 - G \frac{mM}{r_A}$ soit

$$v_A'^2 = 2GM \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A + R} \right) = 2GM \frac{R}{r_A (r_A + R)} = 2GM \frac{R}{(R + h)(2R + h)} \approx \frac{GM}{R} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{R} \right)$$

Donc à l'ordre 1 en $\frac{h}{R}$: $v_A' = \sqrt{\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{h}{R} \right)}$

(sans approximation) $v_A' = \sqrt{\frac{GM}{R} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(1 + \frac{h}{2R}\right)}}$

$$\text{Energie à fournir en A : } \Delta E_m = \frac{1}{2} m (v_A^2 - v_A'^2) = \frac{GmM}{2R} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right) \left(1 + \frac{h}{2R}\right)} \right)$$

En faisant le développement limité à l'ordre 1 : $\Delta E_m = \frac{3}{4} \frac{GmM}{R} \frac{h}{R}$

$$AN : v_A' = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{270}{3400} \right)} = 6,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\frac{\Delta E_m}{m} = \frac{3}{4} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6} \frac{270}{3400} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$$

C- chez le Petit Prince

On souhaite déterminer le rayon de la planète qui permet à un être (humain ?) de se libérer de l'attraction gravitationnelle de cette planète simplement en sautant. L'énergie qu'il doit avoir lors d'un saut doit lui permettre d'être dans un état de diffusion (l'étude sera menée dans le référentiel planétocentrique considéré galiléen)

$$E_m = E_c + E_p \geq 0$$

$$\bullet E_p = -G \frac{M_p m}{R_p}$$

M_p masse de la planète
 R_p rayon de la planète
 m masse du Petit Prince

- E_c est l'énergie cinétique initiale (résulte du travail des forces internes au corps du Petit Prince)

Si on estime les capacités du Petit Prince à celles d'un humain, on peut évaluer l'énergie initiale en étudiant un saut d'un humain sur terre. Un humain peut faire environ un bond d'une hauteur $h \approx 1\text{m}$ sur Terre :

$E_c = mgh$ où g est le champ de pesanteur à la surface de la Terre, que l'on peut approximer par le champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre

$$mg = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

$$\text{On a donc } E_m = -G \frac{M_p m}{R_p} + G \frac{mM_T}{R_T^2} h \geq 0 \quad \text{soit } -\frac{M_p}{R_p} + \frac{M_T}{R_T^2} h \geq 0$$

Si on considère la planète du petit prince tellurique de même masse volumique que la Terre (toutes les planètes telluriques, toutes les matières condensées, ont des masses volumiques voisines)

$$M_T = \rho \frac{4}{3} \pi R_T^3$$

$$M_p = \rho \frac{4}{3} \pi R_p^3$$

$$\text{On a donc } -\frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_p^3}{R_p} + \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_T^3}{R_T^2} h \geq 0 \quad \text{soit } -R_p^2 + R_T h \geq 0$$

$$\text{Soit } \boxed{R_p \leq \sqrt{R_T h}} \quad \text{AN : } \boxed{R_p \leq \sqrt{6.10^6 \cdot 1} \approx 2449 \text{ m} = 2.45 \text{ km}}$$

Remarque : une telle planète, si petite, à la vitesse de libération si faible n'aura pas d'atmosphère ou alors il faudrait que la température sur cette planète soit très faible pour que les molécules de son atmosphère aient une vitesse inférieure à la vitesse de libération