DEVOIR SURVEILLÉ n°9
Samedi 22 avil 2023 – Durée 4h

L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ou non encadrée ne sera pas considérée. Les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1 : expérience de Fizeau

On considère le dispositif de Fizeau schématisé ci-dessous sur la figure 1 (il n'est pas nécessaire de savoir tracer les rayons lumineux ; ils sont indiqués sur les dessins ci-dessous) :

- S source placée au foyer de L_1 émettant une onde lumineuse sinusoïdal de fréquence $f = 6,88.10^{14}$ Hz
- L_1, L_2 deux lentilles minces convergentes de même axe optique (ou axe de symétrie) SO.
- S_1, S_2 trous d'Young.
- T_1, T_2, tubes de même longueur $\ell = 1,80\text{m}$ et d'axe parallèle à l'axe de L_1 et L_2 contenant un même liquide (sulfure de carbone) d'indice n = 1,70 ; l'indice du milieu étant défini par la relation : $n = \frac{c_0}{c}$ où c est la célérité de la lumière dans le milieu considéré et $c_0 = 3,0.10^8\,\text{m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

Les liquides dans T_1 et T_2 sont mis en mouvement aux vitesses respectives $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ constantes et réglables parallèlement à l'axe optique.

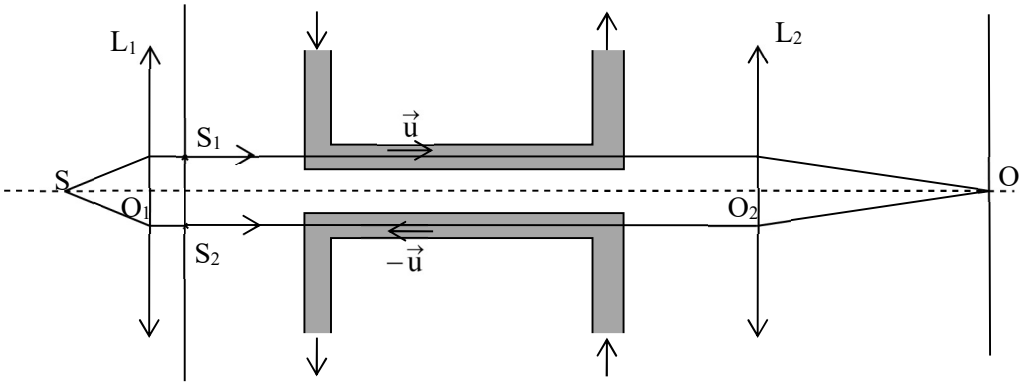


Figure 1 : schéma général du dispositif de Fizeau

1- Déterminer la pulsation et la longueur d'onde (dans le vide) de la lumière émise par la source.
2- On enlève les deux cuves (figure 2).

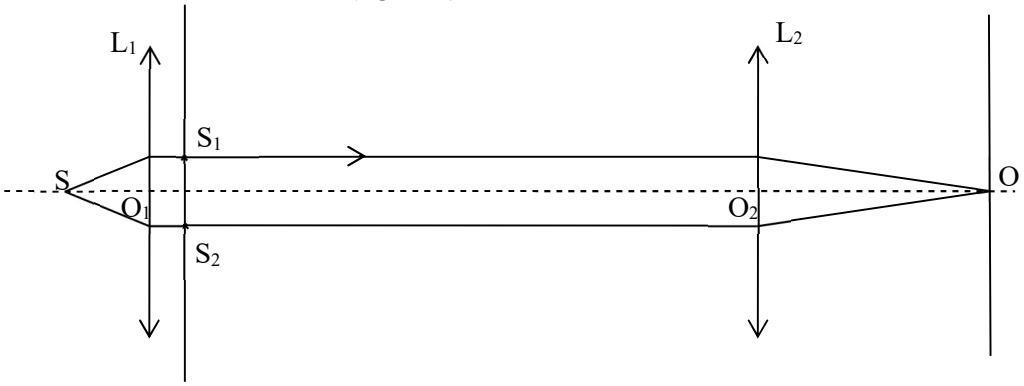


Figure 2

Qu'observe-t-on en O ?

3- On ajoute uniquement sur la voie 1 une cuve contenant le liquide d'indice n = 1,70 au repos dans le référentiel du laboratoire (figure 3).

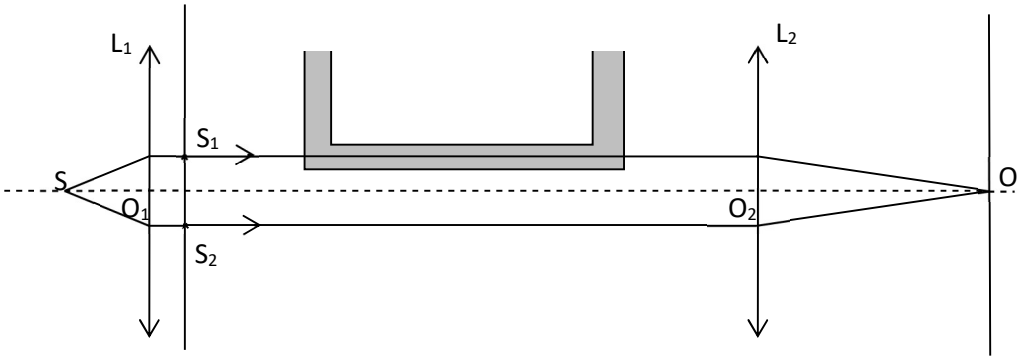


Figure 3

3a- Montrer que le déphasage des ondes se superposant en O est $\varphi = \dfrac{\omega(n-1)\ell}{c_0}$

3b- Déterminer l'amplitude de l'onde résultant en O.

4- On met maintenant en mouvement le fluide de la gauche vers la droite (comme indiqué sur le schéma 2)

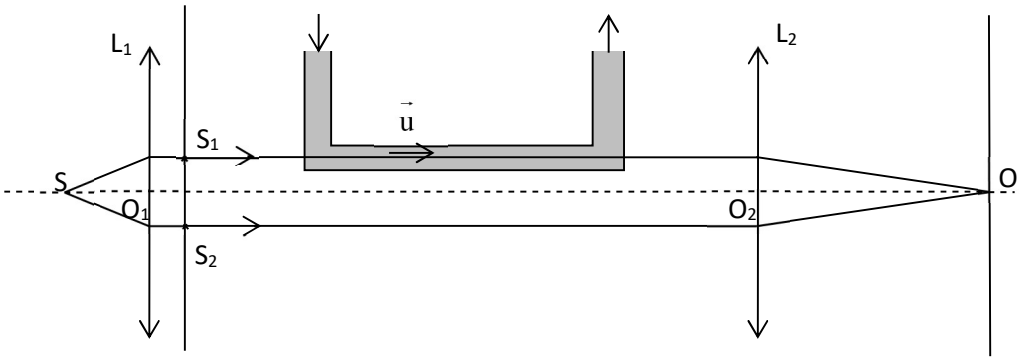


Figure 4

4a- Pourquoi cela va-t-il modifier l'intensité mesurée en O ?

4b- On se place dans le cadre des lois de la cinématique classique. Montrer que le déphasage des ondes se superposant en O peut s'approximer par l'expression suivante :

$\varphi = \dfrac{\omega\ell}{c_0}\left(n - 1 - \dfrac{u}{c_0}n^2\right)$ (on utilisera le fait que $\dfrac{u}{c_0} \ll 1$)

5- On s'intéresse maintenant au montage complet (figure 1).

5a- Donner l'expression du déphasage des ondes se superposant en O.

5b- Quel est l'intérêt de placer un tube sur chacune des deux voies ?

5c- Calculer la valeur minimale $u = u_0$ de la vitesse du liquide pour observer une frange sombre en O

5d- Calculer la variation $\Delta p = \dfrac{\varphi}{2\pi}$ de l'ordre d'interférence en O lorsqu'à partir du repos on met les liquides en mouvement en vitesses égales et opposées de 7 $m.s^{-1}$.

5e- Comment varie l'intensité en O lorsqu'on fait varier la vitesse u ?
Tracer le graphique I(u)
On rappelle que l'intensité est proportionnelle à l'amplitude de l'onde au carré.

6- On se place dans le cadre des lois de la cinématique relativiste.
Loi de composition des vitesses est alors

$$v_x = \frac{v'_x + v_e}{1+\beta_e \frac{v'_x}{c_0}} \qquad v_y = \frac{v'_y}{1+\beta_e \frac{v'_x}{c_0}} \qquad v_z = \frac{v'_z}{1+\beta_e \frac{v'_x}{c_0}} \qquad \text{avec} \qquad \beta_e = \frac{v_e}{c_0}$$

Déterminer la nouvelle expression du déphasage en fonction de la vitesse u. Tracer le nouveau graphique I(u).
Les résultats de l'expérience ont confirmé les lois de la cinématique relativiste.

Problème 2

Un point matériel M, de masse m, est soumis à une force centrale newtonienne attractive de centre O fixe dans le référentiel d'étude R galiléen : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}.\vec{u_r}$ avec k constante positive et $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u_r}$.
Les grandeurs cinématiques et dynamiques, associées au mouvement de M dans R sont notées :
$\vec{v}$ pour $\vec{v}(M/R)$, $\vec{L_O}$ pour $\vec{L_O}(M/R)$ moment cinétique en O de M dans R etc.....
Les parties A, B et C sont indépendantes

A- Moment cinétique - énergie - vecteur excentricité

1- Quelle est la définition d'un référentiel galiléen ?
2- Montrer que le mouvement est plan et qu'il vérifie « la loi des aires » (on pourra se contenter de montrer que la constante dite « des aires » est effectivement une constante)
3- Montrer que l'énergie est une constante du mouvement. Donner son expression (on prendra l'énergie potentielle nulle pour $r \to \infty$).
4- Soit le vecteur excentricité défini par : $\vec{e} = \vec{u_\theta} - \frac{L_o}{k}.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans R ;

$\vec{u_z} = \frac{\vec{L_0}}{\|\vec{L_0}\|}$ et $\vec{u_\theta}$ le vecteur unitaire orthoradial de la base de coordonnées cylindriques $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$;

Remarque: $\vec{e}$ n'est pas un vecteur unitaire, contrairement aux vecteurs $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}$ introduits précédemment.

4a- Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est une constante du mouvement.

4b- On choisit l'origine de l'angle polaire θ (c'est à dire l'axe polaire) pour avoir $\theta=\left(\vec{e},\overrightarrow{u_\theta}\right)$.

Montrer, en considérant le produit scalaire $\vec{e}.\overrightarrow{u_\theta}$, que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme :

$r(\theta)=\dfrac{p}{1-e.\cos(\theta)}$ où e est la norme du vecteur $\vec{e}$.

En déduire, selon les valeurs de e, la nature de la trajectoire.
Esquisser les différentes trajectoires.
Exprimer p en fonction de L_o, k et m.

4c- Montrer que $e^2=1+\dfrac{2L_0^2}{mk^2}E_m$ où E_m est l'énergie mécanique du point M. Commenter cette relation.

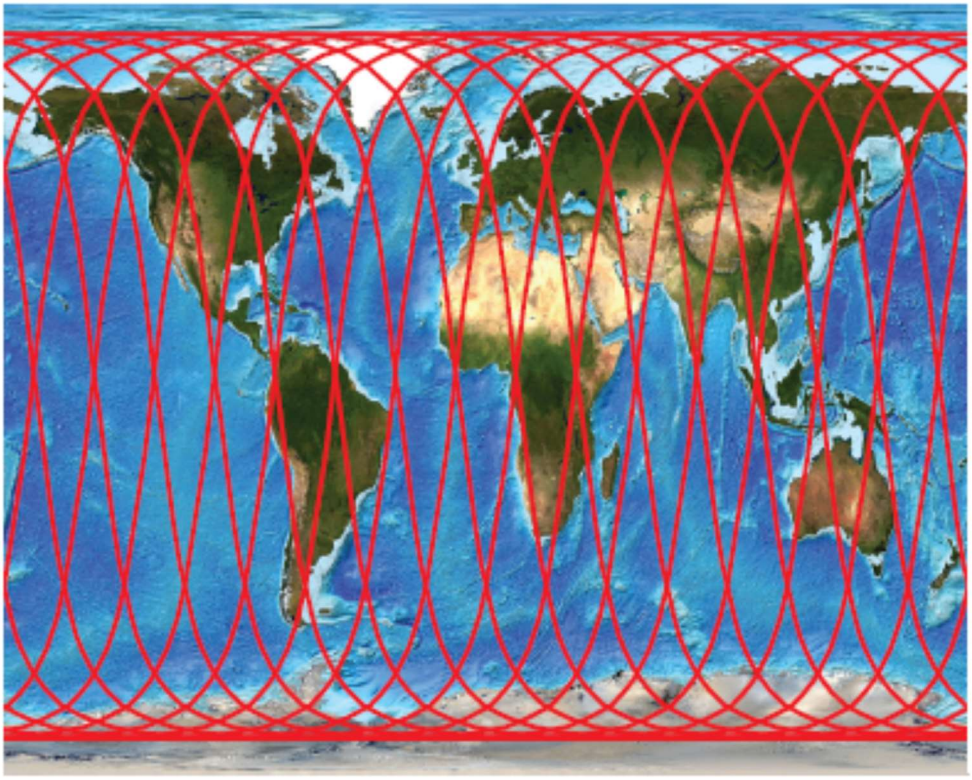
B- Satellites terrestres : étude du satellite GOCE

Le satellite GOCE, assimilé à un point matériel M de masse m est soumis à l'interaction gravitationnelle de la Terre.
La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon R = 6400 km et de masse M = 6.10^{24} kg, sa répartition de matière possédant la symétrie sphérique de centre O.
On désigne par G la constante gravitationnelle, G = $6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$.
L'étude est faite dans le référentiel géocentrique $R_{géo}$ considéré galiléen.

On pose $\overrightarrow{OM}=r.\overrightarrow{u_r}$ ($r \geq R$).

On néglige l'attraction gravitationnelle exercée par tous les astres autres que la Terre.

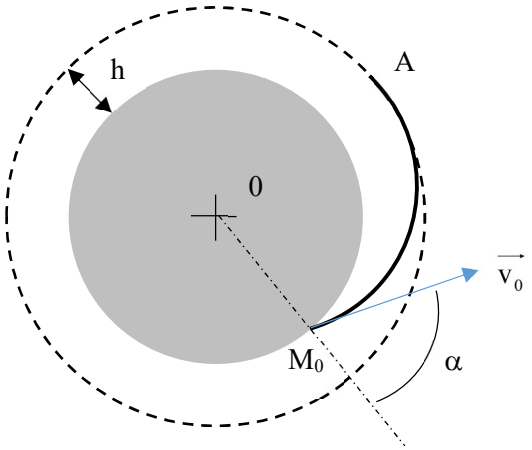
Le document ci-dessous représente la projection de la trajectoire **circulaire** du satellite GOCE sur le planisphère de la Terre **pendant une journée.**



1- Décrire la trajectoire du satellite autour de la Terre (dans le référentiel géocentrique) et déterminer la période de rotation T du satellite.

2- En déduire le rayon et l'altitude h de l'orbite circulaire du satellite (résultat à redémontrer)
On prendra dans la suite $h = 270\,km$

Lors du lancement du satellite depuis un point M_0 à la surface de la Terre, on communique au lanceur une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec $\overrightarrow{u_r}$ (cf schéma ci-dessous). On souhaite que la trajectoire M_0A amène le satellite au point A de l'orbite circulaire souhaitée (d'altitude h) avec une vitesse en A ayant la même orientation que sur l'orbite circulaire. Il suffira donc ensuite de modifier en A la vitesse du satellite (au moyen de petits moteurs intégrés au satellite) pour modifier la norme de la vitesse de façon à la placer sur l'orbite circulaire.



3- Quelle est la nature de la trajectoire M_0A. Que représente le point A pour cette trajectoire (à justifier) ?

4- Quelle est la valeur du moment cinétique initiale du satellite en O : $\overrightarrow{L_0}(M, t=0)$?

5- Déterminer la relation que doivent vérifier $v_0 = \left\|\overrightarrow{v_0}\right\|$ et α pour que le satellite arrive en A avec la vitesse ayant l'orientation souhaitée.

6- Dans le cas où $\alpha = 0$ représenter l'allure de la trajectoire de transfert M_0A, donner l'expression de la vitesse initiale v_0 à communiquer au satellite lors du lancement en M_0. Quelle serait alors la vitesse v_A' du satellite en A sur la trajectoire de transfert et l'énergie $\Delta E_m(A)$ à lui communiquer pour effectuer le transfert d'orbite (permettre le passage de la trajectoire M_0A à l'orbite circulaire de rayon $r_A = R + h$)

7- Dans toute la suite on s'intéresse au lancement avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'alors

$$v_0 = \sqrt{2GM\frac{r_A}{R}.\frac{1}{r_A + R}} \quad \text{avec } r_A = R + h$$

8- Dessiner alors l'allure de la trajectoire M_0A (on fera particulièrement attention à la position du point A). Que représente le point M_0 pour la trajectoire ?
Calculer l'énergie mécanique initiale et commenter l'expression trouvée.

9- Quelle est la durée du transfert de M_0 à A ?

10- Déterminer littéralement puis numériquement la vitesse v_A' du satellite en A sur la trajectoire de transfert.
Déterminer littéralement puis numériquement l'énergie à fournir en A, $\Delta E_m(A)$ pour effectuer les transferts d'orbite (et permettre le passage de la trajectoire M_0A à l'orbite circulaire de rayon $r_A = R + h$)

C- Chez le Petit Prince

Evaluer le rayon d'une planète telle qu'en sautant à pieds joints on puisse échapper à la pesanteur.

Donnée :

Rayon terrestre $R_T = 6400\,km$

On assimilera la constitution des êtres vivants sur cette planète à celle des êtres humains.

On peut estimer qu'à la surface de la Terre un homme est capable en sautant à pieds joints de faire un saut d'une hauteur $h \approx 1m$