ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Revoir les exos faits pendant l'année : ils tombent à l'oral !
Notez aussi que des morceaux entiers de cours tombent tels quels sous forme d'exercices.

Les relations de passage des champs sont redonnées la plupart du temps.
Je ne les remets pas systématiquement ici.

Ondes 1 : Onde cylindrique. (*Mines-Télécom*)

On étudie une onde électromagnétique harmonique émise par des sources situées le long d'un axe (Oz). L'étude est effectuée en coordonnées cylindriques d'axe Oz. On suppose que le champ électrique de l'onde est polarisé selon $\overrightarrow{u_z}$, possède une amplitude réelle $E(r)$ ne dépendant que de la coordonnée radiale r, et que l'onde se propage radialement dans le vide.

On donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f.\vec{G}\right) = f.\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{G}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}(f) \wedge \vec{G}$

1- Donner, en coordonnées cylindriques, l'expression du champ électrique de l'onde, puis déterminer celle du champ magnétique associé.

2- Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting de l'onde et en déduire la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r, et de hauteur h.

3- Comment varie cette puissance avec r ? En déduire l'expression de $E(r)$.

4- Montrer que si $r \gg \lambda$ l'onde est localement plane.

On donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rG_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \theta}\right)\right)\vec{e}_z$

5- Montrer que la structure de l'onde proposée n'est envisageable que dans la limite $r \gg \lambda$ et déterminer l'équation de dispersion.

Ondes 2 : Rayonnement d'un dipôle tournant. (*Mines*)

L'espace est rapporté au repère ($Oxyz$). En O se trouve un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$, de norme constante p_0, qui tourne à la vitesse angulaire ω constante dans le plan (Oxy).

1- Déterminer les composantes de $\vec{p}$ à tout instant dans le repère ($Oxyz$), en supposant $\vec{p}$ initialement colinéaire à (Ox).

2- On considère un point M quelconque du plan (Oxz) que l'on repère en coordonnées sphériques d'axe (Oz). Connaissant les formules données en cours des champs E et B rayonnés par un dipôle oscillant, déterminer les champs rayonnés en M par le dipôle tournant. On exprimera les composantes de ces champs dans le repère sphérique.

3- Etudier la façon dont la polarisation de l'onde dépend de la position de M dans le plan (Oxz).

4- Calculer la puissance totale rayonnée par ce dipôle tournant.

5- Retrouve-t-on la formule de Larmor ?

On rappelle les expressions des champs E et B rayonnés par un dipôle oscillant, en coordonnées sphériques d'axe parallèle au moment dipolaire $\vec{p}$, dans la zone de rayonnement :

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ddot{p}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\sin\theta}{rc^2}\vec{u}_\theta \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\ddot{p}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\sin\theta}{rc}\vec{u}_\varphi \end{cases}$$

Ondes 3 : Rayonnement d'un dipôle oscillant. (*Mines*)

Un formulaire avec les expressions des opérateurs en coordonnées sphériques est fourni.

On considère un dipôle électrique oscillant constitué d'une charge + *e* fixe en un point *O* et d'une charge – *e* mobile repérée par une cote $z(t)=z_0\cos(\omega t)$ le long d'un axe (*Oz*). En coordonnées sphérique d'axe (*Oz*), le champ électrique rayonné par ce dipôle s'écrit : $\vec{E}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\ddot{p}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)\dfrac{\sin\theta}{r}\vec{u}_\theta$

Calculer la force radiative équivalente appliquée à la charge – *e* pour rendre compte du rayonnement.

Ondes 4 : Propagation dans un plasma. (*Mines*)

On considère un plasma formé d'électrons mobiles et de cations fixes, électriquement neutre, avec une densité volumique d'électrons notée *n*. Dans ce plasma se propage une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ; on note (*Oz*) la direction de propagation et (*Ox*) la direction de polarisation.

1- Retrouver l'expression de la pulsation de coupure ω_c du plasma et discuter la propagation de cette onde.

2- Pour cette question uniquement, on considère un paquet d'onde quasi monochromatique ; caractériser la propagation de ce paquet d'onde dans le plasma, en discutant selon sa fréquence centrale.

3- Déterminer l'énergie cinétique volumique moyenne des électrons en présence de l'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.

4- Déterminer l'énergie volumique moyenne totale présente dans le plasma en présence de cette onde.

5- Relier cette énergie au vecteur de Poynting moyen de l'onde et interpréter.

Ondes 5 : Propagation guidée entre deux zones de plasma. (*Mines*)

On considère un plasma électriquement neutre formé d'électrons mobiles de masse *m*, de charge – *e* et de densité volumique *n*, ainsi que de cations supposés fixes. Dans ce plasma se propage une onde électromagnétique.

1- En présence du champ $\vec{E}$ de l'onde, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ qui apparait dans le plasma vérifie :

$\dfrac{\partial\vec{j}}{\partial t}=\dfrac{ne^2}{m}\vec{E}$. Démontrer cette relation.

2- L'espace étant rapporté à un repère (*Oxyz*), on suppose que le plasma occupe tout l'espace à l'exception de la zone $\left\{|y|<\dfrac{a}{2}\right\}$ qui est vide ; on considère alors la propagation d'une onde électromagnétique confinée dans cette zone vide « entre deux plasmas », dont le champ électrique s'écrit :

$$\begin{cases}\vec{E}=E_1\exp(\beta y)\exp(i(kx-\omega t))\,\vec{u}_z & \text{pour } y<-a/2\\ \vec{E}=E_2\cos(\alpha y)\exp(i(kx-\omega t))\,\vec{u}_z & \text{pour } |y|<a/2\\ \vec{E}=E_3\exp(-\beta y)\exp(i(kx-\omega t))\,\vec{u}_z & \text{pour } y>a/2\end{cases}$$

Parmi ces trois expressions, quelles sont celles qui caractérisent une onde plane ?

3- Etablir la relation de dispersion associée au champ présent dans le plasma ainsi que celle associée au champ présent dans le vide.

4- Déterminer les relations qui lient α et β. En déduire que l'on peut obtenir ces deux constantes par une approche graphique et illustrer.

5- Montrer qu'il existe une pulsation de coupure pour ce type d'onde.

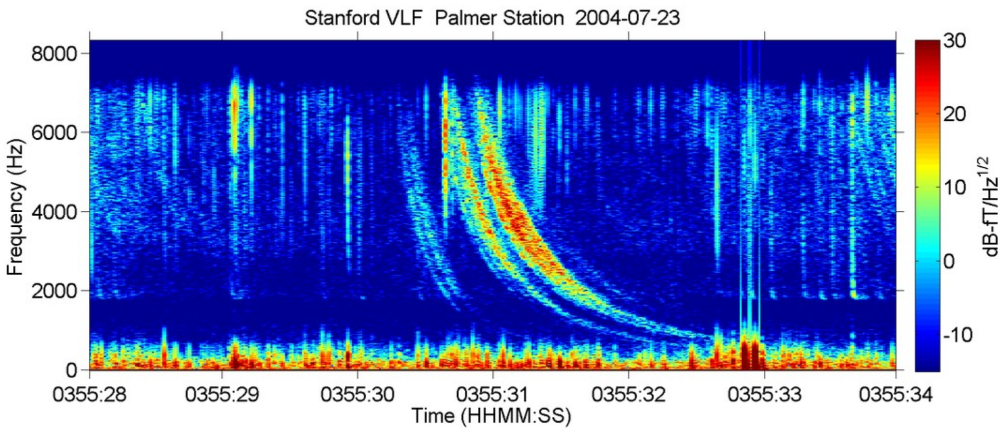
Cet exercice est très proche de l'exercice Ondes 14.

Ondes 6 : Ondes sifflantes. (*Centrale* 2)

Données : Charge de l'électron : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C
Masse de l'électron : $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg
Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8$ m.s^{-2}
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}
Champ magnétique terrestre $B_T = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ T
Densité électronique de l'ionosphère : $n = 1{,}0 \cdot 10^{12}$ m^{-3}
Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ A^2·s^4·kg^{-1}·m^{-3}

Un siffleur (whistler) est une onde électromagnétique radiofréquence générée par les éclairs. Les fréquences des siffleurs terrestres varient entre 1 kHz et 30 kHz, avec un maximum d'amplitude usuellement entre 3 kHz et 5 kHz. Bien qu'il s'agisse d'ondes électromagnétiques, elles se propagent à des fréquences du domaine audio et peuvent être converties en signaux audio au moyen d'un détecteur ad hoc. Elles sont produites sous forme d'impulsions par des éclairs, essentiellement à l'intérieur des nuages, et se propagent d'un hémisphère terrestre à l'autre dans le plasma formé par l'ionosphère et la magnétosphère, le long des lignes de champ magnétique terrestre. Au cours de cette propagation, elles subissent une dispersion importante et sont donc perçues avec une tonalité descendante qui peut durer plusieurs secondes.

Des siffleurs ont probablement été repérés sur Terre dès 1886 sur des lignes téléphoniques longue distance, mais leur première description claire est due à Barkhausen en 1919. En 1953, Storey a montré que les siffleurs sont créés par les décharges dans les éclairs. Plus récemment, les engins spatiaux Voyager 1 et 2 ont détecté des activités de type siffleur dans le voisinage de Jupiter, impliquant la présence d'éclairs sur cette planète.



VLF spectrogram of an electromagnetic whistler wave, as received by the Stanford University VLF group's wave receiver at Palmer Station, Antarctica.

I – Approche qualitative.

a- Présenter le phénomène des ondes sifflantes, leur fréquence maximale, minimale et leur durée. Pourquoi les appelle-t-on ainsi ?

b- On s'intéresse à la propagation d'une telle onde dans l'ionosphère. On considère donc l'effet du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T} = B_T\,\overrightarrow{e_z}$ sur les électrons de l'ionosphère.
Quel est, au point d'observation la direction du champ magnétique ? Doit-on prendre en compte l'action gravitationnelle vis-à-vis de l'action magnétique sur les électrons ?

c- On introduit les pulsations $\omega_c = \dfrac{eB_T}{m}$ et $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$. Que représentent ces pulsations ?

d- On admet que la relation de dispersion d'une onde électromagnétique basse fréquence dans le plasma s'écrit : $k^2 = \dfrac{\omega\omega_p^2}{\omega_c c^2}$, à la condition que la pulsation de l'onde soit très faible devant les pulsations ω_c et $\dfrac{\omega_p^2}{\omega_c}$.
Ces conditions sont-elles valables dans le cas des ondes sifflantes ?

e- Déterminer la distance entre le lieu d'émission de l'onde et le récepteur.

II – Étude du mouvement d'un électron dans un champ uniforme et constant.

a- Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de l'électron plongé dans un champ électromagnétique permanent et uniforme $\left\{\vec{E} = E\,\overrightarrow{e_x}\,;\,\overrightarrow{B_T} = B_T\,\overrightarrow{e_z}\right\}$.

b- On cherche une solution de cette équation sous la forme $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_E}$ où $\vec{v_E} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B_T}}{\alpha}$.

Quelle doit être la valeur de α pour que $\vec{v_1}$ soit périodique de pulsation ω_c ? Laquelle des deux composantes $\vec{v_1}$ ou $\vec{v_E}$ s'apparente-t-elle alors à une vitesse d'ensemble des électrons ?

III – Étude de la propagation de l'onde.

On s'intéresse maintenant à la propagation dans le plasma ionosphérique, le long de l'axe du champ magnétique terrestre $\vec{B_T} = B_T\,\vec{e_z}$, d'une onde électromagnétique basse fréquence dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t - kz)$. On admet qu'alors le vecteur densité de courant associé à l'onde s'écrit : $\vec{j} = -ne\vec{v_E}$ où $\vec{v_E} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B_T}}{\alpha}$ comme défini ci-dessus.

a- Écrire l'équation de Maxwell-Ampère. Quel terme peut-on négliger ?

b- Montrer que l'onde est transverse.

c- Retrouver la relation de dispersion de l'onde donnée dans la partie I.

d- Discuter la structure de l'onde.

Ondes 7 : Propagation d'une onde dans l'eau de mer. (*Centrale* 1)

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de longueur d'onde kilométrique dans le vide. On cherche à savoir si elle peut se propager dans l'eau de mer, considérée localement neutre et de conductivité électrique $\gamma = 4\ \mathrm{S.m^{-1}}$. La permittivité diélectrique de l'eau de mer est égale à 80 fois celle du vide.

1- Écrire les équations de Maxwell dans l'eau de mer.

2- Montrer qu'on peut négliger le courant de déplacement dans l'eau de mer.

3- L'onde se propage dans l'air (assimilé au vide) et atteint l'interface avec l'eau de mer sous incidence normale. Calculer la puissance de l'onde transmise. On admettra la continuité des champs à l'interface.

Ondes 8 : Onde plane émise vers un conducteur parfait. (*Mines*)

On considère un laser qui émet une onde plane monochromatique de longueur d'onde 1 µm, polarisée rectilignement, en direction d'un conducteur parfait normal à la direction de propagation. La surface éclairée est de 1 mm² et le laser délivre une puissance P = 1*W*.

1- Déterminer l'expression des champs incidents et réfléchis, ainsi que l'expression des courants surfaciques présents à la surface du conducteur parfait. Exprimer alors la force subie par le conducteur parfait.

2- En considérant les photons sous un aspect corpusculaire, calculer le nombre de photons émis par le laser en une seconde, puis la force subie par le conducteur parfait.

Ondes 9 : Réflexion sur un miroir mobile. (*Mines & X*)

1- Soient $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ les champs électrique et magnétique mesurés en un point M par un observateur d'un référentiel *R* galiléen. Soit *R'* un référentiel en translation rectiligne et uniforme dans *R*, caractérisé par une vitesse d'entrainement $\vec{V_0}$. Soient $\vec{E'}(M,t)$ et $\vec{B'}(M,t)$ les champs électrique et magnétique mesurés en M par un observateur de *R'*.

En admettant que l'expression de la force de Lorentz est invariante par changement de référentiel et en supposant que l'on peut se contenter d'une approche classique, montrer que : $\vec{E'}(M,t) = \vec{E}(M,t) + \vec{V_0} \wedge \vec{B}(M,t)$ et $\vec{B'}(M,t) = \vec{B}(M,t)$

La théorie de la relativité montre que les bonnes expressions sont en réalité :

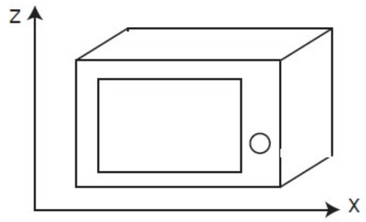
$$\begin{cases} \overrightarrow{E'_{\parallel}} = \overrightarrow{E_{\parallel}} \quad \overrightarrow{E'_{\perp}} = \gamma\left(\overrightarrow{E_{\perp}} + \overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{B_{\perp}}\right) \\ \overrightarrow{B'_{\parallel}} = \overrightarrow{B_{\parallel}} \quad \overrightarrow{B'_{\perp}} = \gamma\left(\overrightarrow{B_{\perp}} - \dfrac{\overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{E_{\perp}}}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

en décomposant chaque champ en sa composante vectorielle parallèle à la direction d'entrainement et sa composante vectorielle perpendiculaire à cette direction.
Discuter la validité des expressions obtenues par l'approche classique, que l'on utilisera dans toute la suite.

2- On considère une onde électromagnétique progressive plane monochromatique se propageant selon un axe (Ox) dans le référentiel *R*. L'onde est polarisée rectilignement selon (Oz).
Exprimer les champ électrique et magnétique associés à cette onde dans *R* puis, en utilisant la question précédente, en déduire les champs dans *R'* dans le cas où $\overrightarrow{V_0} = V_0 \, \overrightarrow{u_x}$. On veillera à exprimer les champs en *M* dans chaque référentiel en fonction des coordonnées spatiales de *M* dans ce référentiel.
La fréquence de l'onde perçue dans *R'* est-elle la même que celle perçue dans *R* ? Et la longueur d'onde ? Commenter.

3- On suppose que l'onde se réfléchit en incidence normale sur une plaque métallique immobile dans *R*'.
Déterminer les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis dans *R'*, puis dans *R*. Commenter, en particulier la diminution d'amplitude entre le champ incident et le champ réfléchi dans *R*.

Ondes 10 : Onde dans un micro-ondes. (*Centrale* 1)



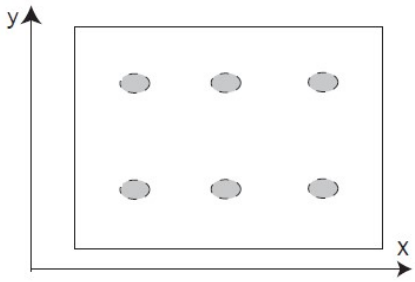
On s'intéresse à un four à micro-ondes (voir figure) dont les dimensions horizontales sont *a* = 20 cm selon (O*x*) *b* = 15 cm selon (O*y*). On admet que le champ électrique à l'intérieur du four est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$$

1- Commenter cette expression. Quelle est l'équation locale vérifiée par ce champ ?

2- On place des copeaux de chocolat de façon uniforme à l'intérieur du four et on le fait fonctionner à pleine puissance. On retire ensuite les copeaux qui n'ont pas fondu et on obtient la photo ci-dessous. En déduire la fréquence du champ dans le four ?

3- Montrer que ce champ est la superposition de plusieurs ondes planes dont on donnera les vecteurs d'onde.



Ondes 11 : Onde dans un câble coaxial. (*Tous concours*)

Un câble coaxial peut être considéré comme une zone vide, possédant la symétrie de révolution autour d'un axe Oz, taillée dans un conducteur parfait et comprise entre les rayons a et b. L'onde est alors guidée selon Oz. Une onde de courant : $\underline{I}(z,t) = I_0 e^{i(\omega t - kz)}$ parcourt la surface intérieure $r = a$ du coaxial.

1- Quelle est la densité surfacique de courant $\overrightarrow{\underline{j}_{s1}}(z,t)$ associée ? Il existe également une onde de courant « opposée » qui parcourt la surface extérieure *r* = *b*. Calculer la densité surfacique de courant $\overrightarrow{\underline{j}_{s2}}(z,t)$.

2- Ce courant engendre des suppléments locaux de charges sur les surfaces intérieures et extérieurs, notés respectivement $\underline{\sigma_1}(z,t)$ et $\underline{\sigma_2}(z,t)$. En les écrivant aussi sous forme d'onde plane progressive monochromatique, et en adaptant une relation de conservation, donner leur forme exacte.

3- On cherche une solution des équations de Maxwell pour une onde électromagnétique se propageant selon les z croissants et invariante par rotation autour de l'axe Oz. On considère un champ électrique de la forme : $\vec{E} = f(r)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_r}$.

Décrire la forme de ce champ. A-t-on a priori $k = \dfrac{\omega}{c}$?

4- En appliquant le théorème de Gauss, exprimer f(r)en fonction de données précédentes. Peut-on l'utiliser sans problème en régime variable ?

5- Calculer exactement le champ magnétique grâce à une équation de Maxwell (utiliser un formulaire d'analyse vectorielle)

6- appliquer une généralisation du théorème d'Ampère sur un cercle de rayon $a < r < b$ et centré sur Oz. Conclusions ?

Ondes 12 : Guide d'ondes entre deux plans. (*Mines-Télécom*)

On étudie une onde électromagnétique se propageant dans le vide entre deux conducteurs parfaits, plans et infinis, de cotes $z = 0$ et $z = a$. On admet que le champ électrique de l'onde s'écrit : $\vec{E} = E_0 \sin\left(\dfrac{\pi z}{a}\right)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u_y}$

1- Quelle est la direction et la polarisation de l'onde ? L'onde est-elle plane ? Vérifier que l'expression proposée satisfait les conditions aux limites.

2- Déterminer l'équation de dispersion k = k (ω). Le milieu est-il dispersif ? A quelle condition l'onde peut-elle effectivement se propager ? Déterminer dans ce cas la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.

3- Déterminer le champ magnétique de l'onde en négligeant les termes statiques.

4- Déterminer la densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne entre les plaques. On fera une moyenne temporelle puis une moyenne spatiale selon l'axe (O*z*).

Ondes 13 : Onde guidée dans une cavité cylindrique. (*Centrale* 2)

Un formulaire d'analyse vectoriel était fourni.

Un programme python permettant de résoudre numériquement les équations différentielles obtenues aux questions 2 et 3 était également fourni. Ici, je « remplace » ce programme par une annexe sur les fonctions de Bessel.

On considère un cylindre creux d'axe *Oz*, parfaitement conducteur, de rayon *a*, jouant le rôle de guide d'onde. On cherche à générer dans ce guide une onde électromagnétique transverse magnétique telle que :
$\vec{B} = B_0(r)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_\theta}$

1- Montrer que le champ électrique ne peut être transverse et en donner une expression, sans chercher à expliciter la fonction $B_0(r)$ à ce stade.

2- Montrer que $B_0(r)$ vérifie : $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(rB_0(r)\right)\right) + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)B_0(r) = 0$.

3- On pose : $\vec{E}\cdot\overrightarrow{u_z} = E_0(r)\cos(\omega t - kz + \varphi)$. Montrer que $E_0(r)$ vérifie : $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dE_0}{dr}(r)\right) + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)E_0(r) = 0$.

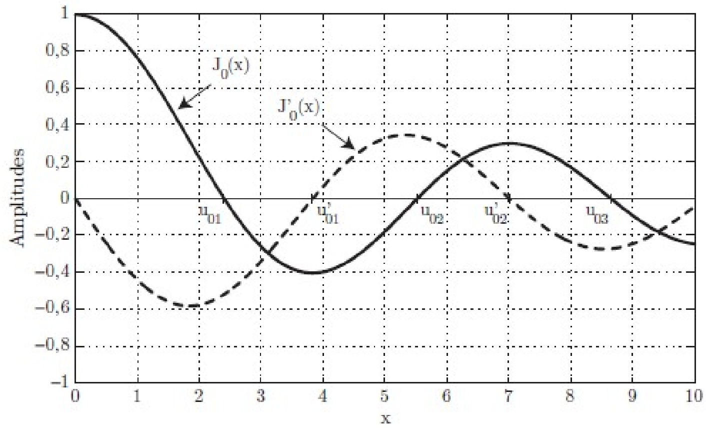
4- Montrer que, sous certaines conditions, $B_0(r)$ et $E_0(r)$ peuvent être obtenus à partir de fonctions de Bessel.

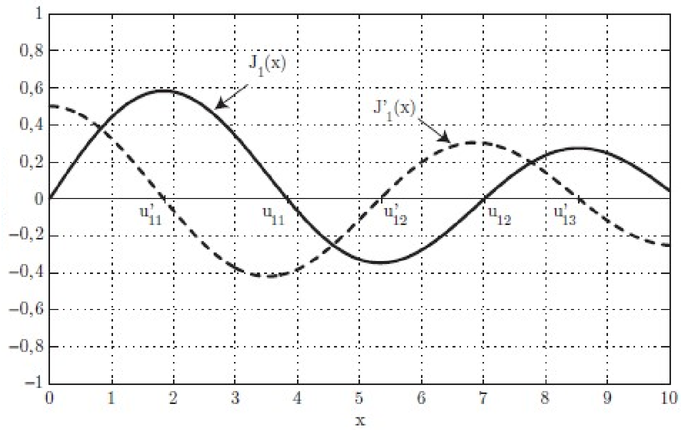
5- Montrer qu'alors seuls certains modes peuvent se propager à l'intérieur du guide.

Annexe : fonctions de Bessel

k	J_0	J_1
1	2,4048	3,8317
2	5,5201	7,0156
3	8,6537	10,1735
4	11,7915	13,3237
5	14,9309	16,4706

Soit l'équation différentielle : $x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - n^2) f(x) = 0$ où n est entier. L'unique solution de cette équation qui soit définie en 0 est la $n^{\text{ème}}$ fonction de Bessel de première espèce notée J_n . On donne ci-dessous les graphes de J_0 , J_1 et de leurs dérivées, et ci-contre un tableau des 5 premiers zéros de J_0 et J_1.





Ondes 14 : Onde guidée dans une couche isolante. (*Centrale*)

On étudie une onde électromagnétique harmonique se propageant le long d'un axe (Oz) dans un domaine de l'espace divisé en 3 zones :

- La zone (I) correspondant au demi espace $x > a$ est vide ;
- La zone (II), comprise entre les plans $x = a$ et $x = 0$, est un milieu isolant où les équation de Maxwell peuvent s'appliquer comme dans le vide à condition de remplacer la constante diélectrique ε_0 par le produit ; $\varepsilon_0\, \varepsilon_r$, avec $\varepsilon_r > 1$;
- La zone (III) correspondant au demi espace $x < 0$ est un métal ohmique assimilé à un conducteur parfait au sein duquel le champ électromagnétique peut être considéré nul.

Dans les domaines (I) et (II), on cherche pour le champ magnétique de l'onde une solution de la forme :

$$\vec{B} = B_0(x,y)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_y}$$

1- Expliquer brièvement dans quelle mesure on peut idéaliser un métal ohmique de sorte que le champ électromagnétique puisse être considéré nul en tout point.

2- Commenter la forme du champ magnétique proposé et montrer que la fonction B_0 est nécessairement indépendante de la coordonnée y.

3- Sans déterminer explicitement cette fonction, déterminer la forme du champ électrique dans chaque domaine.

4- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction B_0.

5- On étudie les solutions de la forme :
$$B_0(x) = B_I\, e^{-\alpha x} \quad \text{pour} \quad x > a$$
$$B_0(x) = B_{II}\cos(\beta x + \varphi) \quad \text{pour} \quad 0 < x < a$$

a- Commenter la forme de l'onde envisagée.

b- Trouver une condition sur les caractéristiques de l'onde pour qu'une telle fonction soit solution et exprimer les constantes α et β en fonction de k, ω, ε_r et c. Montrer en particulier que : $\alpha^2 + \beta^2 = (\varepsilon_r - 1)\, \omega^2 / c^2$

c- En appliquant les relations de passage aux différentes interfaces, montrer que $\varphi = 0$ et établir une relation supplémentaire entre α et β .

d- Montrer que l'on peut déterminer les valeurs de α et β par une méthode de résolution graphique et que ces valeurs sont en nombre discret et fini.

On rappelle les relations de passage des champs à l'interface Σ entre deux milieux notés (1) et (2) :

$$\forall M \in \Sigma,\ \forall t \quad \vec{E_2}(M,t) - \vec{E_1}(M,t) = \frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}\ ;\ \vec{B_2}(M,t) - \vec{B_1}(M,t) = \mu_0\, \vec{j_s}(M,t) \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

EXERCICES SUR LES ONDES ELECTROMAGNETIQUES A L'X ET AUX ENS :

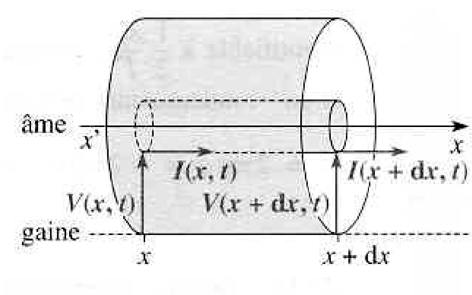
X-5, X-66
ENS-7, ENS-8, ENS-30

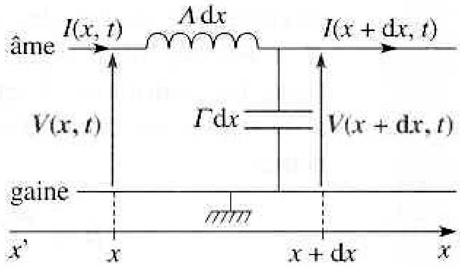
COMPLEMENTS SUR LES ONDES

Cpt ondes 1 : Etude d'un câble coaxial. (a donné lieu à des oraux à *Centrale, Mines & ENS*)

Une tranche de longueur dx d'un câble coaxial est modélisée électriquement de la façon suivante :

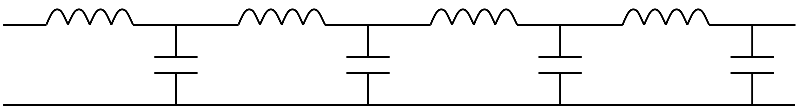
MODELISATION D'UNE TRANCHE DE CABLE DE LONGUEUR *dx* :





Λ et Γ sont respectivement l'inductance et la capacité par unité de longueur du câble. L'ensemble du câble est ainsi modélisé par une succession de cellules électriques identiques, comme suit (on parle de « modèle à constantes réparties ») :

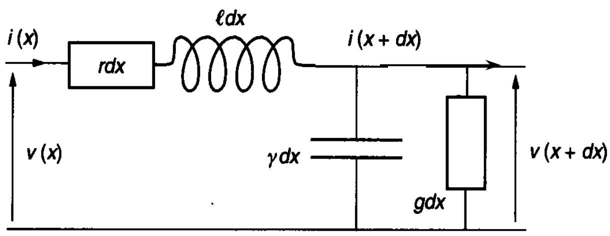
MODELISATION DE L'ENSEMBLE DU CABLE :



1- Etablir les équations couplées qui régissent l'intensité $I(x,t)$ et de la tension $V(x,t)$ au sein du câble ; en déduire les équations de propagation de ces grandeurs et commenter.

2- Dans le cas d'un câble coaxial dont le cœur et la gaine ont des rayons respectivement notés a et b, et dont le milieu isolant entre les deux conducteurs est de permittivité relative ε_r, déterminer les expression de Γ et Λ en fonction de a, b, μ_0, ε_0 et ε_r. Commenter.

3- Une tranche de longueur dx d'un câble coaxial est maintenant modélisée par le schéma de la figure ci-contre et comprend une inductance $\ell.dx$ et une résistance $r.dx$ en série, ainsi qu'une capacité $\gamma.dx$ et une conductance $g.dx$ en parallèle.
Commenter ce nouveau modèle et discuter les termes $r.dx$ et $g.dx$.



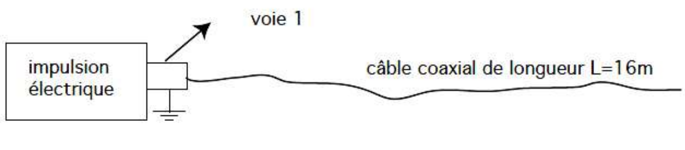
4- Etablir les nouvelles équations de propagation de l'intensité $i(x,t)$ et de la tension $v(x,t)$ au sein du câble.

5- Envisager des solutions en pseudo ondes progressives harmoniques et établir l'équation de dispersion suivante (dite « des télégraphistes ») : $k^2 = \omega^2\ell\gamma - j\omega(\ell g + r\gamma) - rg$.
Que peut-on dire, dans le cas général, de la propagation d'une onde électrique le long de cette ligne ?

6- Montrer qu'on peut choisir les paramètres caractéristiques de la ligne de façon que la vitesse de phase et la distance caractéristique de l'amortissement soient indépendantes de la pulsation de l'onde. Quel est l'intérêt pratique de ce choix ?

7- Afin de mesurer la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial, on réalise l'expérience schématisée sur la figure 1 ci-dessous ; on observe alors à l'oscilloscope le signal représenté sur la figure 2.

Figure 1



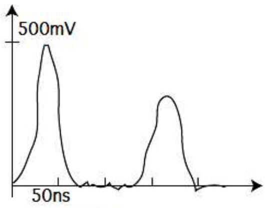
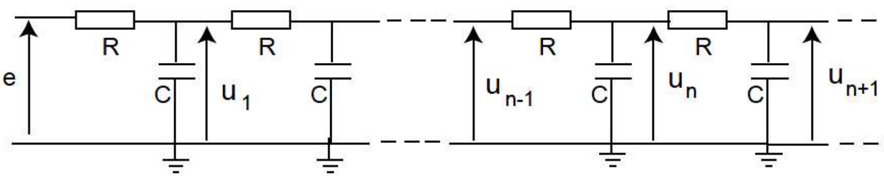


Figure 2

Commenter l'oscillogramme obtenu et calculer la vitesse de propagation de l'onde dans le câble.

Cpt Ondes 2 : Chaine infinie de cellules identiques. (*Centrale*)

On considère une chaine infinie de cellules composées d'un condensateur de capacité C et d'un résistor de résistance R, alimentée par une tension d'entrée : $e(t) = U_0 \cos(\omega t)$ avec $RC\omega \ll 1$.

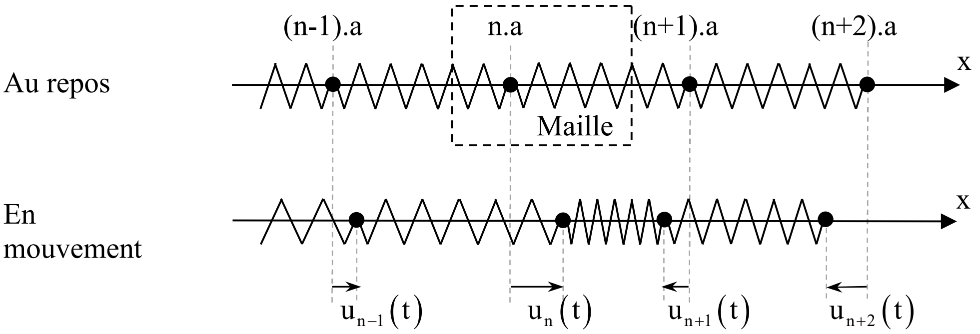


1- Trouver une relation de récurrence sur $\{u_n(t)\}$ où u_n désigne la tension aux bornes du $n^{\text{ème}}$ condensateur.

2- On note $x_n = na$ la position du $n^{\text{ème}}$ condensateur. Proposer une écriture de u_n sous forme d'une pseudo-onde plane progressive harmonique et déterminer la distance δ caractéristique d'atténuation spatiale de l'onde en fonction de la pulsation du signal.

3- Soit $u(x,t)$ la fonction telle que $u(na,t) = u_n$. Sachant que a est faible devant δ, trouver une équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. La résoudre et confronter aux résultats obtenus à la question précédente.

Cpt Ondes 3 : Chaine de masses-ressorts modélisant un solide cristallin. (*CCINP, X sans indications*)



Version CCINP :

Le solide cristallin unidimensionnel est modélisé par un sustème de masses pontuelles identiques m, représentait les atomes, couplées par des ressorts identiques de raideur k (cf ci-dessous)

On suppose la chapine d'oscillateurs aisnsi constituée indinié et l'on note $u_n(t)$ $(n \in \mathbb{Z})$ le déplacement sur l'axe par rapport à sa position d'équilibre, au temps t, de la masse repérée par l'indice n. On note a la longueur à l'équilibre des ressorts (dimension de la maille du cristal)

1- Equation de propagation

Montrer que $\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\left(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}\right)$.

Justifier la dénomination d'équation de propagation.

2- Relation de dispersion

On cherche des solutions à l'équation 2 de la forme $u_n(t) = U e^{j(Kna-\omega t)}$ où U est une constante. Que représentent U, ω, K (on supposera $\omega > 0$) ?

Montrer que K et ω sont reliés par la relation : $\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\dfrac{Ka}{2}\right)$

Quelle est la signification de cette équation ? Représenter sur un graphique ω en fonction de K.

3- Zone de Brillouin

Exprimer le rapport des déplacements de deux masses consécutives/

En déduire que l'on peut se limiter au domaine de K suivant : $-\frac{\pi}{a} \le K \le \frac{\pi}{a}$.

Ce domaine de K définit ce que l'on appelle la zone de Brillouin du cristal.

Interpréter physiquement le cas $K = \pm\frac{\pi}{a}$

4- Vitesse de groupe et vitesse de phase

Donner la définition d'un milieu dispersif. Citer quelques exemples de milieux dispersifs (par exemple en optique).

Rappeler la définition et la signification de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase.

Calculer la vitesse de groupe V_g d'un paquet d'onde, de pulsation spatiale centrée autour d'une valeur K_0 $\left(-\frac{\pi}{a} \le K_0 \le \frac{\pi}{a}\right)$ et se propageant dans le cristal.

Que vaut V_g pour $K_0 = \pm\frac{\pi}{a}$? Interpréter ce résultat.

Pour $K_0 = 0$, décrire le déplacement relatif de deux atomes consécutifs et interpréter.

5- Chaîne finie

Décrire, rapidement et qualitativement, comment sont médifiés les résultats précédents dans le cas d'un cristal de longueur finie.

Possibilité de suite de l'exo en effectuant un passage à la limite continue…

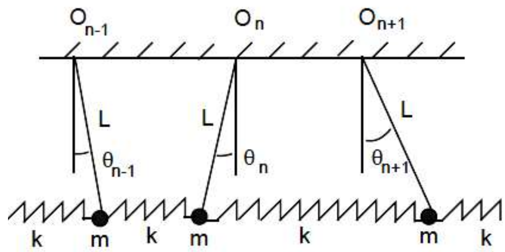
Version X :

On considère une chaîne infinie unidimensionnelle de ressorts, tous de masse négligeable, de longueur à vide *a* et raideur *k*. A l'extrémité de chaque ressort se trouve une masse *m* qui coulisse sans frottements selon un axe O*x* (toutes les masses sont identiques). Au repos, les masses sont espacées d'une longueur *a*. On met une des masses en oscillation sinusoïdale.

Peut-on avoir une onde qui se propage jusqu'à l'infini le long de la chaine ?

Cpt Ondes 4 : Chaine de pendules couplés.

On considère une chaîne de pendules simples identiques équidistants effectuant des oscillations de faible amplitude.



1- On note $x_n = na + u_n$ la position de la $n^{ième}$ masse m. Quel est le sens physique de u_n ? Quel est le lien entre u_n et θ_n pour les petites oscillations. ?

2- Soit $u(x,t)$ la fonction telle que $u(na,t) = u_n(t)$. Sachant que u_n reste faible devant a et varie peu d'un pendule au suivant, trouver une équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$. La résoudre et commenter.

Cpt Ondes 5 : Ondes de compression au sein d'un cylindre.

On considère un solide homogène de masse volumique ρ constante, qui a la forme d'un cylindre de section S et d'axe Ox horizontal, le long duquel on étudie les petits mouvements de déformation. On néglige l'action de la pesanteur.

Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $F = ES\frac{\Delta L}{L}$ où E est une constante appelée module d'Young du matériau

1- Quelle est l'unité d'un module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

2- On note X(x,t) le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x. Calculer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire du cylindre de longueur au repos dx et en déduire la force de traction $\vec{F}(x,t) = F(x,t)\overrightarrow{u_x}$ exercée par la partie « droite » (du côté des x croissants) sur la partie « gauche » (du côté des x décroissants) en fonction de E, S et $\frac{\partial X}{\partial x}$. Ecrire l'équation du mouvement de la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiées par X(x,t)

Cpt Ondes 6 : Onde au sein d'un ressort.

On considère un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O et dont l'extrémité mobile M est reliée à une masse ponctuelle m libre se déplaçant sans frottement le long de l'axe Ox. On note μ la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke : $\vec{F} = K\frac{\partial \xi}{\partial x}\overrightarrow{u_x}$ où K est une caractéristique du matériau.

1- Montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante.

2- On fait l'approximation des régimes quasi-stationnaires, c'est-à-dire qu'on néglige les dérivées temporelles dans l'équation de D'Alembert. On note $L + X(t)$ la position de la masse m.

2a- Déterminer la fonction ξ(x,t) en fonction de x, X(t) et L.

2b- En déduire la force exercée par le ressort sur m en fonction de K, L et X. En déduire la raideur k du ressort en fonction de K et L.

2c- Déterminer la pulsation ω_{ARQS} des oscillations. En déduire une condition sur μ, L et m pour que l'ARQS soit validée.

3- On revient au cas général.

3a- Quelles sont les conditions aux limites imposées à la fonction ξ(x,t) d'une part par le mur en x = 0 et d'autre part par la masse m en x = L ?

3b- On cherche des solutions de la forme : $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$

Etablir l'équation dont f(x) est solution et déterminer sa forme à une constante multiplicative près en fonction de ω, x et c.

3c- Montrer que ω est solution de : $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{m\omega c}$

Discuter cette équation graphiquement.

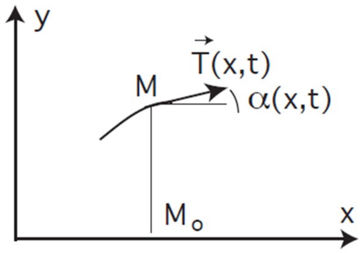
3d- On suppose que $\mu L \ll m$ et $\omega_1 \ll \frac{c}{L}$. En utilisant le développement limité $\tan u = u + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, déterminer ω_1 à l'ordre 1 en $\frac{\mu L}{m}$ en fonction de K, μ, L et m. Vérifiait que tout se passe comme si on accrochait à un ressort sans masse un masse ponctuelle fictive $m^* = m + \alpha\mu L$ où α est un nombre à déterminer.

Cpt Ondes 7 : Ondes sur une corde tendue. (***Mines***)

Une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique μ constante, est tendue par une tension $\vec{T}$. Au repos, elle se confond avec l'axe Ox. On étudie les petits mouvements transversaux de cette corde de part et d'autre de cette position d'équilibre dans le plan Oxy, en admettant qu'un élément de la corde au repos (au point M_0) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse x à l'instant t (point M) est notée y(x,t). La tangente en M à la corde fait un angle α(x,t) qui reste petit, ce qui suppose $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$. Enfin l'action du champ de pesanteur sur le mouvement, ainsi que tout cause d'amortissement sont négligées.

1- Equation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

1a- La longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. Montrer qu'à des termes du second ordre en α près, l'abscisse curviligne s peut être confondue avec x.



1b- On admet que la tension $\vec{T}$ reste en tout point tangente à la corde. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour un tronçon de la corde compris entre les abscisses x et x+dx.
Montrer à l'aide des hypothèses faites que la tension est de module constant, noté T, et déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par y(x,t)/

2- Solution en ondes stationnaires de l'équation de D'Alembert.
A présent la corde de longueur L est fixée à ses extrémités x = 0 et x = L.

2a- On cherche des solutions à l'équation du **1b-** sous la forme de variables séparées : $y(x,t) = f(x)g(t)$.
Montrer que f et g doivent être des fonctions sinusoïdales. En notant ω la pulsation (temporelle) de g, quelle est la pulsation (spatiale) k de f ?

2b- Montrer que les pulsations ω ne peuvent prendre qu'une série de valeurs discrètes notés ω_n et en donner l'expression. En déduire que pour des grandeurs L et ω fixées, la longueur d'onde λ ne peut elle-même prendre qu'une suite de valeur λ_n. Exprimer la longueur L en fonction de λ_n.

2c- Quelle est l'expression d'une solution correspondant au mode de vibration d'indice n ? En déduire la solution générale de l'équation du **1-** écrite sous forme (2) d'une série de Fourier.

2d- Justifier le terme d'onde stationnaire donné à $y_n(x,t)$ (mode n). Monter qu'il existe le long de la corde, outre les extrémités des points immobiles ; en préciser le nombre et la position.
En supposant qu'à l'instant t = 0 la corde coincide avec l'axe Ox, représenter graphiquement l'état des déformation de la corde aux instants $t_1 = \frac{T_n}{4}$, $t_2 = \frac{T_n}{2}$, $t_3 = \frac{3T_n}{4}$, $t_4 = T_n$ avec $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$

AN : pour une corde de longueur L, oscillant à la fréquence ν, donner la tension T_n^0 à appliquer pour obtenir le seul mode n. En déduire ν pour n = 1 (fréquence propre la plus basse), $T_1^0 = 2930\,\text{N}$, $\mu = 5{,}65.10^{-3}\,\text{kg.m}^{-1}$, $L = 1{,}22\,\text{m}$. Quelle note musicale reconnaissez-vous ?