MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Revoir impérativement les exercices du cours et des TD : ils tombent tous à l'oral !

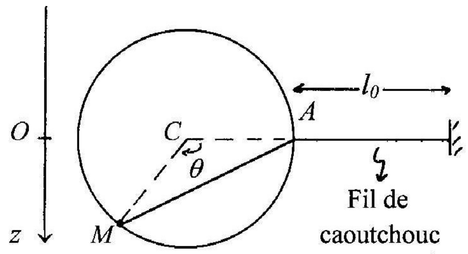
Questions de cours :

- Relativité galiléenne, référentiels non galiléens.
- Travail et puissance d'une force, énergie potentielle.
- Etude d'un régime sinusoïdal forcé en mécanique.
- Propriétés des forces centrales.
- La rotation de la Terre influe-telle sur la chute des corps à sa surface ?

M 1 : Etude d'un équilibre. (*CCINP*)

Sur un cerceau de centre C et de rayon R, situé dans un plan vertical, est enfilé un petit anneau M de masse m supposé ponctuel qui peut coulisser sans frottement le long du cerceau.

La position de l'anneau est repérée par l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right)$.



En plus de son poids, cet anneau est soumis à une force de rappel car il est attaché à un fil de caoutchouc de raideur k et de longueur au repos l_0, comme indiqué sur le schéma. l_0 est précisément la distance entre le point d'attache du caoutchouc et le point A du cerceau par lequel passe ce fil.

1- Etudier l'existence de positions d'équilibre de l'anneau ainsi que la stabilité de ces positions.

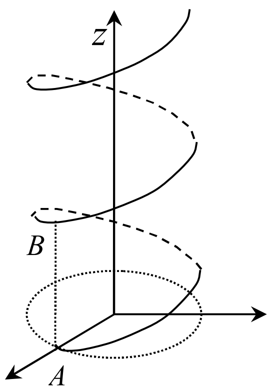
2- On part d'une situation d'équilibre stable et on écarte l'anneau de sa position d'un angle très faible, puis on le lâche. Monter que le mouvement observé sera une oscillation harmonique dont on donnera la période en fonction des données.

M 2 : Mouvement le long d'une hélice. (*Centrale*)

Un anneau M, assimilé à un point matériel de masse m, est enfilé sur un rail hélicoïdal le long duquel il glisse sans frottements. Ce rail est une hélice droite d'axe vertical (Oz), de rayon R et de pas h, c'est-à-dire que l'altitude varie linéairement avec l'angle de rotation autour de l'axe (Oz) et augmente de h à chaque tour (voir schéma ci-contre).

L'anneau est lâché sans vitesse initiale depuis le point B situé à la verticale du point A du rail situé dans le plan horizontal (Oxy). On note g l'accélération de la pesanteur.

Calculer la durée de la chute de l'anneau de B à A.



M 3 : Excitation de l'extrémité d'un pendule. (*CCINP*)

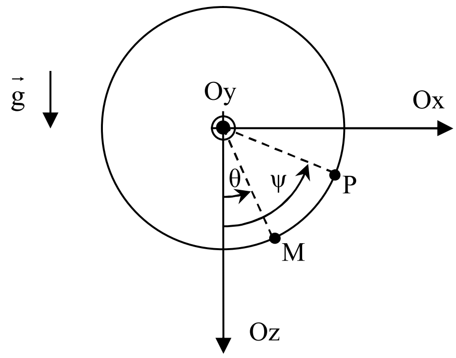
On considère un pendule, initialement au repos, constitué d'un fil inextensible et sans masse de longueur l, reliant une masse m mobile à un point d'attache I astreint à se déplacer sur un axe horizontal (Ox). A partir de $t = 0$, la coordonnée $x(t)$ du point I vaut : $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. On note $\theta(t)$ l'angle entre le fil et la verticale à l'instant t et on se limite aux petites valeurs de θ.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ puis la résoudre et discuter le mouvement observé.

Question supplémentaire : que devient l'équation différentielle du mouvement si le point I oscille sinusoïdalement selon la verticale au lieu de l'horizontale ?

M 4 : **Oscillations forcées le long d'un anneau.** (***Centrale*** **1**)

Une masse m, astreinte à se déplacer le long d'un anneau de rayon R dans le champ de gravité terrestre, est repérée par un angle θ par rapport à la verticale descendante (Oz) (schéma ci-contre). En outre, l'anneau n'est pas immobile : on l'excite sinusoïdalement à la pulsation ω autour de l'axe (Oy), de sorte que l'angle qui repère un point fixe P de l'anneau par rapport à (Oz) dans le plan (Ozx)) s'écrit : $\psi(t) = \psi_0 + \psi_m \sin(\omega t)$.



Enfin, on suppose l'existence de frottements entre la masse m et l'anneau, avec une force sur m proportionnelle à sa vitesse relative dans le référentiel de l'anneau *.

1- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta(t)$ qui repère M par rapport à (Oz), puis la résoudre pour de petits angles, dans le cadre d'un régime permanent. On notera ω_0 et Q la pulsation propre et le facteur de qualité qui apparaissent.

2- Analyser les effets du mouvement de l'anneau sur celui de M en présentant les résultats sous forme d'un diagramme de Bode.

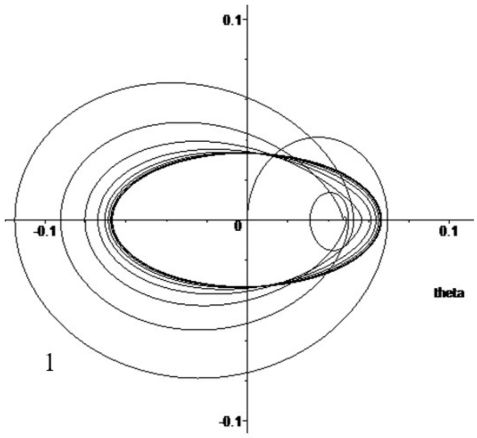
De façon générale, on appelle « trajectoire de phase » d'un point matériel en mouvement unidimensionnel, une courbe représentant une trajectoire du point étudié dans un plan abstrait où l'on porte la position en abscisse et la vitesse en ordonnée.

On donne ci-contre plusieurs trajectoires de phases, numérotés de 1 à 6, associées à la dynamique de ce système pour différentes valeurs des paramètres Q et $x = \omega/\omega_0$; x peut prendre les valeurs 0,5 , 1 et 2 et Q les valeurs 0,5 et 10. Sur chaque graphe, l'abscisse correspond à θ/ψ_m, l'ordonnée à $\dot{\theta}/(\omega_0\psi_m)$ et la condition initiale choisie est $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$.

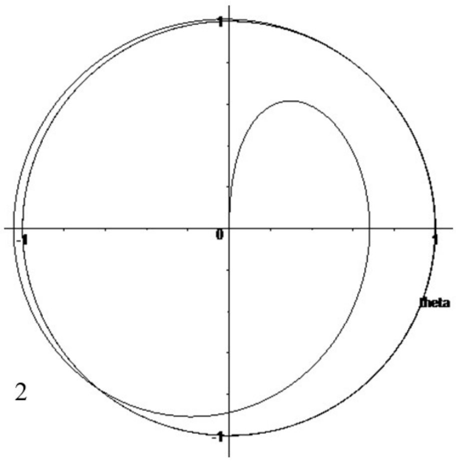
3- Expliquer l'allure générale d'une de ces trajectoire (au choix) et en particulier l'existence d'un courbe fermée circulaire ou elliptique vers laquelle cette trajectoire tend asymptotiquement. Dans quel sens la trajectoire est-elle parcourue ?

4- En analysant plus en détails les différentes allures observés et en vous justifiant, associer chaque trajectoire de phase à un couple (x,Q).

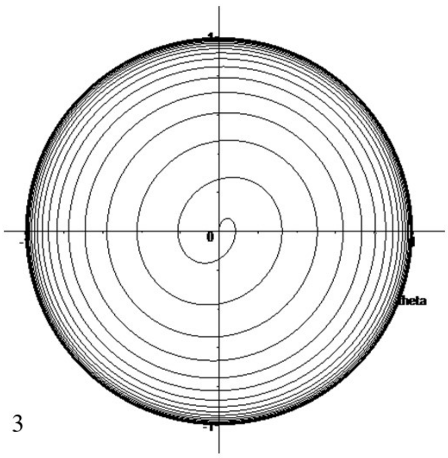
* *Note : cette modélisation est un peu litigieuse : les frottements entre 2 solides ne sont pas proportionnels à leur vitesse relative mais suivent les lois de Coulomb !*


0.1
-0.1
0.1
0
-0.1
theta

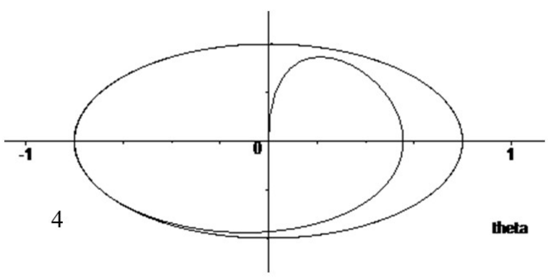
1


1
-1
0
1
theta
-1

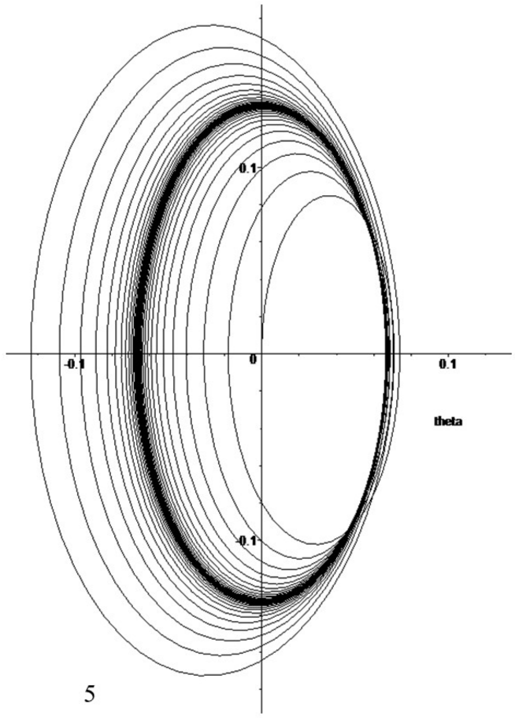
2


0
theta

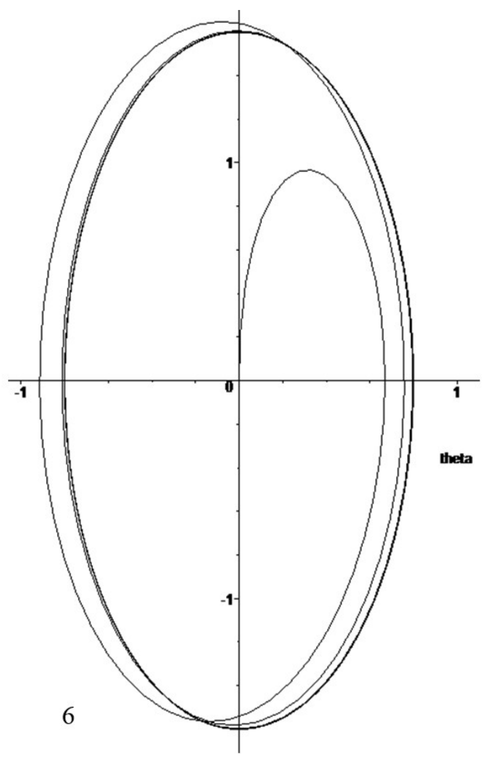
3


-1
0
1
theta

4

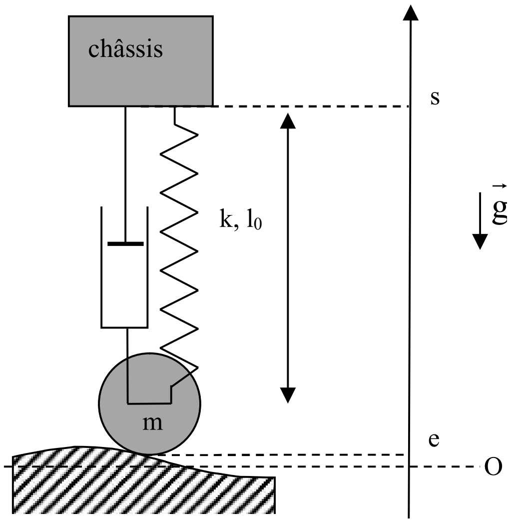

0.1
-0.1
0
0.1
theta
-0.1

5


1
-1
0
1
theta
-1

6

$\boxed{\text{M 5}}$: Voiture sur une route ondulée. (*Centrale*)



On souhaite étudier les oscillations du châssis d'une automobile. On adopte pour cela un modèle simplifié illustré sur le schéma ci-contre, mettant en jeu un pavé de masse M repéré par une cote verticale $s(t)$, qui modélise le châssis, ainsi qu'une roue supposée indéformable et de rayon R et de masse m, qui modélise l'ensemble des roues. Ces deux éléments sont liés par un ressort de longueur L, de raideur k et de longueur à vide L_0, et par un dispositif d'amortissement ayant pour effet d'exercer une force verticale de la forme $-a\dfrac{dL}{dt}$ sur le châssis.

La voiture se déplace sur une route ondulée dont le profil suit l'équation : $e(x) = e_m \cos\left(\dfrac{2\pi x}{d}\right)$

La vitesse horizontale du châssis est constante, notée V, et on néglige la variation de position horizontale du point de contact entre la roue et la route dans le référentiel lié au châssis.

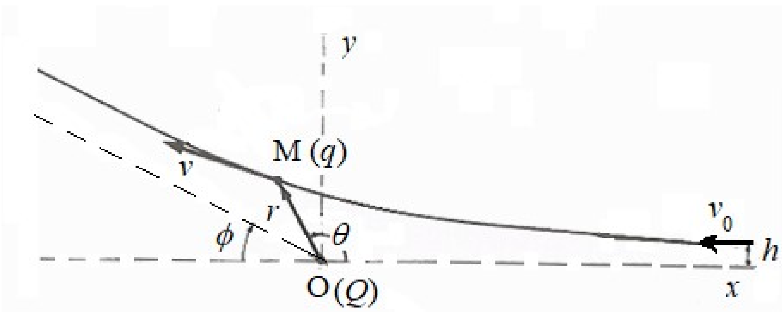
1- Déterminer l'amplitude des oscillations verticales du châssis.

2- Déterminer une condition pour que la roue ne décolle pas de la route.

3- Dans une scène du film *Le salaire de la peur*, un camion transportant de la nitroglycérine s'apprête à rouler sur un sol ondulé. Le conducteur explique qu'il faut rouler soit très lentement, soit très rapidement. Expliquer.

$\boxed{\text{M 6}}$: Expérience de type Rutherford. (*CCINP*)

On étudie le mouvement d'une particule M de charge q et de masse m qui s'approche d'une particule O de charge Q de même signe que q et de masse $m' \gg m$, avec un paramètre d'impact h et une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ (schéma ci-contre).



1- Montrer que le mouvement est plan.

On admet que la trajectoire est une branche d'hyperbole ayant l'allure ci-dessous. On appelle (Ox) l'axe parallèle $\overrightarrow{v_0}$ à passant par O, orienté à contre sens de $\overrightarrow{v_0}$, et on repère M en coordonnées polaires de centre O et d'axe (Ox). On note ϕ la déviation de M lors de son passage au voisinage de O.

2- Montrer que la loi des aires $r^2\dot{\theta} = C$ est vérifiée et déterminer l'expression de la constante C.

3- Exprimer en fonction de l'angle θ la composante selon (Oy) de la vitesse de la particule.

4- Montrer alors que : $\text{cotan}\left(\dfrac{\phi}{2}\right) = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{mv_0^2 h}{Qq}$.

M 7 : Etude d'une comète. (*Centrale 2*)

Une comète est passée au voisinage du soleil le 27 février 1843 sur une orbite quasi parabolique, la distance minimale au soleil étant $d = 6{,}1.10^{-3}R$ où $R = 1{,}5.10^{11}$ m est le rayon de l'orbite terrestre, supposée circulaire. On donne $v_0 = 30$ km/s pour la vitesse de la Terre sur son orbite. Les orbites de la comète et de la Terre sont supposées coplanaires.

1- Déterminer la vitesse maximale de la comète et sa constante des aires.

2- En réalité l'orbite de la comète est elliptique, de demi grand axe $a = \frac{d}{x}$ avec $x = 9{,}4.10^{-5}$. Déterminer l'année où la comète repassera au voisinage du soleil, puis les vitesses maximale v_{max} et minimale v_{min} de la comète sur son orbite.

3- Représenter qualitativement les orbites de la comète et de la Terre.
On note respectivement S, C et T les centres du Soleil, de la comète et de la Terre, et P le périhélie de l'orbite de la comète. On suppose que S, C et T étaient alignés dans cet ordre le 27 février 1843. Quel était ce jour-là la vitesse angulaire apparente de la comète dans le ciel terrestre ? La comète se déplaçait-t-elle d'est en ouest ou d'ouest en est ? Se déplaçait-elle plus vite que le Soleil ? On donne $R = 1{,}5.10^{11}$m.

4- On donne l'équation polaire de la conique dans un repère centré au foyer attracteur et d'axe polaire dirigé vers le périhélie : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$
Déterminer l'excentricité e de la comète en fonction de x et commenter.

5- Montrer que la quantité : $v_{max} d\,\vec{v} - v_0^2 R\,\vec{e_\theta}$ est constante au cours du mouvement de la comète, puis que cette propriété permet de retrouver l'équation polaire de la trajectoire.

M 8 : Effets des frottements de l'atmosphère sur un satellite. (*Centrale, Mines, CCINP*)

On s'intéresse au mouvement d'un satellite décrivant une trajectoire circulaire de rayon r autour de la Terre, de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km. On donne le champ gravitationnel à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}.

1- Exprimer la vitesse du satellite en fonction de r et de constantes. Retrouver la troisième loi de Képler. Proposer une A.N. avec des ordres de grandeur cohérents.

2- Trouver une relation simple entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du satellite et en déduire une expression de son énergie mécanique en fonction de r et de constantes.

3- Le satellite Spot est sur une orbite basse à une altitude de 800 km. De ce fait, l'atmosphère exerce sur lui une force de frottement dont on suppose qu'elle est proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse du satellite[1] ; on note α le coefficient de proportionnalité. Enfin, on suppose que l'effet des frottements est suffisamment faible pour pouvoir considérer le mouvement quasi-circulaire à tout instant.

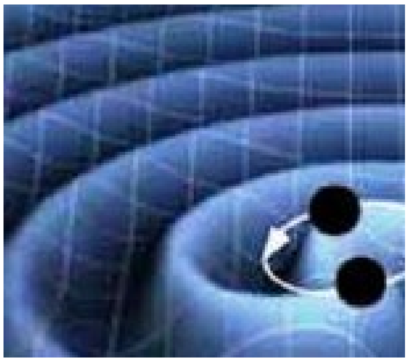
3a- Quelle est la dimension du coefficient α ? Expliquer sans calcul, mais en s'appuyant sur les résultats précédents, si le satellite s'éloigne ou se rapproche de la Terre et si sa vitesse augmente ou diminue.

3b- On constate que sur une révolution, l'altitude du satellite change de 1 m. Proposer une valeur approchée de α puis de la variation de vitesse du satellite.

3c- Déterminer enfin la variation d'altitude du satellite sur 1 mois, sur 1 an puis sur 10 ans.

[1] *Cet exercice est également posé avec une force de frottement proportionnelle à v au lieu de v², ou de la forme $-kmv^2/h$ où h est l'altitude du satellite (force plus intense à plus basse altitude car l'atmosphère y est plus dense).*

M 9 : Trou noir binaire. (*X*)



Deux trous noirs de même masse M orbitent sur une même trajectoire circulaire de rayon R, en restant constamment diamétralement opposés. Ce mouvement constitue une source d'ondes gravitationnelles, de sorte que ce trou noir binaire perd progressivement de l'énergie.

1- Le rayon de l'orbite augmente-t-il ou diminue-t-il à mesure que le trou noir binaire rayonne ? Qu'observera-t-on au bout d'un temps très long ?

2- En notant c la vitesse de la lumière, G la constante de gravitation universelle et ω la vitesse angulaire du mouvement, la puissance rayonnée s'écrit : $\mathrm{P} = \alpha \dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{c}^5}\omega^6\mathrm{M}^2\mathrm{R}^4$

Déterminer l'évolution $R(t)$ du rayon de l'orbite sous l'hypothèse d'un mouvement quasi circulaire.

3- On définit le rayon de Schwarzschild R_S du trou noir comme la distance à son centre en dessous de laquelle la vitesse de la libération calculée classiquement est supérieure à c.
Déterminer R_S en fonction des données.

4- Calculer l'énergie totale libérée sous forme d'ondes gravitationnelles par ce système binaire au cours de sa « vie », avant la fusion des deux trous noirs.

5- Le 14 septembre 2015, à 11 h 51, les deux interféromètres LIGO situés aux Etats-Unis enregistrent pour la première fois le passage d'une onde gravitationnelle ; cette infime déformation de l'espace-temps est détectée avec 7 millisecondes d'écart par les deux instruments séparés par 3000 kilomètres, de sorte que sa réalité ne fait aucun doute. En outre, le signal observé est parfaitement en accord avec les prévisions théoriques d'une émission due à la fusion de deux trous noirs de masses respectives 29 et 36 fois la masse du Soleil. Le dégagement d'énergie lors de la fusion est évalué à l'énergie de masse de trois Soleils [1].
Commenter.

M 10 : Modification de l'orbite d'un satellite. (***Mines***)

On considère un satellite de masse M décrivant une trajectoire circulaire de rayon r_0 autour de la Terre. On note $\overrightarrow{\mathrm{v}_0}$ son vecteur vitesse, T_0 sa période et E_0 son énergie mécanique.

1- Exprimer $\mathrm{v}_0 = \left\|\overrightarrow{\mathrm{v}_0}\right\|$, T_0 et E_m en fonction de r_0.

2- A un instant t_0 quelconque, la norme de la vitesse du satellite est brutalement modifiée de δv avec $\delta \mathrm{v} \ll \mathrm{v}_0$, sans modification de direction. Décrire la trajectoire observée à partir de t_0 et exprimer la nouvelle période du mouvement.

3- Même question si à t_0, la direction de la vitesse est brutalement modifiée, sa norme étant inchangée. On notera $\alpha = \left(\vec{\mathrm{v}}\left(\mathrm{t}_0^+\right), \vec{\mathrm{v}}\left(\mathrm{t}_0^-\right)\right)$

.

M 11 : Déviation d'un neutron par un noyau atomique. (***Centrale 2***)

L'énoncé et le programme python en version pdf ont été distribués en annexe ;
Le fichier python vous sera envoyé par mail si vous souhaitez l'exécuter, mais aucune modification du programme n'était demandée.

[1] https://www.cieletespace.fr/actualites/les-ondes-gravitationnelles-decouvertes-grace-a-la-fusion-de-deux-trous-noirs

M 12 : Stabilité d'une orbite circulaire. (*Mines*)

On considère une comète sphérique de masse m, à une distance r d'un astre de masse M considéré fixe. Cet astre est entouré d'un nuage de poussière de masse volumique ρ, à symétrie sphérique, qui exerce sur la comète une force : $\vec{F} = -\frac{4\pi}{3}\rho G\, r\, \vec{e_r}$

Les orbites circulaires sont-elles stables ?

M 13 : Approche semi-classique d'un trou noir. (*Mines*)

On considère un astre de masse m qui gravite autour d'un trou noir de masse M, à une distance $r(t)$ du centre O du trou noir. Une façon semi classique d'étudier ce mouvement est d'associer à ce mouvement une énergie potentielle : $E_p = -\frac{GmM}{r} - \frac{\alpha m}{r^2}$

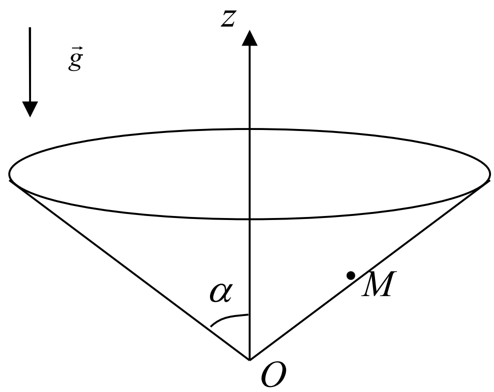
1- Déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par la distance $r(t)$.

2- Montrer qu'il existe des orbites circulaires stables de la masse autour du trou noir.

3- Discuter ce que l'on observe si, alors qu'elle se trouve sur une orbite circulaire stable, la masse est percutée et voit sa vitesse augmenter, sans changement de direction.

M 14 : Mouvement d'un point matériel dans un cône. (*Centrale*)

On étudie un point matériel M de masse m qui glisse sans frottement sur un support conique d'axe (Oz) vertical et de demi -angle au sommet α (voir figure ci-contre). On choisit de repérer ce point par ses coordonnées **cylindriques** (r, θ, z) d'axe (Oz).



A $t = 0$, on lance le point matériel sur le cône avec :

$z(0) = z_0 > 0$, $\dot{z}(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega > 0$.

1- Comment faut-il choisir ω pour obtenir un mouvement circulaire uniforme ? On notera ω^* cette valeur et on l'exprimera en fonction de z_0, α et g l'intensité du champ de pesanteur.

2- Dans la suite du problème ω est quelconque. Ecrire alors les trois équations scalaires obtenues en projetant le principe fondamental de la dynamique sur la base des coordonnées cylindriques. Déduire de l'une d'elles qu'au cours du mouvement du point, les variables r et θ sont liées par une relation de la forme : $r^2\,\dot{\theta} = \text{cst}$. Exprimer cette constante en fonction de z_0, α et ω et décrire les conséquences concrètes de cette loi sur le mouvement observé. Une telle loi est appelée « intégrale première du mouvement » : expliquer pourquoi. Le moment cinétique de M est-il conservé au cours de ce mouvement ?

3- Montrer que le système est conservatif et que l'énergie mécanique E_m du point M peut s'écrire :

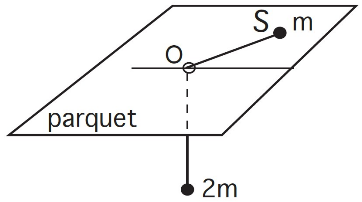
$$E_m = \frac{1}{2}\mu\,\dot{z}^2 + U_{eff}(z) \qquad \text{avec} \quad U_{eff}(z) = \frac{\mathcal{K}}{z^2} + mgz$$

où μ et $\mathcal{K}$ sont des constantes qu'on exprimera en fonction de m, z_0, α et ω .

4- Déterminer l'évolution de la coordonnée z du point lors de son mouvement dans le cône, puis décrire plus complètement ce mouvement. On distinguera les cas $\omega < \omega^*$, $\omega > \omega^*$ et $\omega = \omega^*$. M tombe-t-il au fond du cône ?

M 15 : Un jeu du chat et de la souris. (*Centrale*)

Sur un parquet horizontal très glissant et percé d'un trou en un point O choisi comme origine, se trouve une souris en plastique assimilable à un point matériel S de masse m.



S est attachée à l'une des extrémités d'un fil inextensible de longueur $2L$ qui est tendu, repose sur le parquet et passe dans le trou ; à l'autre extrémité du fil, dont la masse est négligeable, est attaché un objet ponctuel M de masse $2m$ susceptible de chuter dans le champ de pesanteur.

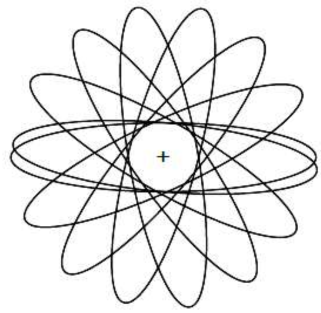
Pour les A.N., on prendra m = 100 g, L = 1 m et g = 9,8 m.s^{-2}.

Le point M étant situé juste en dessous du trou, on le lâche sans vitesse initiale à $t = 0$.

1a- Donner une relation simple entre les accélérations de S et M.

1b- La vitesse initiale de S étant nulle, déterminer sa position à tout instant et en déduire l'instant t_0 pour lequel S se trouve à la distance L de O. Quelle est alors sa vitesse ?

2- A cet instant t_0, énervé par le mouvement de la souris, le chat de la maison lui donne un coup de patte, ce qui lui procure une vitesse orthoradiale v_1 = 1 m/s.



2a- Déterminer une constante du mouvement de la souris et l'exprimer en fonction des données.

2b- Exprimer l'énergie mécanique totale du système formé de S et M et justifier qu'il s'agit d'une grandeur conservée.

2c- A l'aide d'un raisonnement graphique, décrire le mouvement de la souris. La trajectoire ci-contre est-elle possible ?

2d- La souris peut-elle tomber dans le trou du parquet ? M peut-il être éjecté vers le haut (en supposant que sa taille lui permet de passer à travers le trou…) ? Justifier.

M 16 : Sonde New Horizons : lancement et assistance gravitationnelle. (*D'après Centrale* 2)

New Horizons (« *Nouveaux Horizons* » en français) est une mission de l'agence spatiale américaine (NASA) dont l'objectif principal est d'étudier la planète naine Pluton et ses satellites, grâce à une sonde spatiale qui les a survolés mi-juillet 2015. Il est prévu qu'elle soit ensuite dirigée vers un autre corps de la ceinture de Kuiper, zone dont le système plutonien fait partie. *New Horizons* est la première mission spatiale qui explore cette région du Système solaire.

La sonde spatiale *New Horizons* a été lancée le 19 janvier 2006 par une fusée de forte puissance Atlas V-550. Elle a survolé Jupiter le 28 février 2007, ce qui lui a permis de gagner 4 km/s grâce à l'assistance gravitationnelle de cette planète. Le survol de Jupiter a également permis de calibrer les instruments, tout en faisant des observations scientifiques intéressantes sur le système de Jupiter, en particulier son atmosphère, ses satellites et son champ magnétique. *New Horizons* a ensuite entamé son long transit vers Pluton, qu'elle a survolé le 14 juillet 2015 à une distance de 11 069 km.

L'envoi d'une mission jusqu'à Pluton nécessite plus d'énergie qu'un lancement vers les huit planètes du système solaire. Pluton est située aux franges du système solaire, et pour que *New Horizons* puisse l'atteindre directement sans que cela prenne plusieurs dizaines d'années, il serait nécessaire de lui imprimer une vitesse qu'aucun lanceur n'a jamais atteinte. Les concepteurs de la mission ont ainsi opté pour une trajectoire indirecte ayant recours à la technique de l'assistance gravitationnelle : la sonde est lancée avec une vitesse héliocentrique (par rapport au Soleil) de 42,5 km/s en direction de Jupiter, s'approche de la planète avec une vitesse héliocentrique ayant chuté à environ

19 km/s, puis la survole à basse altitude, ce qui conduit à une déviation significative de sa trajectoire et à un gain de vitesse de 4 km/s par un pur effet gravitationnel ; elle poursuit ensuite sa course vers Pluton.

Le lancement se fait dans un climat de grande tension, car pour qu'une manœuvre d'assistance gravitationnelle puisse se réaliser, il est nécessaire que la planète survolée soit située à des emplacements bien précis ; de ce fait, la fenêtre de lancement est particulièrement courte : d'une durée de deux heures par jour, elle s'ouvre à compter du 17 janvier 2006 et se referme le 29 janvier. Une fenêtre de tir de secours est disponible pour les trois derniers jours de janvier, mais avec un glissement d'un an de la date de survol de Pluton ; en cas d'échec, il faudra ensuite attendre 13 mois.

Après deux reports dus à des conditions météorologiques non optimales, puis à une coupure de courant chez l'opérateur de la sonde spatiale APL, *New Horizons* est lancée le 19 janvier 2006 à 19 h 00 UTC (soit 14 h 00 heure locale), depuis la base de Cape Canaveral, en Floride, par une fusée Atlas V-551, version la plus lourde de ce lanceur. Pour que la sonde spatiale atteigne une vitesse suffisamment importante, la fusée comprend un troisième étage Star 48B à propergol solide, placé sous la coiffe avec la sonde spatiale relativement compacte. Les différents étages fonctionnent tel que prévu, et environ 45 minutes après le lancement, la sonde spatiale se sépare du dernier étage, avec une vitesse de 16,3 km/s, établissant un nouveau record dans ce domaine.

Les documents sont à la page suivante

Questions :

1- Phase de lancement :

On souhaite que la sonde, **une fois libérée de l'attraction terrestre**, ait une vitesse « initiale » $v_{i/S}$ de 42,5 km/s par rapport au Soleil.

1a- Quelle doit être la direction du vecteur vitesse « initiale » $\vec{v}_{i/S}$ pour que sa norme soit minimale dans le référentiel géocentrique ? Calculer cette valeur minimale $v_{i/T}$.

1b- Calculer alors la vitesse de lancement $v_{0/T}$ dans le référentiel géocentrique, c'est-à-dire la vitesse que doit avoir la sonde dans le référentiel géocentrique après la phase de propulsion par la fusée Atlas V-551 ; l'altitude de lancement sera négligée devant le rayon terrestre.

1c- Discuter l'influence du site de lancement et de la direction de lancement, puis calculer la vitesse minimale de lancement $v_{0/t}$ dans le référentiel terrestre. Commenter.

1d- Effectuer un schéma de la trajectoire de la sonde au voisinage de la Terre (trajectoire de libération), en indiquant la direction du Soleil.

2- Voyage vers Jupiter et Pluton :

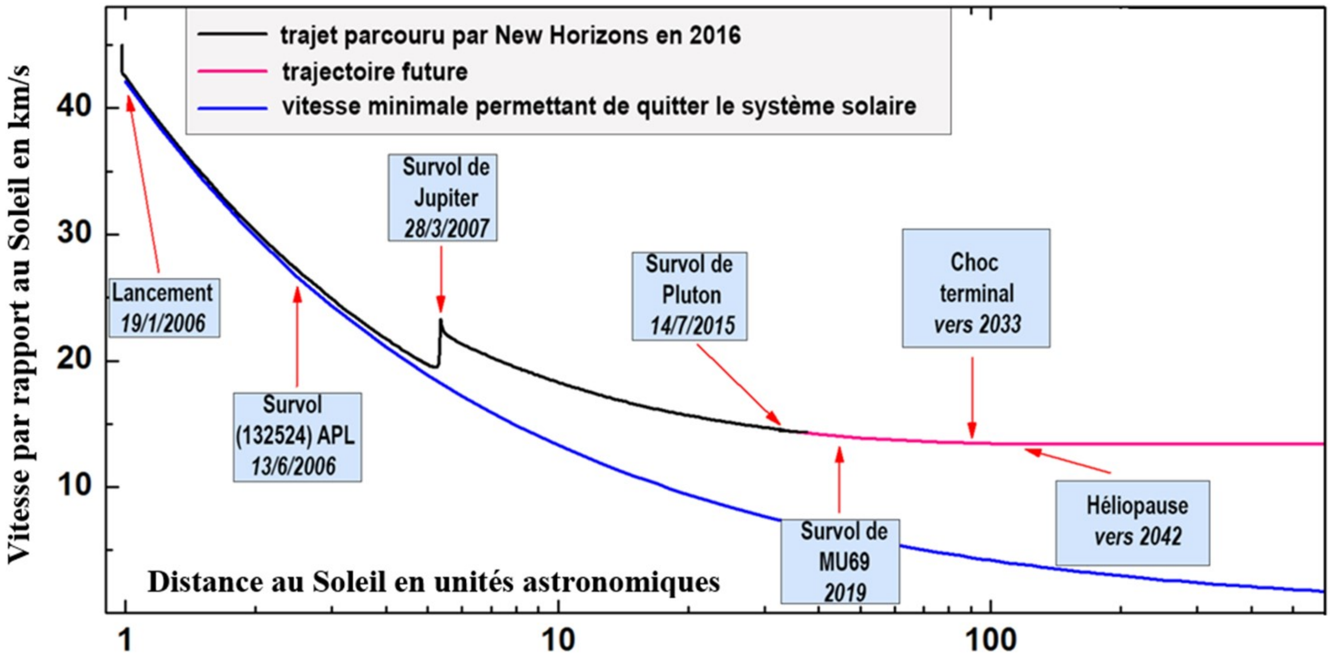
2a- La vitesse initiale est-elle suffisante pour atteindre Pluton en l'absence de toute perturbation gravitationnelle ? Commenter.

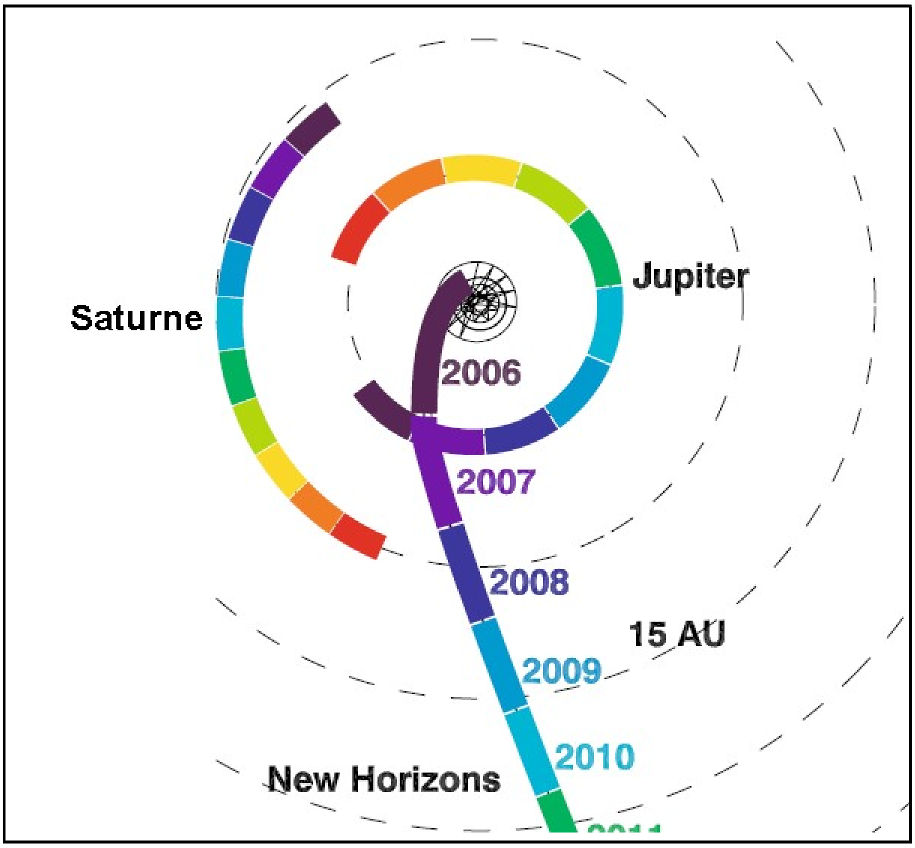
2b- Calculer la vitesse de la sonde lorsqu'elle croise la trajectoire de Jupiter et comparer à la vitesse de Jupiter sur son orbite.

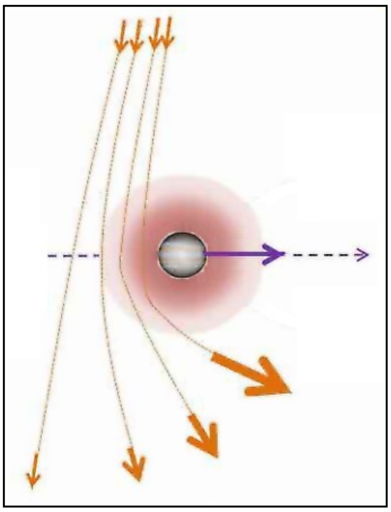
3- Assistance gravitationnelle :

3a- A l'aide de raisonnements et de schémas dans les référentiels héliocentrique et joviocentrique, expliquer le principe de l'assistance gravitationnelle.

3b- Proposer une méthode d'approche de Jupiter qui conduirait au contraire à un freinage gravitationnel.







Zoom de la trajectoire possible au voisinage de Jupiter, en fonction de l'altitude de survol.

Sur ce schéma, la position de Jupiter correspond à l'instant du minimum d'approche de la sonde.

Données :

Champ gravitationnel à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}

Rayon de la Terre : $r_T = 6{,}4.10^3$ km

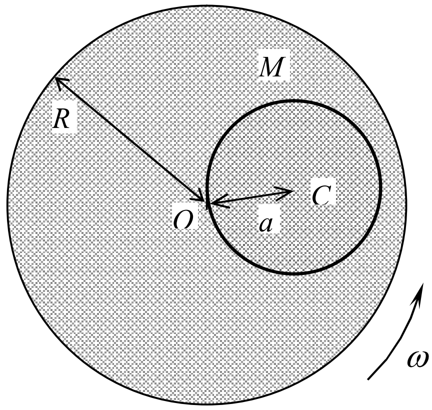
Vitesse de la Terre autour du Soleil : $v_T = 30$ km.s^{-1}

Distance Terre-Soleil : $R_T = 1{,}5.10^8$ km = 1 unité astronomique (ua)

Rayon moyen de l'orbite de Jupiter : $R_J = 5{,}2$ ua

Distance de Pluton au Soleil : entre 29 et 49 ua

M 17 : Mouvement d'un point sur un disque. (*Centrale*)



Un point M de masse m est astreint à se déplacer sans frottements selon une trajectoire circulaire de rayon a et de centre C. Le support de cette trajectoire est solidaire d'un disque horizontal de rayon R, dont le centre O appartient à la trajectoire, et qui tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe de symétrie de révolution.

On repère M le long de sa trajectoire par l'angle : $\varphi = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CM}\right)$.

1- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(t)$.

2- Déterminer les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

3- Etudier le mouvement observé par rapport au disque lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale au voisinage de $\varphi = 0$. Ce mouvement est-il périodique par rapport au sol ?

M 18 : Pendule de Foucault. (*Mines*)

On étudie le célèbre dispositif du pendule de Foucault destiné à mettre en évidence la rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On considère un pendule simple constitué d'un solide ponctuel A de masse $m = 30\,\text{kg}$ suspendue à l'extrémité inférieur d'un filin de longueur $L = 67\,\text{m}$. L'autre extrémité est fixée en un point O_1, placé à une hauteur égale à L sur la verticale du lieu de latitude λ.

On utilisera comme base du référentiel terrestre local $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$, $\overrightarrow{e_z}$ étant vertical ascendant, $\overrightarrow{e_x}$ orienté vers l'Est et $\overrightarrow{e_y}$ vers le Nord (pour compléter le trièdre orthonormé direct), O étant pris au niveau du sol.

La vitesse angulaire de rotation de la terre dans le référentiel géocentrique est $\omega_T = \dfrac{2\pi}{T_T}$ où $T_T = 86164\,\text{s}$ est le jour sidéral. On néglige tout frottement dans cette étude.

1- A partir de l'équation vectorielle du mouvement, décrire sans calcul la nature de la trajectoire du pendule dans le référentiel terrestre local, pour un pendule placé à l'équateur. Le pendule est lâché sans vitesse initiale. On considérera que l'amplitude du mouvement est faible.

2- On place maintenant le pendule au pôle Nord. Même question.

3- Entre ces deux situations extrêmes, on va étudier l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule.

3a- Montrer que la tension $\vec{T}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{T} = -T\dfrac{\overrightarrow{O_1A}}{L}$

3b- Expliciter l'équation du mouvement dans la base de référentiel terrestre local en projetant la relation fondamentale de la dynamique sur les trois axes. On notera $\overrightarrow{\omega_T}$ le vecteur rotation du référentuel terrestre par rapport au référentiel géocentrique. Montrer qu'alors les équations projetées sur les axes Ox et Oy peuvent s'écrire :

$$\ddot{x} - 2\omega_T \sin(\lambda)\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$
$$\ddot{y} + 2\omega_T \sin(\lambda)\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \quad (2)$$

en posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$

4- Résoudre ces équations en introduisant la variable complexe $u = x + iy$, sachant qu'initialement

$x(0) = x_0,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$

5- Quelle est la forme de la solution et la nature du mouvement dans un système d'axes tournant autour de (Oz) à la vitesse angulaire $\omega_T \sin(\lambda)$ dans le sens N-E-S-O ?

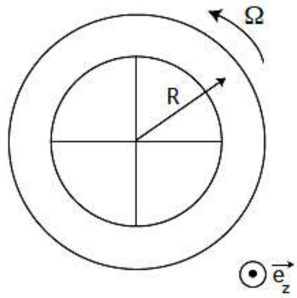
Vérifier la cohérence des résultats.

Le plan d'oscillation du pendule au lieu $\lambda = 48°51'$ (Paris) effectue un tour complet en $T = 31\text{h}47\,\text{min}$. En déduire la période de rotation de la Terre.

M 19 : Limite de Roche (*X* ; *Mines dans une version plus soft*)

Soit une comète en orbite circulaire de rayon *R* autour d'une planète. Montrer qu'en dessous d'une limite R_0, la comète se désagrège spontanément.

M 20 : Vaisseau spatial et apesanteur. (Extrait de *Centrale* 2)



1- Qu'est-ce que l'apesanteur ? Dans quelles conditions les astronautes peuvent-ils ressentir l'apesanteur ?

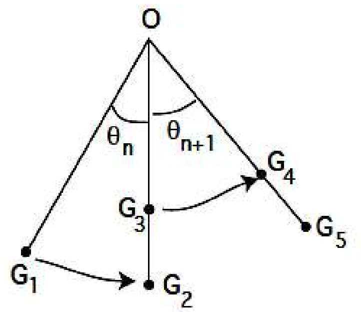
2- On considère le vaisseau spatial ci-contre, loin de tout astre, et en rotation sur lui-même à la vitesse angulaire Ω.

2a- Expliquer pourquoi, dans ce vaisseau, on ressent une pesanteur artificielle, puis déterminer Ω pour que l'accélération de cette pesanteur soit la même que sur Terre à 10% près, et ceci des pieds à la tête des astronautes.

2b- L'astronaute fait un jogging dans le vaisseau en tournant dans la couronne dans le sens de la rotation propre du vaisseau. Pourquoi est-ce plus difficile que sur Terre ?

3- Le vaisseau spatial est maintenant en orbite autour de la Terre, et toujours en rotation sur lui-même à la vitesse angulaire Ω. Qu'y a-t-il de différent avec la situation précédente ?

M 21 : Amplification paramétrique. (*Mines*)



Un enfant se balance sur une balançoire et amplifie son mouvement d'oscillation en modifiant sa position à bon escient sur la balançoire. Le schéma ci-contre décrit la trajectoire ($G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_5$) du barycentre G du système {enfant + balançoire} au cours d'une demi-période, le mouvement étant ensuite reproduit symétriquement pour compléter la période ; on néglige toute variation d'angle lors des étapes $G_2 \to G_3$ et $G_4 \to G_5$ et on suppose que $G_2G_3 = \delta l$ est très petit devant la longueur $l = OG_1$.

Ce système peut également modéliser un pendule rigide que l'on raccourcit et rallonge périodiquement, voire, en première approximation, un pendule non rigide. C'est ainsi que l'encensoir géant de Saint Jacques de Compostelle est mis en oscillation lors de certaines cérémonies, l'amplitude angulaire maximale pouvant atteindre 82° !

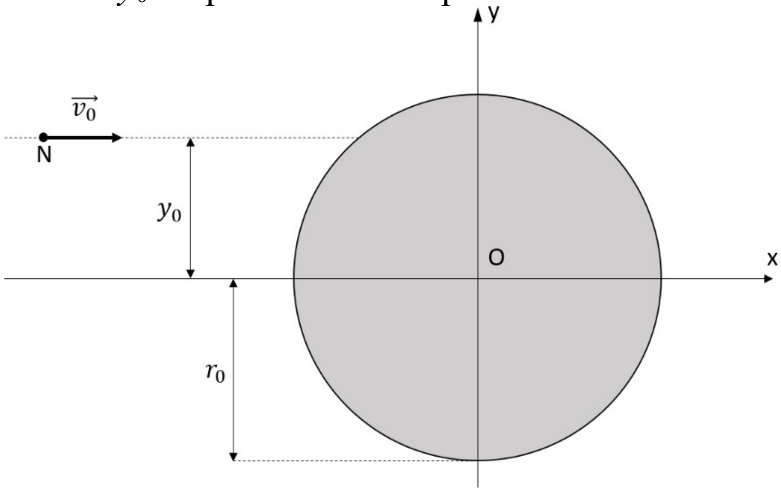
1- Expliquer qualitativement d'où vient l'énergie associée à l'amplification des oscillations et expliquant pourquoi le bilan énergétique n'est pas nul sur une période.

2- En analysant les grandeurs conservées lors des différentes étapes du mouvement, déterminer θ_{n+1} en fonction de θ_n , l et δl, ainsi que la variation relative d'énergie sur une période. Conclure. Pour cette analyse quantitative, on négligera toute dissipation liée aux frottements et on se limitera à des petits angles.

3- Ebaucher une modélisation plus réaliste dans le cas d'un pendule non rigide, type encensoir.

SUPPLEMENT

On étudie la déviation d'un neutron par un noyau atomique immobile. Le neutron de centre N, assimilé à un point matériel, arrive à une vitesse $\vec{v}_0$ vers le noyau, supposé sphérique de centre O et de rayon r_0. On note y_0 le paramètre d'impact relativement au centre O, y_0 étant inférieur à r_0.

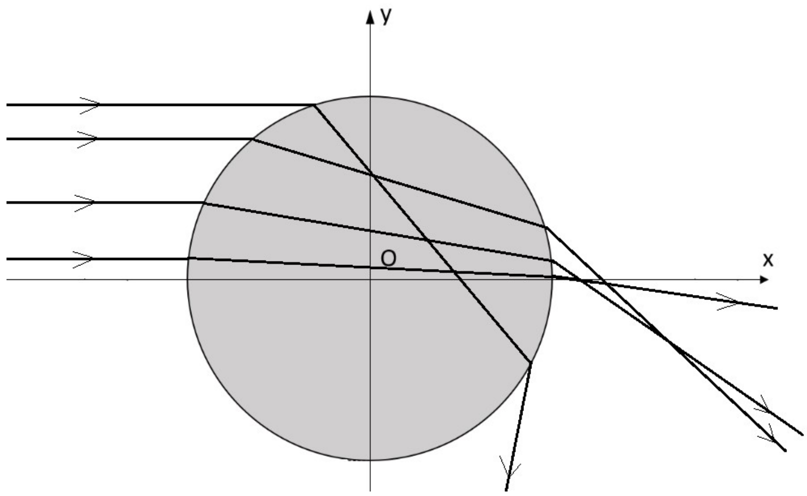


On suppose que le neutron n'est soumis qu'à la force exercée par le noyau qui est conservative et dérive d'une énergie potentielle de la forme :

$$U(r)=\frac{U_0}{2}\left(\mathrm{th}\left(\frac{r-r_0}{d}\right)-1\right)$$

où r = ON et U_0 et d sont deux constantes positives, avec $d \ll r_0$.

Lors de l'épreuve on dispose d'un script Python qui fournit la résolution numérique de la trajectoire et dont les conditions initiales peuvent être modifiées à l'initiative du candidat. Je donne ci-contre les trajectoires obtenues pour différents paramètres d'impact y_0 et une même vitesse $\vec{v}_0$.



1) Tracer qualitativement la fonction $U(r)$ et expliquer ce que représentent U_0 et d. La force ressentie par le neutron est-elle attractive ou répulsive ?
2) Montrer que le mouvement est plan ; le caractériser à l'intérieur et à l'extérieur du noyau.
3) Montrer que le mouvement du neutron est diffusif et qu'il est dévié d'un angle D que l'on exprimera en fonction des rapports y_0/r_0 et $mv_0^2/2U_0$.

   Tracer D en fonction de y_0/r_0, en discutant suivant la valeur de $mv_0^2/2U_0$.

Note : l'énoncé de l'exercice se poursuivait par une approche quantique du phénomène.