

PHYSIQUE STATISTIQUE

Revoyez impérativement les applications vues en cours, qui tombent en « question de cours » ou en exo, et tout particulièrement l'étude de l'oscillateur harmonique quantique et l'étude du paramagnétisme.

Questions de cours :

- * Equilibre de l'atmosphère isotherme. Interprétation statistique.
- * Loi de Boltzmann.
- * Système à deux niveaux d'énergie non dégénérés.
- * Equipartition de l'énergie. Capacité thermique des gaz.
- * Modèle d'Einstein d'un solide. Loi de Dulong et Petit.

Données : $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ - $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ - $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
 $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ - $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ unité de masse atomique $1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

PS 1 : Enrichissement isotopique par ultracentrifugation. (tout concours)

Masses atomiques : $M(\text{F}) = 19,0u$ $M(^{235}\text{U}) = 235,0$ $M(^{238}\text{U}) = 238,0$

Certains noyaux sont susceptibles de fissionner sous l'effet d'un bombardement de neutrons « lents » (vitesse de $2,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$) : on parle alors de noyaux fissibles. Le seul isotope fissible naturel est l'uranium 235. Dans les réacteurs REP, on privilégie cette fission par neutrons lents. Or l'uranium est un mélange naturel de deux isotopes principaux : l'uranium-238 (99,28%) et l'uranium-235 (0,714%). On améliore alors le rendement de la réaction de fission en enrichissant l'uranium naturel avec de l'uranium-235.

Une fois extrait du sol, le minerai d'uranium est transformé chimiquement en hexafluorure d'uranium UF_6 . Dans le procédé d'enrichissement par centrifugation, l'hexafluorure d'uranium est chauffé pour être transformé en vapeur, puis le gaz passe par une série de centrifugeuses que vont l'enrichir en U^{235} jusqu'à la teneur souhaitée (de 3 à 5%). Ensuite refroidi et solidifié, l'hexafluorure d'uranium sera transformé en combustible nucléaire prêt à l'emploi, sous forme de pastille.

Une centrifugeuse est constituée d'un cylindre de rayon $R = 10 \text{ cm}$ et de hauteur $h = 5 \text{ cm}$, tournant autour d'un axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = 50000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$. Le gaz UF_6 est introduit dans le cylindre. Les molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ de masse répartissent alors différemment et il est possible de déterminer la distribution spatiale des molécules dans la centrifugeuse.

On note \mathcal{R}_0 un référentiel lié au laboratoire, d'axe vertical (Oz). On suppose que \mathcal{R}_0 est galiléen. On suppose dans un premier temps que le cylindre est rempli d'un gaz, supposé parfait constitué de molécules identiques de masse m . L'ensemble est à la température $T = 353 \text{ K}$.

Soit un volume élémentaire de gaz $d^3\tau$ autour du point ml situé à la distance r de l'axe (Oz) de la centrifugeuse. On note $P(M) = P(r)$ le champ de pression dans le gaz, $\rho(r)$ la masse volumique du gaz et $n^*(r)$ sa densité particulière.

- 1- Soit \mathcal{R}_1 le référentiel lié au cylindre en rotation. Est-il galiléen ? Pourquoi ?
- 2- Faire un bilan des forces exercées sur la particule de fluide en équilibre dans le référentiel \mathcal{R}_1 . On exprimera la résultante élémentaire des forces de pression sous la forme de son équivalent volumique (sans démonstration ...)
- 3- Evaluer numériquement l'accélération d'entraînement subie par la particule de fluide en rotation. Justifier que, par la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

- 4- Dédire de la condition d'équilibre relatif de la particule de fluide la répartition $n^*(r)$ en fonction de $n^*(0)$, m , T , k_B , r et ω .
- 5- Montrer que la répartition $n^*(r)$ ainsi trouvée obéit à une statistique de Maxwell-Boltzmann, avec une énergie potentielle E_p dont dérive la force d'énergie d'entraînement.
- 6- On donne ci-dessous l'allure des densités particulières $n_1^*(r)$ et $n_2^*(r)$ des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r . En déduire le principe de base de l'enrichissement de l'uranium : on explicitera le protocole qui permet d'obtenir le gaz enrichi en ^{235}U .

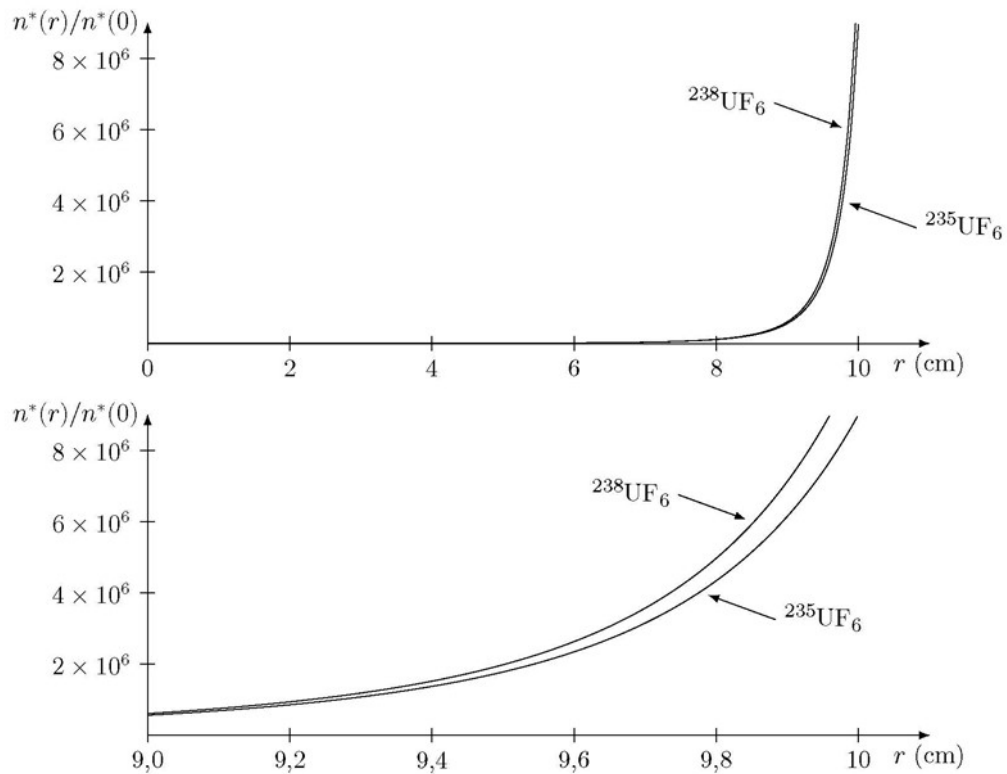


Figure 4 Densités particulières des molécules $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ en fonction de r

PS 2 : Capacité thermique du dihydrogène gazeux.

On s'intéresse à la capacité thermique du dihydrogène H_2 lorsqu'il est gazeux.

- 1- L'écart entre deux niveaux d'une molécule H_2 est de l'ordre de grandeur de $\Delta_{\text{trans}} = \frac{h^2}{m^* L^2}$ où $m^* = 3,345 \cdot 10^{-27}$ kg est la masse de la molécule et L la taille du récipient dans lequel le gaz est contenu.

Calculer $\Theta_{\text{trans}} = \frac{\Delta_{\text{trans}}}{k_B}$ pour une valeur réaliste de L . Conclure quant à l'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie pour les degrés de liberté de translation.

- 2- La distance entre les deux noyaux d'hydrogène dans la molécule H_2 est $a = 74,14$ pm .

2a- Vérifier que le moment d'inertie de la molécule par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe des noyaux est

$$I \approx \frac{1}{4} m^* a^2 . \text{ Calculer numériquement } I$$

2b- Rappeler les expressions du moment cinétique L et de l'énergie cinétique E_c d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction de son moment d'inertie I et de la vitesse de rotation ω . En déduire une expression de E_c en fonction de L et I uniquement.

2c- En mécanique quantique, l'expression de l'énergie de rotation en fonction du moment cinétique reste la même qu'en mécanique classique et le moment cinétique est quantifié : les valeurs possibles de L^2 sont $\ell(\ell+1)\hbar^2$ où ℓ est un entier positif ou nul. Exprimer le plus petit écart Δ_{rot} entre deux niveaux d'énergie de rotation de la molécule de dihydrogène en fonction de \hbar et I

2d- Calculer numériquement $\Theta_{\text{rot}} = \frac{\Delta_{\text{rot}}}{k_B}$.

3- On s'intéresse aux mouvements de vibration de la molécule. On note r la distance entre les deux noyaux d'hydrogène qui n'est plus nécessairement égale à a . L'énergie potentielle de déformation de la molécule est modélisée par : $E_p = E_0 \left(e^{-2\alpha(r-a)} - 2e^{-\alpha(r-a)} + 1 \right)$ avec $E_0 = 7,716 \cdot 10^{-19}$ J et $\alpha = 2,002 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$. L'énergie

cinétique de vibration est $E_c = \frac{1}{8} m^* \left(\dot{r} \right)^2$

3a- Tracer la courbe donnant E_p en fonction de r .

3b- On s'intéresse à des petites vibrations pour lesquelles $\alpha(r-a) \ll 1$. Trouver l'expression de la constante k telle que $E_p \approx \frac{1}{2} k (r-a)^2$. Calculer numériquement k .

3c- Exprimer l'énergie mécanique de vibration en fonction de $u = r - a$ et \dot{u} ? En déduire l'expression de la fréquence ν . Calculer numériquement ν .

3d- En mécanique quantique les niveaux d'énergie de vibration sont $\left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu$ où n est un entier. Exprimer le plus petit écart Δ_{vib} entre deux niveaux d'énergie de vibration. Calculer numériquement $\Theta_{\text{vib}} = \frac{\Delta_{\text{vib}}}{k_B}$

4- Estimer la capacité thermique du dihydrogène aux températures suivantes : 10K, 100 K, 1000K, 10 000 K.

PS 3 : Température d'un nuage de gaz interstellaire. (Mines)

On considère un nuage interstellaire constitué d'un gaz monomoléculaire. En observant les propriétés absorbantes du gaz dans l'IR lointain, on arrive à déterminer la population moyenne des 2 premiers niveaux d'énergie rotationnels de la molécule ; on constate alors que la population du 1^{er} niveau excité, d'énergie E_1 , est de l'ordre de 30% de la population de l'état fondamental, d'énergie E_0 .

- Sachant que $E_1 - E_0 = 4,7 \cdot 10^{-4}$ eV, proposer un ordre de grandeur de la température du nuage.
- Justifier l'observation dans l'IR lointain pour effectuer cette mesure.
- Dans quelle gamme spectrale faudrait-il observer pour étudier la population des états d'énergie vibrationnels ? Des états électroniques ?

PS 4 : Système à trois niveaux. (CCINP)

On considère un système en équilibre thermique à la température T , dont les N atomes peuvent occuper 3 niveaux d'énergie que l'on note respectivement $e_1 = -E_0$, $e_2 = 0$ et $e_3 = E_0$.

- 1- Calculer le nombre moyen d'atomes dans les 3 états et commenter les limites haute et basse température.
- 2- Déterminer l'énergie moyenne d'un atome et tracer son évolution en fonction de la température.
Commenter
- 3- Déterminer la capacité thermique du système et décrire qualitativement son évolution en fonction de la température.

PS 5 : Système à niveaux dégénérés.

On considère un système de N particules indépendantes en équilibre thermique à la température T , pouvant accéder à des niveaux d'énergie s'écrivant $e_n = n e_0$ avec n un entier positif. On suppose que le niveau d'énergie e_n est dégénéré n fois.

- 1- Déterminer la fonction de partition pour une particule.
- 2- Déterminer l'énergie moyenne d'une particule puis du système des N particules.
- 3- Déterminer la capacité thermique du système.

PS 6 : Interaction entre deux dipôle électrostatiques. (Mines)

- 1- Déterminer l'énergie moyenne d'une particule pouvant se trouver dans deux états d'énergies ε et $-\varepsilon$, au sein d'un ensemble macroscopique de particules identiques et indépendantes en équilibre thermique à la température T .
- 2- On considère un gaz où chaque molécule, supposée ponctuelle, possède un moment dipolaire permanent \vec{p} . On s'intéresse à la force d'interaction entre une molécule et sa plus proche voisine, distante de r , dont on constate qu'elle dépend de la température du gaz et décroît en $\frac{1}{r^7}$.
Pour simplifier l'étude, on suppose que les deux moments dipolaires sont constamment parallèles ou antiparallèles l'un à l'autre et toujours orientés le long de l'axe joignant les deux molécules. Montrer que ce modèle sommaire suffit à rendre compte de ces observations.
- 3- Comment s'appelle ce type de force d'interaction ? Concerne-t-elle uniquement les molécules polaires ? Est-elle indispensable pour rendre compte des propriétés des gaz ?

PS 7 : Magnétisme. (Centrale 2)

On considère un système de N moments magnétiques en équilibre thermique avec un thermostat à la température T et soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Le moment magnétique de chaque atome peut alors prendre 2 valeurs : $\vec{m} = \pm \mu_B \vec{u}_z$ où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$.

On note N_+ (respectivement N_-) le nombre d'atomes dont le moment magnétique vérifie $\vec{m} \cdot \vec{B} > 0$ (respectivement $\vec{m} \cdot \vec{B} < 0$). On rappelle que l'énergie potentielle associée au moment magnétique \vec{m} dans le champ magnétique \vec{B} est $E = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. On note χ_m la susceptibilité magnétique définie par $\vec{M} = \frac{\chi_m \vec{B}}{\mu_0}$ où \vec{M} est le moment magnétique moyen total du système. La loi de Curie indique que la susceptibilité magnétique est inversement proportionnelle à T .

- 1- Pouvez-vous donner un exemple concret de situation de ce genre ?
- 2- Calculer le moment magnétique moyen total \vec{M} en fonction de $a = \frac{\mu_B B}{k_B T}$.
- 3- Que représente a physiquement ? Proposer un ordre de grandeur de a dans le contexte d'un champ magnétique et d'une température usuels ? (Les valeurs des constantes fondamentales étaient fournies)
- 4- Montrer alors que χ_m vérifie la loi de Curie.
- 5- Calculer l'énergie totale moyenne du système, notée $U(a)$.
- 6- Calculer la capacité calorifique du système pour $a \ll 1$. Commenter.

On aborde maintenant une approche statistique alternative pour retrouver ces résultats.

7- Montrer que l'énergie moyenne du système ne dépend que de la variable $n = N_- - N_+$.

8- Montrer que le nombre de micro-états possibles associé à un macro-état donné est :

$$\Omega = \frac{N!}{((n - N)/2)!((n + N)/2)!}$$

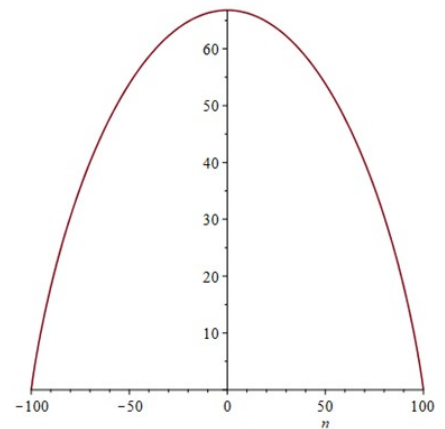
9- On admet que l'entropie du système s'écrit : $S = k_B \ln \Omega$

Tracer S/k_B fonction de n avec le script Python fourni (il y avait juste à lancer le script, les fonctions étaient déjà écrites ; la valeur de N pouvait être modifiée, on donne ci-contre l'allure obtenue pour $N = 100$) et commenter.

10- (Calculatrice...) On donne : $\ln(N!) \simeq N \ln N - N$. Dans cette

approximation, calculer $\frac{dS}{dn}$ et en déduire $\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V$; en déduire enfin

U en fonction de a et comparer au résultat de la question 5-.



PS 8 : Paramagnétisme et ferromagnétisme. (Mines)

On considère un solide paramagnétique en équilibre à la température T , composé de N atomes et soumis à un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Les atomes ont un moment magnétique \vec{m} dont la projection m_z suivant l'axe (Oz) ne peut prendre que deux valeurs : $-m$ ou m .

- 1- Rappeler l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique avec un champ magnétique.
- 2- Déterminer la probabilité des différents états magnétiques possibles pour un atome.
- 3- Déterminer le moment magnétique moyen M_z de l'ensemble du solide. Tracer M_z en fonction de B à T fixé et déterminer la valeur maximale de M_z . Expliquer.

Dans certaines substances dites ferromagnétiques, le champ magnétique engendré par les différents atomes prend des valeurs notables et ne peut pas être négligé par rapport au champ magnétique extérieur. On admet que l'expression de M_z obtenue précédemment reste valide à condition de remplacer B par $B + \lambda M_z$, λ étant une constante.

- 4- Discuter brièvement cette hypothèse.
- 5- Par une méthode graphique, montrer qu'un moment magnétique M_z non nul peut exister même si le champ magnétique extérieur est nul $B=0$, et ceci pour une certaine plage de température que l'on déterminera.
- 6- Voyez-vous une conséquence concrète de ce résultat.

PS 9 : Plasma. (X)

On considère une boîte de volume V contenant un plasma à l'équilibre à la température T ; ce plasma est constitué d'ions de charge $+e$ et d'électrons de charge $-e$.

Déterminer la densité volumique $n_-(\vec{r})$ des électrons, l'origine du repère étant choisie en la position d'un des cations.

PS 10 : Electrolyte. (ENS)

On considère un cylindre de rayon a , très long, de charge linéique $-\lambda e$, plongé dans une solution contenant des ions positifs. Déterminer la répartition des ions dans la solution, qualitativement puis quantitativement.