

PHYSIQUE QUANTIQUE

Revoquez impérativement les applications vues en cours, TD et DS !

Questions de cours :

- Equation de Schrödinger, équation de Schrödinger indépendante du temps.
- Evolution d'une particule libre.
- Puits quantique.
- Particule incidente sur une marche de potentiel.
- Effet tunnel.

Données : $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ - $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ - $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
 $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ - $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Il est fortement conseillé de connaître l'ordre de grandeur de chacune de ces constantes

MQ 1 : Fluctuations de position d'un oscillateur harmonique.

On considère un système physique de masse m assimilable à un oscillateur harmonique quantique unidimensionnel de pulsation propre ω_0 .

- 1- Déterminer la valeur minimale que peut prendre l'énergie moyenne de cet oscillateur harmonique puis, en supposant que cette valeur correspond à l'énergie de l'état fondamental, déterminer l'indétermination quantique sur la position de l'oscillateur dans son état fondamental.
Pourquoi cette indétermination peut-elle être qualifiée de fluctuation quantique ?
- 2- On suppose désormais que l'oscillateur se trouve au sein d'un milieu thermalisé à la température T . Expliquer pourquoi cet oscillateur est a priori soumis à des fluctuations thermiques de position et discuter la valeur de l'écart type de ces fluctuations en fonction de la température. On mettra en évidence une température critique.
- 3- Déterminer la valeur numérique de la température critique (ou en donner un ordre de grandeur) et décrire le type de fluctuations observé dans les 2 cas suivants :
 - 3a- Une masse macroscopique suspendue à un ressort.
 - 3b- Un micro-résonateur piézoélectrique de fréquence 6 GHz. Ce type de résonateur a été mis au point en 2010 en Californie et a pu être refroidi jusqu'à 25 mK.

MQ 2 : Etoile à neutrons. (Centrale 1)

Une étoile à neutrons est une étoile très dense de masse M égale à celle du soleil et de rayon R beaucoup plus faible que celui-ci, uniquement composée de neutrons de masse m .

- 1- Quel est le nombre de neutrons N dans l'étoile ?
- 2- En considérant que les neutrons sont confinés dans un volume V/N , montrer que, à une constante

multiplicative près, l'énergie cinétique de l'étoile s'écrit : $E_c = \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{m R^2}$

- 3- Evaluer l'énergie de cohésion de l'étoile en fonction de G , M , R .
- 4- Donner l'énergie totale de l'étoile et en tracer le graphe en fonction de R . Montrer l'existence d'un rayon d'équilibre R_{eq} .
- 5- En déduire la masse volumique de l'étoile et comparer à la densité d'un édifice atomique et d'un noyau atomique

MQ 3 : Potentiel quadrique.

Un quanton de masse m astreint à se déplacer sur un axe (Ox) , est soumis au potentiel $V(x) = gx^4$ avec $g > 0$. Expliquer pourquoi son énergie est quantifiée et estimer l'énergie de son état fondamental.

MQ 4 : Effet photoélectrique. (Centrale, exercice mis en ligne) Voir document annexe

MQ 5 : Par quelle fente est passé le photon dans l'expérience d'Young ?

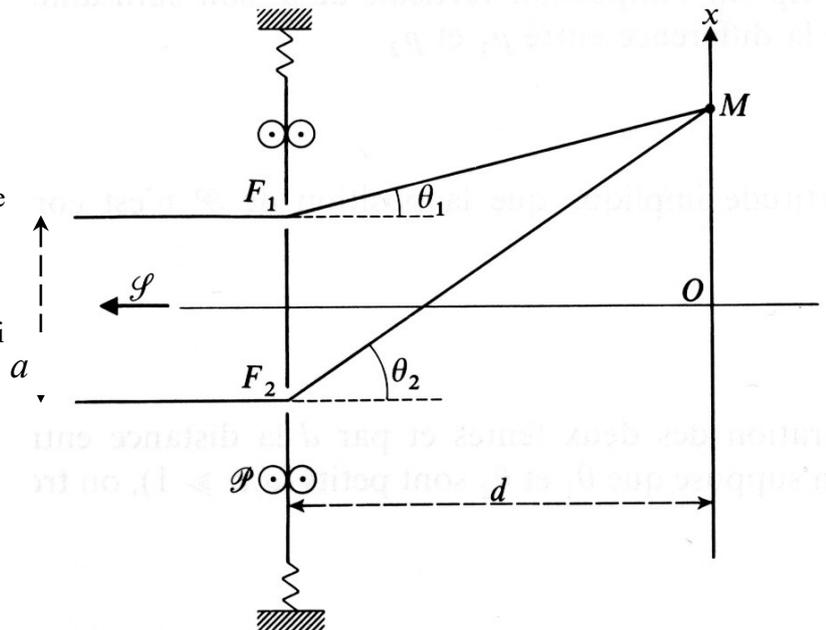
(D'après un oral de Centrale mis en ligne)

Une expérience de fentes d'Young photon par photon est conduite avec une source S monochromatique de longueur d'onde ω_0 .

Elle possède une particularité : la plaque dans laquelle sont percées les fentes est montée de façon à pouvoir se déplacer verticalement dans son plan et qu'il soit ainsi possible de mesurer les impulsions verticales qui lui sont transférées (figure ci-contre).

Considérons un photon qui viendrait frapper l'écran au point M en passant par l'une des deux fentes.

- 1- Montrer que l'impulsion (la quantité de mouvement) du photon varie lors de son passage à travers la fente et que cette variation n'est pas la même selon la fente par laquelle il est passé.



On admet que la quantité de mouvement du système plaque – photon est conservée lors du passage du photon à travers une fente.

- 2- Déterminer la sensibilité que doit avoir le détecteur de quantité de mouvement de la plaque pour distinguer entre les deux chemins.

Que cette sensibilité soit accessible expérimentalement ou non, nous venons de concevoir une expérience qui permet à la fois d'obtenir des interférences et de savoir par quelle fente est passé chaque photon !

- 3- Pourquoi cette expérience de pensée est-elle en profonde contradiction avec la théorie quantique ?

En réalité, le raisonnement précédent est incomplet : le seuil de détection de la quantité de mouvement de la plaque est tellement faible que la prise en compte d'effets quantiques au niveau de la plaque elle-même est nécessaire.

- 4- Montrer que la position verticale de la plaque est alors entachée d'une indétermination dont on donnera l'ordre de grandeur en fonction de a , d et ω_0 .
- 5- Dédurre de cet ordre de grandeur que dans notre expérience de pensée, les franges d'interférences sont en réalité invisibles, et conclure.

MQ 6 : Electron confiné. (Centrale 1)

On étudie un électron de masse m_e confiné entre deux couches d'atomes de platine, espacées d'une longueur l . Pour $l = 5,5 \cdot 10^{-11}$ m, on mesure une énergie fondamentale de 100 eV ; pour $l = 2,0 \cdot 10^{-11}$ m, on mesure deux énergies possibles à 40 et 160 eV.

- 1- Calculer les niveaux d'énergie d'un électron confiné dans un puits de potentiel infini.
- 2- Montrer que le modèle du puits infini permet d'expliquer ces observations si on attribue une masse effective à l'électron et déterminer cette masse dans chacune des 2 situations.
- 3- En réalité, la théorie quantique conduit à adopter une masse effective $m_{eff} = 0,59 m_e$. Montrer que cela peut néanmoins s'expliquer par une profondeur finie du puits de potentiel, puis estimer cette profondeur dans chacune des 2 situations.

MQ 7 : Molécule de Benzène.

Dans une liaison chimique « double », 4 électrons sont mis en jeu : 2 d'entre eux sont appelés électrons σ et sont localisés entre les deux atomes formant la liaison (ils sont dans des états quantiques semblables aux électrons mis en jeu dans une liaison covalente simple) ; les 2 autres sont appelés électrons π et ne sont pas nécessairement localisés.

La molécule de benzène, de formule brute C_6H_6 est une molécule cyclique possédant 6 électrons π qui sont entièrement délocalisés le long des 6 carbones formant le cycle.

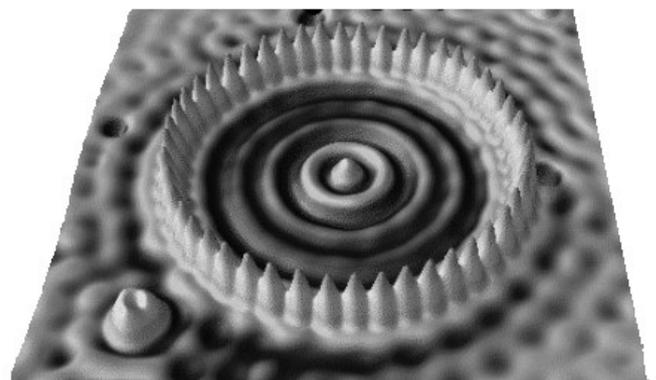
Les orbitales π de la molécule de benzène peuvent être modélisés de façon très approximative en considérant les fonctions d'onde et les énergies d'une particule quantique astreinte à se déplacer sur un cercle de rayon a . On adopte une modélisation unidimensionnelle en supposant qu'une particule contrainte de se déplacer sur le cercle se déplace en fait sur le segment $0 \leq x \leq 2\pi a$ avec une énergie potentielle $V(x) = 0$. Un état stationnaire de cette

particule est représenté par la fonction d'onde $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$

- 1- On cherche une fonction d'onde propre sous la forme $\varphi(x) = A e^{ikx}$. Déterminer k et justifier qu'on peut choisir A réel. Normaliser cette fonction d'onde propre sur l'intervalle $[0, 2\pi a]$
- 2- On adopte des conditions aux limites dites périodiques : $\varphi(0) = \varphi(2\pi a)$
 - 2a- Interpréter ce choix
 - 2b- Montrer qu'on aboutit à une quantification des niveaux d'énergie. On utilisera un nombre quantique, noté m . Interpréter pourquoi certains niveaux d'énergie sont doublement dégénérés (c'est-à-dire que deux valeurs distinctes de m conduisent à une même valeur de l'énergie).
 - 2c- Représenter sur un diagramme énergétique les premiers niveaux d'énergie.
- 3- on traite les 6 électrons π du benzène comme des particules quantiques astreintes à se déplacer sur un cercle de rayon a
 - 3a- A l'état fondamental, les 6 électrons occupent les niveaux d'énergie accessibles de façon à minimiser l'énergie totale de la molécule, tout en respectant la règle de Pauli selon laquelle il ne peut pas y avoir plus de deux électrons dans le même état quantique spatial (et ces deux électrons diffèrent alors par leur état de spin). Représenter l'état fondamental du système sur le diagramme énergétique construit à la question précédente.
 - 3b- Sachant que le benzène présente une bande d'absorption à 255 nm, en déduire une valeur numérique de a . Commenter le résultat obtenu sachant que la longueur de la liaison C-C vaut 142 pm.
4. On considère maintenant que la molécule étudiée peut recevoir de l'énergie par interaction avec d'autres molécules au sein d'un environnement thermalisé à la température T . Ces interactions sont-elles susceptibles de modifier l'état électronique de la molécule ? On discutera en fonction de T et on mettra en évidence une température critique.

MQ 8 : Corail quantique. (Centrale 1)

En 1993, une équipe de l'entreprise IBM a réussi à déposer sur une surface métallique de cuivre 48 atomes de fer formant un cercle de rayon 7,1 nm, en les manipulant avec la pointe d'un microscope à effet tunnel. La manipulation a été effectuée à la température très basse de 4 K afin que l'agitation thermique ne désassemble pas la structure. Les atomes de fer forment alors une barrière quasi infranchissable pour les électrons libres du cuivre situés à l'intérieur du cercle (à la manière d'une barrière de corail qui coupe les vagues de l'océan, d'où le nom de corail quantique, ou encore d'enclos quantique donné à cette structure).



La photo ci-dessus a été obtenue au microscope à effet tunnel et permet de visualiser la répartition de la densité électronique en fonction de la position pour ce corail quantique.

- 1- Expliquer le principe d'une mesure au microscope à effet tunnel et expliquer pourquoi on visualise la répartition de la densité électronique.
- 2- En modélisant la situation par un puits de potentiel infini unidimensionnel et en exploitant la photo, estimer l'énergie des électrons piégés dans le corail.
- 3- Il est possible d'affiner le modèle en effectuant une étude bidimensionnelle et en paramétrant en coordonnées polaires (r, θ) centrées au centre du corail, désormais considéré comme un puits de potentiel infini circulaire de rayon R .

En supposant que la fonction d'onde ne dépend pas de la variable θ , estimer à nouveau l'énergie des électrons piégés dans le corail et commenter.

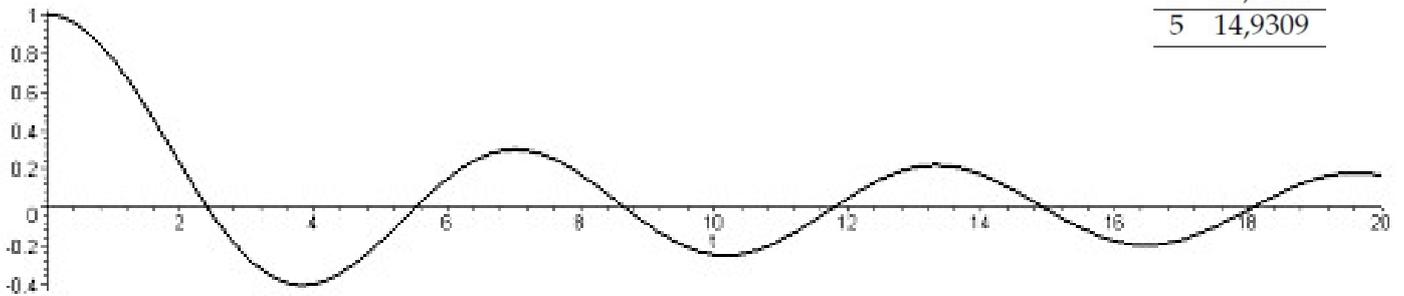
Cette hypothèse d'indépendance en θ peut-elle être justifiée à partir de la photo ?

Donnée : Laplacien d'une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindro-polaires : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$

Annexe : fonction de Bessel J_0

Soit l'équation différentielle : $x^2 f''(x) + x f'(x) + (x^2 - n^2) f(x) = 0$ où n est entier. L'unique solution de cette équation qui soit définie en 0 est la $n^{\text{ème}}$ fonction de Bessel de première espèce notée J_n . On donne ci-dessous le graphe de J_0 et ci-contre un tableau des 5 premiers zéros de J_0 .

1	2,4048
2	5,5201
3	8,6537
4	11,7915
5	14,9309



MQ 9 : Enrichissement isotopique. (Centrale)

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans le potentiel $V(x)$ (marche de potentiel) défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{Pour } x < 0 \text{ (région I)} \\ V_0 > 0 & \text{Pour } x \geq 0 \text{ (région II)} \end{cases}$$

Une source envoie, depuis $-\infty$, un faisceau de particules quantiques constitué d'un mélange homocinétique de 2 isotopes. On souhaite utiliser le phénomène de réflexion sur la marche de potentiel pour modifier la composition isotopique du mélange.

- 1- Expliquer pourquoi il est nécessaire que l'énergie E des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel V_0 si l'on souhaite modifier la composition isotopique du mélange. Prévoir qualitativement si le faisceau réfléchi est plus riche ou plus pauvre en isotope de plus grande masse.
- 2- Les particules quantiques ont une masse m énergie $E > V_0$. Déterminer la probabilité de réflexion R d'une particule quantique par la marche de potentiel. Représenter l'allure de R en fonction de E pour $E > V_0$. Compléter ce graphe en représentant aussi R pour $E < V_0$.
- 3- On se place dans la limite où $E \gg V_0$
 - 3a- Donner l'expression approchée de R correspondant à cette limite.
 - 3b- On note m_1 et m_2 les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules quantiques incidentes. Toutes ces particules quantiques sont renvoyées avec la même vitesse. Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion R_1 et R_2 diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ en fonction des rapports des masses $\frac{m_1}{m_2}$.
 - 3c- Le faisceau réfléchi est-il enrichi en isotope le plus lourd ou le plus léger ?

MQ 10 : Trier des neutrons.

On souhaite trier les neutrons d'un faisceau homocinétique lent, en fonction de leur état de spin. Pour cela, on fait passer le faisceau d'une zone $x < 0$ où le champ magnétique est nul à une zone $x > 0$ où le champ magnétique est uniforme, normal à l'axe (Ox) et de norme B_0 .

Sachant que les neutrons sont des particules de spin $\frac{1}{2}$, expliquer pourquoi un tri s'opère à l'interface $x = 0$ et discuter la proportion de neutrons de spin up obtenue dans la direction du faisceau incident.

MQ 11 : Diffusion par un puits de potentiel. (Début d'un exercice des Mines)

Une particule de masse m se déplace librement le long d'un axe (Ox) avec une énergie E et une quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar k \vec{u}_x$. Elle rencontre un puits de potentiel de profondeur V_0 et de largeur $2a$.

A quelle condition sur E la particule franchit-elle le puits avec une probabilité égale à 1 ?

MQ 12 : Résonance de transmission sur un puits de potentiel.

On étudie la diffusion d'une onde de matière sur un puits de potentiel de profondeur fini. Le puits de potentiel

considéré vaut :
$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{Pour } x < 0 \text{ (région I)} \\ -V_0 & \text{Pour } 0 \leq x \leq d \text{ (région II)} \\ 0 & \text{Pour } x > d \text{ (région III)} \end{cases} \quad (\text{avec } V_0)$$

1- On commence par envisager le cas d'une particule classique d'énergie $E = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$ eux se déplaçant dans le sens des x croissants.

Décrire le mouvement de cette particule dans chacune des 3 régions (on donnera en particulier la vitesse de déplacement de la particule classique dans chacune des 3 régions)

2- On souhaite maintenant déterminer les états stationnaires d'une particule quantique d'énergie $E > 0$, soumise à une énergie potentielle $V(x)$. On pose $\hbar q = \sqrt{2m(E + V_0)}$.

2a- Dans la région III, la fonction d'onde se met sous la forme : $\psi(x < 0, t) = (e^{ikx} + r.e^{-ikx})e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$

Dans la région III, on écrit : $\psi(x > d, t) = t.e^{ikx}e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$. On admet que les constantes r et t sont réelles. La constante k est un réel positif.

Interpréter l'écriture proposée pour la fonction d'onde dans les régions I et III. Etablir la relation liant la constante k à l'énergie E .

2b- Exprimer la fonction d'onde dans la région II en faisant intervenir q .

3- Ecrire les relations de raccordement en $x = 0$ et en $x = d$.

4- Donner, sans calcul, la relation liant $|r|^2$ et $|t|^2$. Quel est son sens physique ?

5- Montrer que, dans la limite $E \rightarrow 0$, on a $r \rightarrow -1$ si l'on suppose $\sin(qd) \neq 0$. Ce résultat a-t-il un équivalent en mécanique classique ou est-il de nature purement quantique ?

6- Montrer que dans la limite où $E \rightarrow 0$ et $\sin(qd) = 0$, on peut avoir $r = 0$.

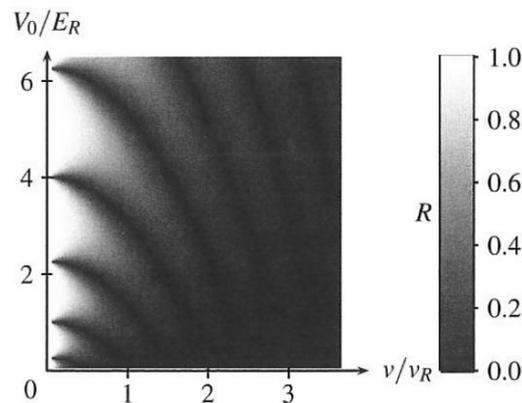
7- La figure suivante représente la probabilité de réflexion R en fonction de la vitesse v de la particule et de la profondeur V_0 du puits de potentiel. L'échelle spatiale caractéristique d

permet de construire deux grandeurs $v_R = \frac{\hbar}{md}$, homogène à

une vitesse et $E_R = \frac{1}{2}mv_R^2$, homogène à une énergie, qui

permettent d'utiliser des variables sans dimensions $\frac{v}{v_R}$ et $\frac{V_0}{E_R}$

La couleur blanche correspond à la réflexion totale ($R = 1$) et la couleur noire à une transmission totale ($T = 1$).



7a- Contrôler que les valeurs de R sur le graphe correspondent à l'analyse précédente pour $v \rightarrow 0$

7b- Interpréter la transmission totale à « grande » vitesse.

- 7c- On considère un faisceau incident de particules, dont les vitesses se distribuent entre $0,2.v_R$ et $0,8.v_R$, avec une vitesse moyenne $v = \frac{v_R}{2}$. La profondeur du puits est ajustée à $V_0 = 2E_R$. Décrire la distribution des vitesses des particules transmises. Cette configuration réalise un filtre passe-haut de vitesse.
- 7d- Comment peut-on choisir la profondeur du puits de potentiel pour réaliser un filtre passe-bas avec la même distribution initiales des vitesses ?
- 7e- Ordre de grandeur : ces filtres sélectifs de vitesse ont été développés par l'équipe de D. Guéry-Odelin, à l'université Paul Sabatier de Toulouse. Ce sont des atomes de rubidium qui sont utilisés, de masse $m = 1,45.10^{-25}$ kg, sur un réseau de puits de potentiel de largeur $d = 660$ nm. Donner la valeur numérique de v_R , E_R , et $T_R = \frac{E_R}{k_B}$ (la constante $k_B = 1,38.10^{-23}$ JK⁻¹ est la constante de Boltzmann)

MQ 13 : Effet Ramsauer-Townsend. (*Mines*)

En 1921 Ramsauer constate que pour certaines valeurs particulières de l'énergie incidente, des gaz rares (hélium, argon ou néon) sont parfaitement transparents à des faisceaux d'électrons de basse énergie. Cela peut s'expliquer par le modèle unidimensionnel suivant.

On considère un électron de masse m et d'énergie E se déplaçant le long d'un axe (Ox) depuis $-\infty$ vers l'origine O où se trouve un atome du gaz. On note $\psi(x,t)$ la fonction d'onde de l'électron et $V(x)$ le potentiel auquel celui-ci est soumis, du fait de la présence de l'atome, avec $V(x) = 0$ pour $|x| > a$ et $V(x) = -V_0$ pour $|x| < a$.

On pose : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $q^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}$

- 1- Donner la forme de $\psi(x,t)$ sur tout l'axe pour un état stationnaire d'énergie E .
- 2- On note T la probabilité de trouver l'électron en $x = +\infty$. Exprimer T à partir des expressions obtenues à la question précédente.
- 3- Exhiber un système d'équations permettant d'obtenir T en fonction des données.

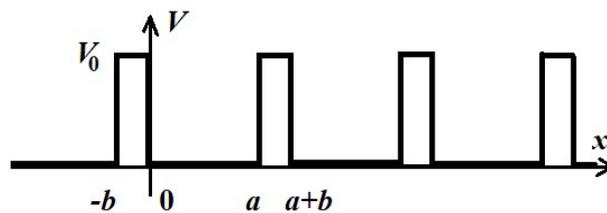
4- On admet qu'après calcul, on obtient :
$$T = \frac{16k^2q^2}{\left| (q+k)^2 - e^{4iqa} (q-k)^2 \right|^2}$$

Expliquer l'effet Ramsauer-Townsend.

- 5- Pour l'hélium, l'énergie incidente à laquelle le phénomène se produit est $E = 0,7$ eV. Sachant que le rayon de l'atome d'hélium est de $0,1$ nm, calculer la profondeur V_0 du puits de potentiel et commenter la valeur obtenue.
- 6- Quel phénomène observera-t-on aux très faibles énergies E ?

MQ 14 : Electron dans un potentiel périodique (1).
(Centrale 2)

On considère un électron plongé dans un potentiel périodique dont 4 périodes sont représentées ci-contre et on l'étudie dans un état stationnaire d'énergie E comprise entre 0 et V_0 .



1- Montrer que l'on peut écrire la fonction d'onde spatiale de l'électron sous la forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \exp(iKx) + B \exp(-iKx) & \text{pour } 0 < x < a \\ C \exp(qx) + D \exp(-qx) & \text{pour } a < x < a + b \end{cases}$$

en précisant les expressions de K et q . Donner deux relations entre A, B, C, D, K et q .

2- On admet que dans tout l'espace cette fonction d'onde est nécessairement de la forme : $\varphi(x) = u(x) \times e^{ikx}$ où u est une fonction périodique de x , de même période que V , et k un réel quelconque. Par des arguments de continuité en $x = 0$, déterminer deux autres relations entre A, B, C, D, K et q .

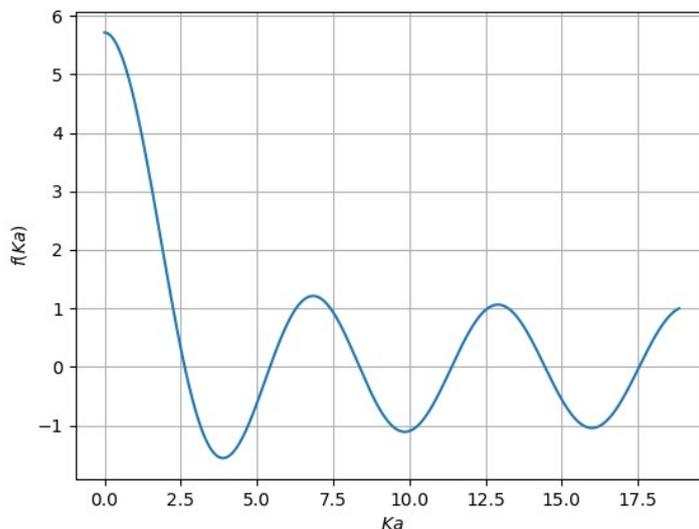
3- On admet que ce système de quatre équations aboutit à la relation suivante :

$$\frac{q^2 - K^2}{2qK} \sinh(qb) \sin(Ka) + \cosh(qb) \cos(Ka) = \cos(k(a + b))$$

Comment cette relation a-t-elle été obtenue à partir du système ?

4- On suppose désormais que la taille b des barrières de potentiel est très faible devant a et que l'énergie du puits E est très faible devant V_0 . On peut alors traiter le problème à partir de la relation précédente, en passant à la limite : $\{ b \rightarrow 0 ; V_0 \rightarrow \infty \}$, le produit $P = q^2 \frac{ab}{2}$ restant fini.

Exhiber une fonction f telle que : $f(Ka) = \cos(ka)$ et tracer cette fonction à l'aide du script python fourni, pour $Ka \in [0; 6\pi]$ et $P = \frac{3\pi}{2}$. On obtient le graphe ci-dessous :

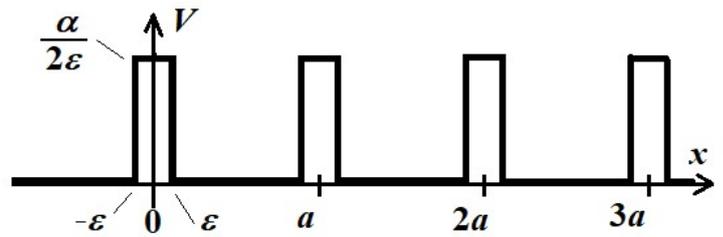


5- En exploitant ce graphe, montrer que l'ensemble des énergies E possibles pour l'électron est formé d'intervalles disjoints, appelés « bandes permises », séparés par des « bandes interdites » dont la largeur décroît à mesure que les énergies étudiées sont plus élevées.

6- A quelle situation physique ce modèle, appelé modèle de Kronig et Penney, peut-il selon vous s'appliquer ?

MQ 15 : Electron dans un potentiel périodique (2). (Centrale 1)

On considère un électron plongé dans un potentiel périodique dont 4 périodes sont représentées ci-dessous et on l'étudie dans un état stationnaire d'énergie E comprise entre 0 et V_{\max} . On se place en outre à la limite où $e \rightarrow 0$, a restant fini ; on dit alors que le profil de potentiel est un peigne de Dirac.



On admet les propriétés suivantes :

- Dans la limite du peigne de Dirac, la fonction d'onde spatiale vérifie :
$$\begin{cases} \varphi(0^-) = \varphi(0^+) \\ \varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \varphi(0) \end{cases}$$

- Théorème de Bloch : compte tenu de la périodicité spatiale du potentiel, il existe un réel q tel que : $\forall x \quad \varphi(x+a) = \varphi(x) \times \exp(i\theta)$

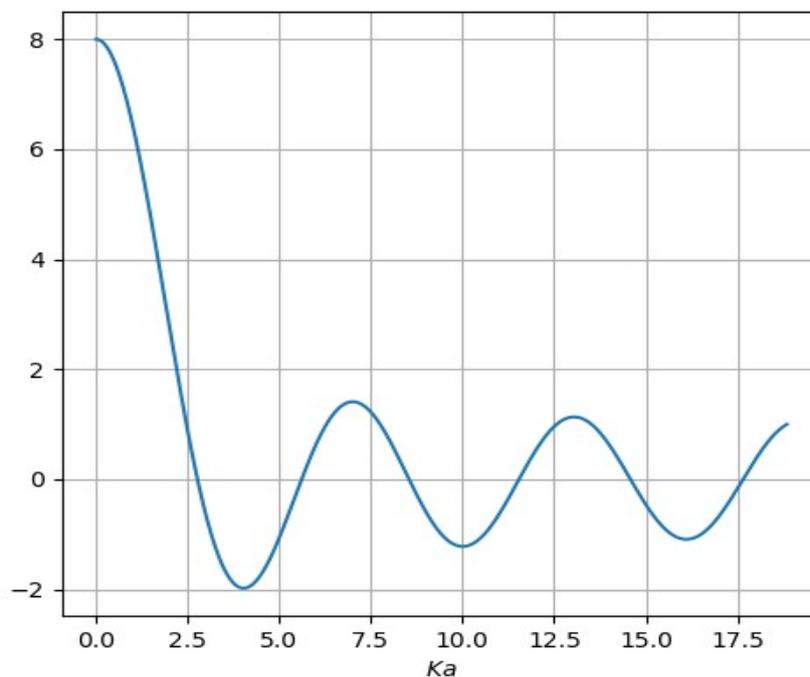
1- Qu'est-ce qu'un état stationnaire et quelle est la forme de la fonction d'onde dans un tel état ?

2- Interpréter le théorème de Bloch.

3- Résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps et donner la forme de la fonction d'onde spatiale pour $x \in [-a; a]$.

4- Montrer que les conditions imposées à la fonction d'onde conduisent à : $\cos(\theta) = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \frac{\sin(ka)}{ka} + \cos(ka)$

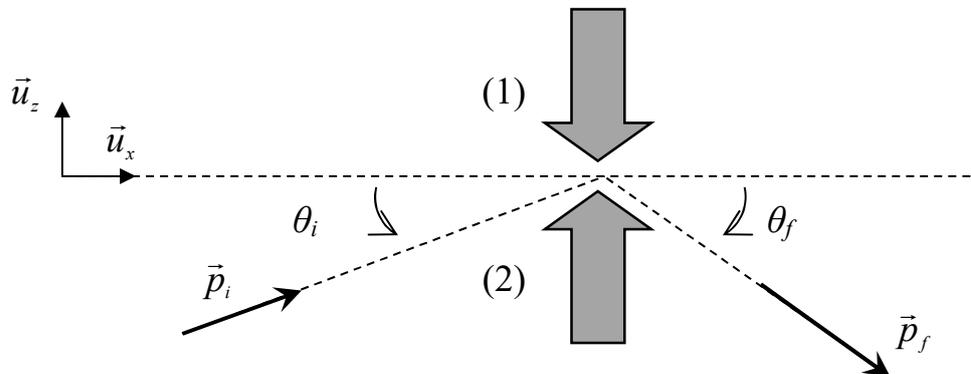
6- On donne ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto 7 \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)$. Montrer que les valeurs possibles de l'énergie E forment des « bandes ».



MQ 16 : Interaction entre un atome et une onde stationnaire. (Centrale 2)

On considère deux lasers synchrones (1) et (2) de même intensité dont les faisceaux sont orientés dans la même direction (Oz) et sont de sens opposés (voir le schéma ci-après). On assimile chaque faisceau à une OPPM de pulsation Ω . Le champ du laser (1) s'écrit : $\vec{E}_1(z, t) = E_0 e^{-i(\Omega t + kz)} \vec{u}_x$

On envisage une expérience dans laquelle un atome arrive dans le champ des deux lasers et est dévié. Après une première approche semi-classique, on introduit les notions de mécanique quantique nécessaires à l'étude du problème.



I) Approche semi-classique.

- 1- Rappeler l'expression de la quantité de mouvement d'un photon associé à une OPPM de vecteur d'onde \vec{k} , puis calculer l'intensité lumineuse au sein du dispositif : $I(z) = \langle \|\vec{E}(z, t)\|^2 \rangle$.

On suppose qu'on envoie dans le dispositif un atome de masse m et de quantité de mouvement \vec{p}_i . Cet atome absorbe un photon du faisceau (1) puis émet un photon dans le faisceau (2). On admet que la quantité de mouvement totale est conservée lors de ce processus.

- 2- Trouver deux relations liant les angles θ_i et θ_f repérant les quantités de mouvement \vec{p}_i et \vec{p}_f de l'atome au début et à la fin du processus (voir le schéma).
- 3- En raisonnant énergétiquement, exprimer θ_i en fonction de \hbar , k et $p_i = \|\vec{p}_i\|$.
- 4- Que se passe-t-il si on envoie un atome dont la quantité de mouvement ne vérifie pas la relation précédente ? Que se passe-t-il si θ_i vaut $\frac{\pi}{2}$? Proposer une analogie avec un dispositif interférentiel.

II) Approche quantique

On rappelle l'équation de Schrödinger régissant l'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde d'une particule de

masse m : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \times \psi$.

- 5- Soit un atome de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p}_i = p_i \vec{u}_z$ se déplaçant dans un espace libre. Exprimer en fonction des paramètres du problème la pulsation ω caractéristique de la fonction d'onde de cet atome.
- 6- On suppose maintenant que l'atome est soumis à un potentiel stationnaire de la forme : $V(z) = -\alpha \varepsilon_0 I(z) + Cste$. Déterminer la constante pour que ce potentiel soit de moyenne spatiale nulle. Quelle est alors l'allure de $V(z)$? Classiquement, où va se loger l'atome ?
- 7- On cherche la fonction d'onde de l'atome $\psi(z, t)$ sous la forme : $\psi(z, t) = c_0(t) e^{-i(\omega t - kz)} + c_1(t) e^{-i(\omega t + kz)}$
Donner la signification de chaque terme. Que peut-on dire de $c_0(0)$ et $c_1(0)$?

8- Montrer que les fonctions c_0 et c_1 vérifient un système différentiel de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{c}_0(t) = i\beta c_1(t) \\ \dot{c}_1(t) = i\beta c_0(t) \end{array} \right.$$

où β est une constante réelle que l'on exprimera en fonction des données du problème.

On admettra que si I_0 est suffisamment faible, on peut négliger les termes en $e^{\pm 3ikz}$ qui apparaissent dans les développements.

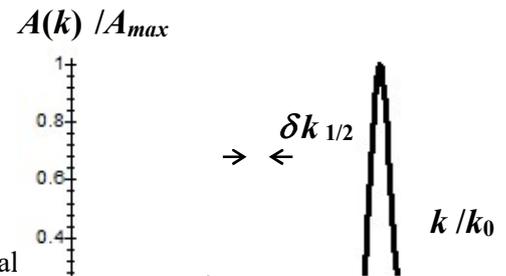
9- Déterminer la solution $\psi(z,t)$ puis en proposer une interprétation physique.

MQ 17 : Etude d'un paquet d'ondes – version 1. (Centrale 2)

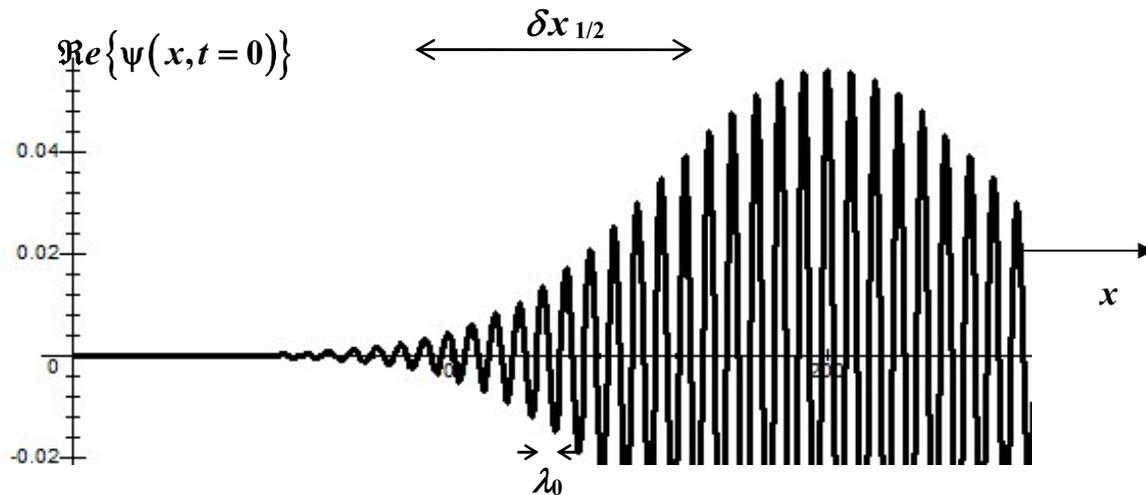
On s'intéresse à une onde unidimensionnelle (électromagnétique, mécanique, quantique...) que l'on décrit par un paquet d'ondes quasi-monochromatique, c'est-à-dire par une fonction complexe de la forme :

$$\psi(x,t) = \int_{k=-\infty}^{+\infty} A(k) \exp(-i(\omega(k)t - kx)) dk$$

où $A(k)$ est une fonction réelle positive de k , nulle presque partout, maximal « piquée » autour de cette valeur, avec une largeur à mi-hauteur $\delta k_{1/2} \ll k_0$ (figure 1).



A l'instant initial, la partie réelle de ψ se présente sous la forme d'une pseudo oscillation de période λ_0 et dont l'amplitude n'est non nulle que dans une zone de l'espace limitée autour de $x = 0$ (figure 2) ; on note $\delta x_{1/2}$ la largeur à mi-hauteur de « l'enveloppe » de ces pseudo-oscillations.



I- Questions générales (réponses à l'oral uniquement) :

- 1- Que représente la fonction ψ dans le cadre de l'électromagnétisme ? de la mécanique ? de la physique quantique ? Pourquoi est-elle complexe ?
- 2- Pourquoi ce type d'onde est-il appelé un « paquet d'ondes quasi-monochromatique » ? Pourquoi l'intégrale porte-t-elle sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$?
- 3- Peut-on expliquer qualitativement le lien entre les allures de $A(k)$ et $\Re\{\psi(x, t = 0)\}$?
- 4- Quelle(s) caractéristique(s) de la fonction $A(k)$ conditionnent-elles les valeurs de λ_0 et de $\delta x_{1/2}$? Donner l'expression de λ_0 puis une expression approximative de $\delta x_{1/2}$.
- 5- Comment s'appelle la relation $\omega(k)$ qui apparait implicitement dans l'expression de ψ ? Donner des exemples de ce type de relation en électromagnétisme ; quel aspect physique du problème détermine-t-il cette relation ?
Même question dans le domaine de la physique quantique.
- 6- Décrire qualitativement l'évolution spatio-temporelle de ce paquet d'ondes.

II- Expression de l'enveloppe :

En utilisant l'expression $\psi(x, t)$ fournie, mettre $\psi(x, t=0)$ sous la forme du produit d'un terme d'oscillation « rapide » et d'un terme d'enveloppe que l'on notera $f(x)$ et qui peut s'écrire :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u) \exp(iux) du$$

7- Représenter la fonction $u \mapsto a(u)$.

On dit que l'enveloppe est la transformée de Fourier de la fonction $u \mapsto a(u)$.

III- Propagation du paquet d'ondes aux temps courts :

On admet que l'évolution du paquet d'ondes « aux temps courts » est bien décrite en utilisant une expression de $\omega(k)$ linéarisée au voisinage de k_0 .

8- Montrer qu'à tout instant $\psi(x, t)$ s'écrit encore sous la forme du produit d'un terme d'oscillation « rapide » et d'un terme d'enveloppe, que l'on notera $\varepsilon(x, t)$; et que ces deux termes évoluent comme des ondes progressives de vitesses différentes.

9- Qu'observe-t-on de particulier si la relation $\omega(k)$ est linéaire ? Comment qualifie-t-on une telle situation ? Proposer un exemple.

10- On se place, pour cette question, dans le cadre d'une particule libre en physique quantique. Donner, en justifiant, l'expression de la loi $\omega(k)$ puis des deux vitesses obtenues à la question 1- et commenter.

(A partir de là l'exercice devient difficile car très calculatoire)

IV- Cas particulier d'un paquet d'ondes gaussien :

On considère désormais un paquet d'onde « gaussien », c'est-à-dire pour lequel la fonction $A(k)$ est une gaussienne centrée en k_0 , que l'on écrit : $A(k) = A_0 \exp\left\{-\frac{(k-k_0)^2}{2\delta k^2}\right\}$

11- Exprimer la largeur à mi-hauteur $\delta k_{1/2}$ en fonction de la quantité δk figurant dans l'expression de $A(k)$.

12- Montrer qu'à $t=0$ l'enveloppe du paquet d'ondes est également une gaussienne, que l'on mettra sous la forme : $f(x) = f_0 \exp\left\{-\frac{x^2}{2\delta x_0^2}\right\}$

On donne : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / \Re(\alpha^2) > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2(u+\beta)^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$

13- Le calcul précédent montre que $\delta x_0 = \frac{1}{\delta k}$. En déduire la largeur à mi-hauteur $\delta x_{1/2}$ de cette enveloppe en fonction de $\delta k_{1/2}$ puis confronter à votre réponse à la question I-4-.

14- Dans le cadre de la physique quantique, que vaut l'indétermination quantique $\Delta x(t=0)$ sur la position initiale de la particule étudiée ?

On rappelle que la densité de probabilité associée à la mesure de k est égale au module au carré de $A(k)$. Montrer que le paquet d'ondes gaussien correspond, à $t=0$, à un cas d'égalité dans l'inégalité de Heisenberg spatiale. On dit alors que le paquet d'ondes est « minimal ».

15- Donner l'expression du paquet d'ondes à un instant quelconque $t > 0$, dans le cadre de l'approximation effectuée à la question 3.

V- Etalement d'un paquet d'ondes gaussien aux temps longs :

« Aux temps longs », l'évolution du paquet d'ondes n'est plus bien décrite si on linéarise l'expression de $\omega(k)$ comme à la question 3. Dans cette question, on se propose d'affiner l'étude de l'évolution du paquet d'ondes en

développant la fonction $\omega(k)$ à d'ordre 2 au voisinage de k_0 , dans le cas particulier du paquet d'ondes gaussien associé à une particule libre en physique quantique.

16- Montrer que cette démarche conduit, pour l'enveloppe du paquet d'ondes, à l'expression approchée

$$\text{suivante : } \varepsilon(x, t) = f_0 \exp \left\{ -\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0 t}{m} \right)^2}{2\delta x_0^2 + \frac{2i\hbar t}{m}} \right\}$$

17- En déduire l'indétermination quantique $\Delta x(t > 0)$ en fonction de $\Delta x(t = 0)$ et commenter. Le paquet d'ondes est-il toujours minimal ?