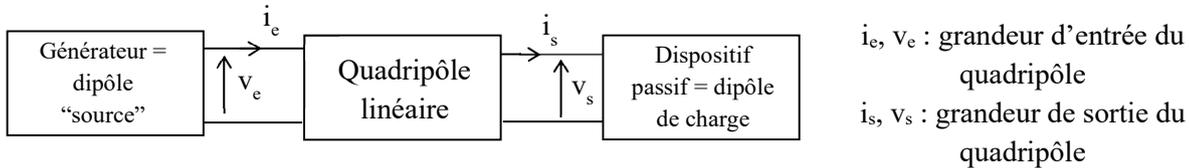


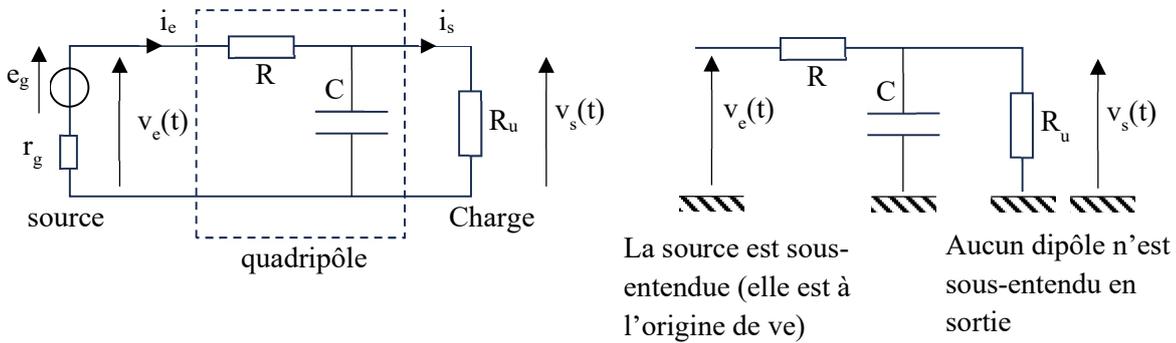
Quadripôles linéaires en R.P.S.

I- Fonction de transfert d'un quadripôle. Notion de filtre

De nombreux circuits peuvent être schématisés comme suit :



Ex : circuit 3

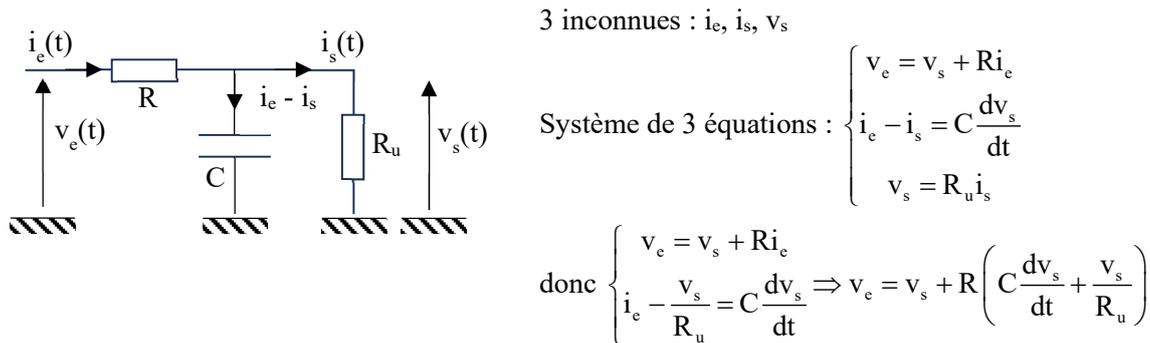


Si $R_u \rightarrow \infty$ alors $i_s = 0$ et on dit que le dipôle est « en sortie ouverte ».

A l'exception d'un quadripôle d'impédance de sortie nulle. Il est indispensable de connaître le dipôle de charge pour étudier le quadripôle !

Quadripôle linéaire : la relation liant v_s à v_e est linéaire.

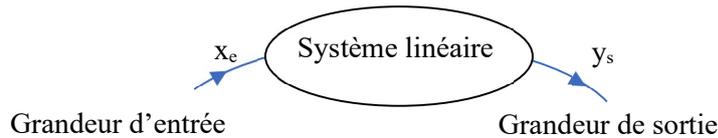
Par exemple pour le circuit 3



Ainsi $\frac{dv_s}{dt} + \frac{R_u + R}{R_u R} \frac{1}{C} v_s = \frac{1}{RC} v_e$: L'équation différentielle dépend bien de R_u .

Si $R_u \rightarrow +\infty$ on retrouve l'expression en sortie ouverte : $\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{RC} v_s = \frac{1}{RC} v_e$

A- Définition de la fonction de transfert



A la grandeur $x_e(t) = X_e \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ on associe la valeur efficace complexe $\underline{X}_e = X_e \cdot e^{j\varphi_e} = X_e$
 A la grandeur $y_s(t) = Y_s \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ on associe la valeur efficace complexe $\underline{Y}_s = Y_s \cdot e^{j\varphi}$

Par définition, la fonction de transfert du filtre est une valeur complexe notée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}_s(j\omega)}{\underline{X}_e(j\omega)} = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Suivant la nature des grandeurs d'entrée et de sortie (courant ou tension) la fonction de transfert prend une dénomination explicitant sa dimension .

➤ $y_s = v_s$ (définie en général à $i_s = 0$)

◆ $x_e = v_e$: $\underline{H}(j\omega) = \underline{A}_v(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$

Amplification complexe en tension

◆ $x_e = i_e$: $\underline{H}(j\omega) = \underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_e}$

Transimpédance ou impédance complexe de transfert

➤ $y_s = i_s$ (à $v_s = 0$ ou en charge - à préciser)

◆ $x_e = i_e$: $\underline{H}(j\omega) = \underline{A}_i(j\omega) = \frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e}$

Amplification complexe en courant

◆ $x_e = v_e$: $\underline{H}(j\omega) = \underline{Y}(j\omega) = \frac{\underline{I}_s}{\underline{V}_e}$

Transadmittance ou admittance complexe de transfert.

Ex circuit 3

- On peut « passer en complexes » l'équation différentielle : $j\omega \underline{V}_s + \frac{R_u + R}{R_u R} \frac{1}{C} \underline{V}_s = \frac{1}{RC} \underline{V}_e$:

d'où $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{R'}{R} \frac{1}{1 + jR' C \omega}$

- On peut travailler en complexes dès le départ, utiliser les impédances complexes et repérer le pont diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_{R_u//C}}{\underline{Z}_{R_u//C} + R} = \frac{1}{1 + R \underline{Y}_{R_u//C}} = \frac{1}{1 + R \left(\underline{Y}_{R_u} + \underline{Y}_C \right)} = \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{R_u} + jC\omega \right)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_u} + jRC\omega}$$

On retrouve la même expression : $\underline{H} = \frac{R_u}{R + R_u} \frac{1}{1 + j \frac{RR_u}{R + R_u} C \omega}$

B- Intérêt de la fonction de transfert.

Connaître la fonction de transfert d'un filtre permet :

- de connaître la relation qui existe entre valeurs efficaces (ou amplitude) complexes associées aux grandeurs sinusoïdales instantanées et d'étudier comment varie la réponse du filtre $y_s(t)$ avec la fréquence.

Si $v_e = V_0 \cdot \sin(\omega_e t + \varphi_e)$, $\underline{V_E} = V_0 \cdot e^{j\varphi_e}$ et en sortie $\underline{V_S} = \underline{V_0} \cdot \underline{H}(j\omega_e)$

- de connaître la réponse du filtre à un signal sinusoïdale :

$$v_s(t) = |\underline{V_s}| \sin(\omega_e t + \text{Arg}(\underline{V_s})) = |\underline{H}(j\omega_e)| V_0 \sin(\omega_e t + \varphi_e + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_e)))$$

- de connaître la réponse du filtre à un signal quelconque**

Prenons l'exemple $v_e = E_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + E_2 \cdot \sin(\omega_2 t)$

Par linéarité du filtre la réponse obtenue est la somme des réponses que l'on obtiendrait pour les 2 signaux sinusoïdaux considérés isolément :

$$\underline{v_s}(t) = |\underline{H}(j\omega_1)| E_1 \sin(\omega_1 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_1))) + |\underline{H}(j\omega_2)| E_2 \sin(\omega_2 t + \text{Arg}(\underline{H}(j\omega_2)))$$

- d'accéder à l'équation différentielle vérifiée entre $x_e(t)$ et $y_s(t)$ par la correspondance :

$$(j\omega)^n \cdot \underline{X} \rightarrow \frac{d^n x}{dt^n} \qquad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y_s}}{\underline{X_e}} = \frac{a_0 + j\omega a_1 + (j\omega)^2 a_2 + \dots + (j\omega)^m a_m}{b_0 + j\omega b_1 + (j\omega)^2 b_2 + \dots + (j\omega)^n b_n}$$

De cette expression on déduit l'équation différentielle :

$$b_0 y + b_1 \frac{dy}{dt} + b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n y}{dt^n} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + \dots + a_m \frac{d^m x}{dt^m}$$

Exemple du circuit 3 : $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{R'}{R + jR'C\omega} \qquad \text{avec } R' = \frac{R \cdot R_u}{R + R_u}$

donne $(1 + jR'C\omega) \underline{V_s} = \frac{R'}{R} \underline{V_e}$ soit $v_s + R'C \frac{dv_s}{dt} = \frac{R'}{R} v_e$

Remarques : a- l'ordre du filtre est le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ du dénominateur de la fonction de transfert.

b- dans de nombreux cas, la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ peut se mettre sous forme d'un produit de fonctions de transfert élémentaires : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_1}(j\omega) \cdot \underline{H_2}(j\omega) \cdot \dots$

Son module $H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \dots$ est le produit des modules . Son argument $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots$ est la somme des arguments

L'étude de fonctions de transfert élémentaires permet d'accéder aux fonctions de transfert de nombreux filtres.

Nous reviendrons sur ce point plus en détail plus tard.

C- Différents types de filtres

On peut regrouper les quadripôles en 3 catégories

1- Ceux dont la fonction de transfert \underline{H} est réelle et indépendante de ω .

$\underline{H} = G_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout t $v_s(t) = G_0 \cdot v_e(t)$

On parle : d'amplificateur si $|G_0| > 1$ (amplificateur inverseur si $G_0 < 0$)

d'atténuateur si $|G_0| < 1$ (atténuateur inverseur si $G_0 < 0$)

de suiveur si $G_0 = 1$

d'inverseur si $G_0 = -1$

2- Ceux dont la fonction de transfert \underline{H} dépend explicitement de ω et donc le gain $|H|$ diffère selon la fréquence de v_e

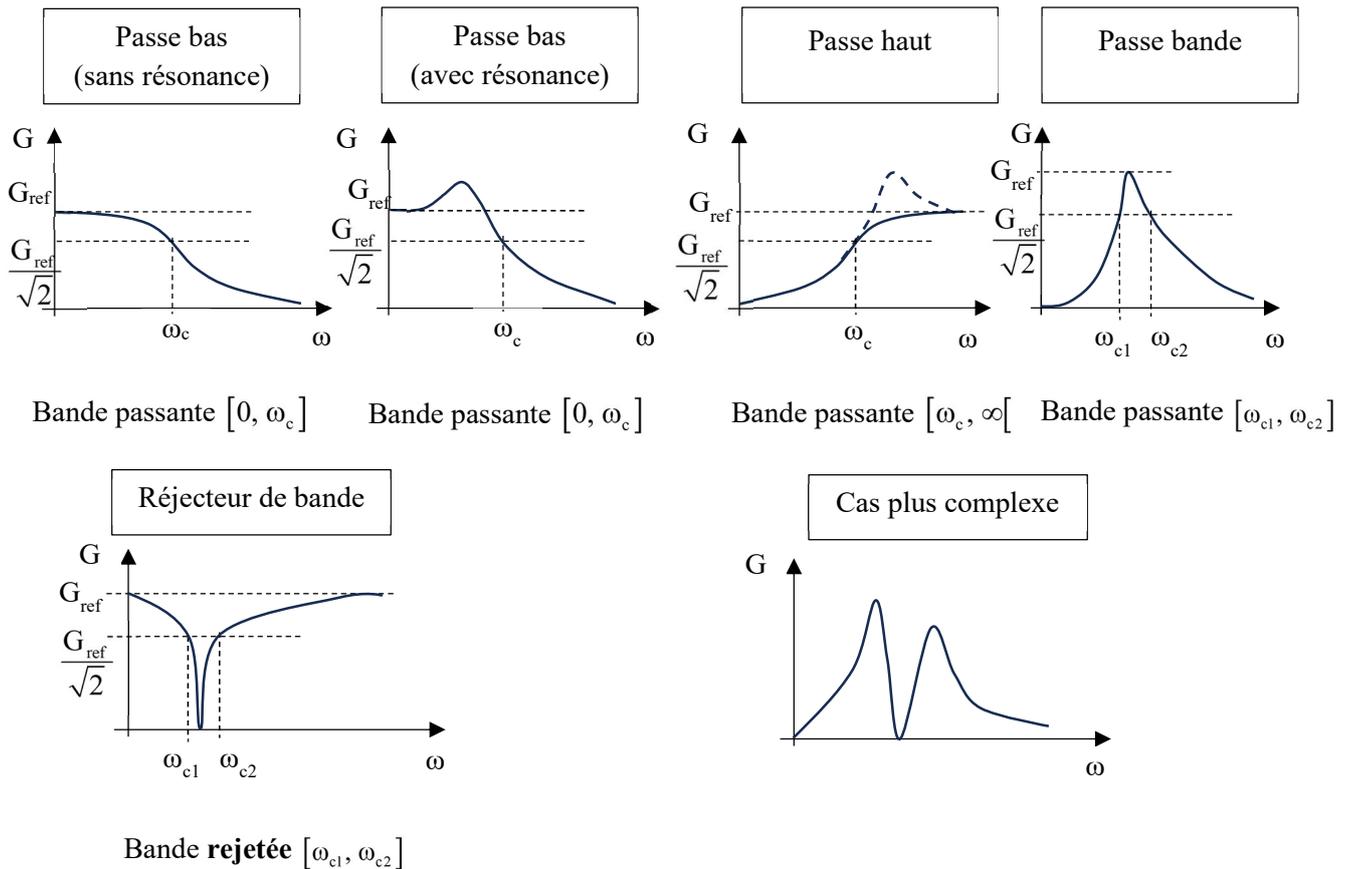
On parle alors de filtre de fréquence.

L'allure de $G(\omega) = |H(\omega)|$ fait apparaître une (ou des) bande(s) passante(s) et un (ou des) bande(s) rejetée(s) qui définissent la nature du filtre.

Ces bandes sont délimitées par une ou deux fréquence(s) de coupure définie(s) pas :

$$G(\omega_c = 2\pi f_c) = \frac{G_{ref}}{\sqrt{2}}$$

Où G_{ref} est le gain de « référence » en bande passante



Remarque : un filtre d'ordre 1 ne peut être que passe-bas ou passe-haut non résonant. Pour avoir un passe-bande, un coupe-bande (ou réjecteur de bande) ou une résonance sur un passe-bas ou un passe-haut, il faut au moins un filtre d'ordre 2

Bilan : forme canonique des fonctions de transferts des filtres d'ordre 1 et 2

Filtre d'ordre 1 ; $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\tau$	Passé bas : $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + jx}$
	Passé haut : $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$
Filtre d'ordre 2 ; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$	Passé bas : $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}x + (jx)^2}$
	Passé haut : $\underline{H} = H_0 \frac{(jx)^2}{1 + j\frac{1}{Q}x + (jx)^2}$
	Passé bande :
	$\underline{H} = H_0 \frac{j\frac{1}{Q}x}{1 + j\frac{1}{Q}x + (jx)^2} = H_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$
	Réjecteur de bande : $\underline{H} = H_0 \frac{1 + (jx)^2}{1 + j\frac{1}{Q}x + (jx)^2}$

3- Ceux dont le gain est indépendant de ω , mais dont la phase dépend de ω .

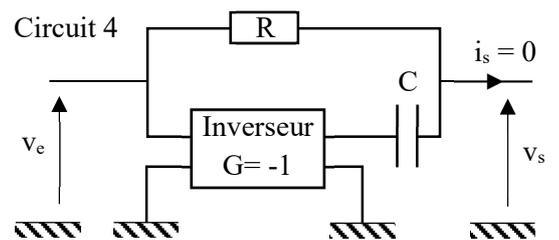
On parle de filtre déphaseur

Exercice :

- Déterminer les fonctions de transfert $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$ des quadripôles mis en jeu dans les circuits 1 à 3 vus depuis le début, puis la nature des quadripôles. Dans le cas d'un filtre d'ordre 1 on mettra le dénominateur de \underline{H} sous la forme $1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$ et pour un ordre 2, sous la forme

$$1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

- Même travail pour le quadripôle ci-contre (circuit 4)



D- Fonctions de transfert élémentaires étudiées (amplification)

Système d'ordre 1 $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ (également $\underline{H}_0(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$: intégrateur)

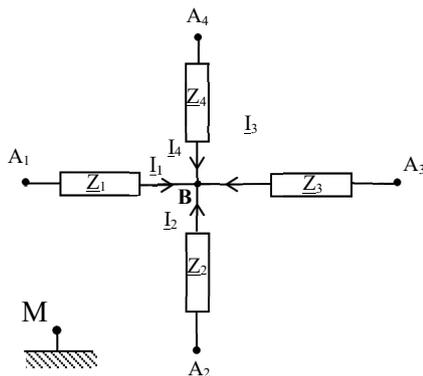
Système du deuxième ordre $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi j\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

II- Quelques astuces pour déterminer \underline{H}

A- Loi des nœuds exprimée en termes de potentiel (théorème de Millman)

Comme $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_c}$, la méthode de mise en équation habituelle (qui « choisit » comme inconnues « premières » les intensités dans chacune des branches et les tensions aux bornes des condensateurs) n'est pas nécessairement la plus adaptée. On pourra plutôt choisir comme inconnues les potentiels aux différents nœuds aux points remarquables du circuit.

Soit B un nœud d'un réseau point commun à k branches Voir figure ci-dessous avec $k = 4$



On désigne par

- \underline{Z}_k l'impédance équivalente de la branche k
- \underline{I}_k l'amplitude (ou valeur efficace) complexe de l'intensité dans la branche k, orienté vers B.
- \underline{V}_B le potentiel du nœud B (ayant choisi comme référence le potentiel d'un point M - en général la masse du montage - en fait $\underline{V}_B = \underline{V}_B - \underline{V}_M$).
- \underline{V}_{Ak} le potentiel de l'autre extrémité de R_k - autre que B- ($\underline{V}_{Ak} = \underline{V}_{Ak} - \underline{V}_M$).

Loi des nœuds en B : $\sum_k \underline{I}_k = 0$ avec $\underline{I}_k = \frac{\underline{V}_{Ak} - \underline{V}_B}{\underline{Z}_k}$

On obtient : $\left(\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} \right) \underline{V}_B = \left(\sum_k \frac{\underline{V}_{Ak}}{\underline{Z}_k} \right)$: expression désignée par « loi des nœuds en termes de potentiel » (ou

« théorème de Millman », expression que certains examinateurs n'aiment pas ...).

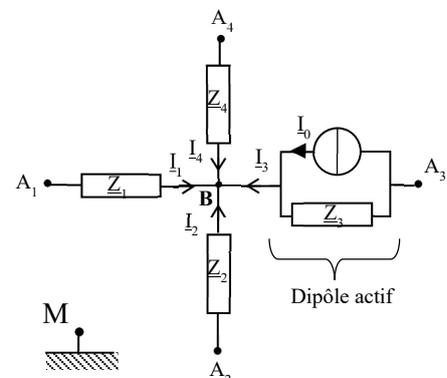
Ce résultat est à apprendre par cœur ET à savoir redémontrer

Attention : cette forme n'est correcte que si le nœud B est relié exclusivement à des dipôles passifs. On n'applique donc pas cette « loi » au point E lié à la sortie du générateur (en revanche, ce point E peut parfaitement être l'un des point A_k et alors son potentiel est imposé par la source : $\underline{V}_{Ak} = \underline{V}_c$

Exceptionnellement on pourra être amené à généraliser cette démarche à un nœud relié à un dipôle actif de courant électromoteur

i_0 : il suffit alors d'écrire $\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_{A3} - \underline{V}_B}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_0$

on aura alors $\left(\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} \right) \underline{V}_B = \left(\sum_k \frac{\underline{V}_{Ak}}{\underline{Z}_k} \right) + \underline{I}_0$



En pratique, en appliquant la « loi des nœuds en termes de potentiels »

à tous les points reliés à des dipôles passifs, on obtient autant d'équations que d'inconnues (potentiels) et on résout pour trouver \underline{V}_s

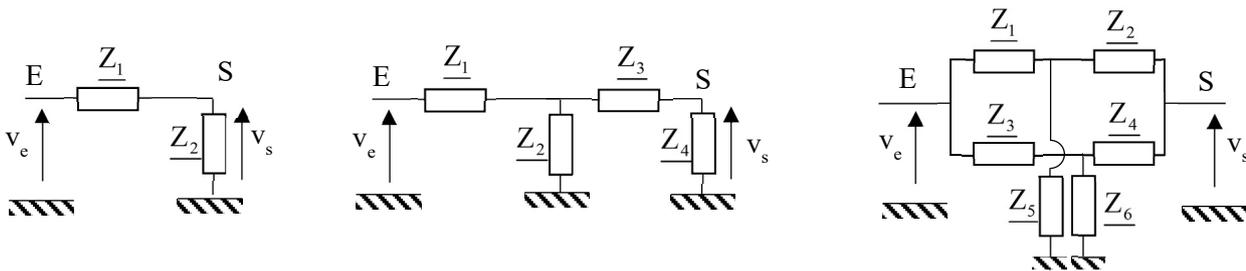
Pour la résolution du système d'équations, respecter les quelques règles suivantes :

- v_e sera considéré comme une donnée et non comme une inconnue et figurera dans l'expression finale de v_s
- **Eviter les mises au même dénominateur : conserver** $\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} \right)$ **sous cette forme !**
- **ADIMENSIONNER** les relations en faisant apparaître le plus tôt possible les expressions du type

$$\boxed{RC\omega, \frac{L}{R}\omega, -LC\omega^2}$$

B- Cas des quadripôle passifs usuels

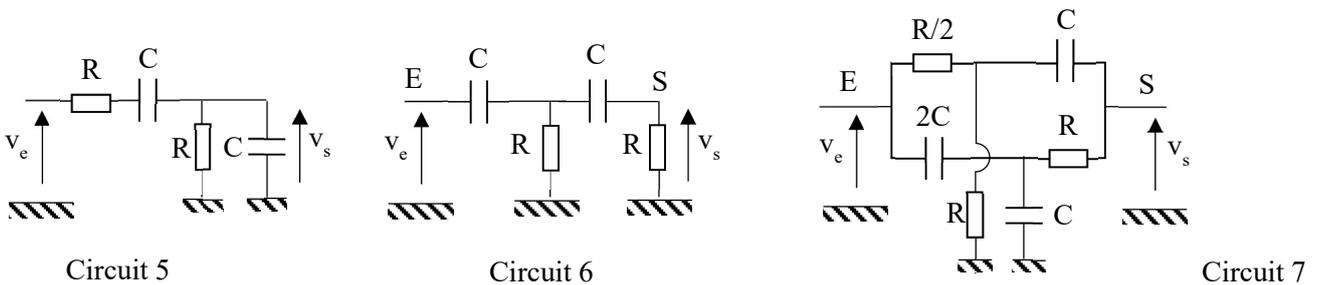
La quasi-totalité des quadripôles passifs usuels ont, après une éventuelle simplification par association d'impédance, l'une des structures suivantes :



Exercice : pour chaque configuration, • Identifier les potentiels inconnus

• Ecrire les « lois des nœuds en termes de potentiels » correspondantes

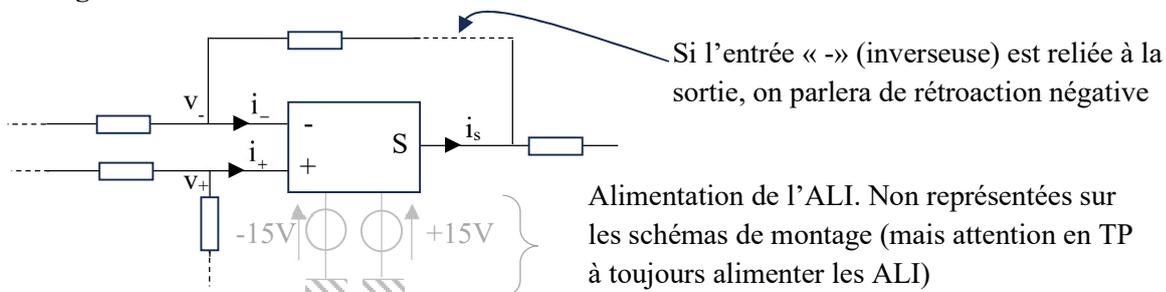
Déterminer ensuite les fonctions de transferts des quadripôles suivants :



C- Cas des quadripôles actifs contenant un ALI

Les propriétés qui seront énoncées ci-dessous sont à connaître ; en revanche, il n'est pas nécessaire de retenir les circuits proposés.

Schéma général



- et + désignent les entrées dites inverseuses et non-inverseuses de l'ALI au potentiel respectif v_- et v_+

2- Propriétés générales

- $i_+ = i_- = 0$: on pourra donc appliquer la loi des nœuds en termes de potentiel aux entrées E_+ et E_- comme si l'ALI n'était pas présent (cf exemple ci-dessous)
- i_s est en revanche quelconque : on n'appliquera pas cette loi à la sortie.
- **En présence d'une rétroaction négative** : $v_+ = v_-$; on parle de fonctionnement linéaire
- **En l'absence de rétroaction négative** : on parlera de fonctionnement saturé

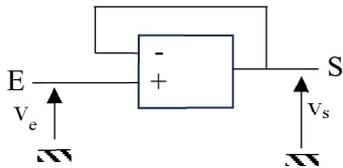
$$v_+ \neq v_- \begin{cases} \text{si } v_+ > v_- & v_s = +V_{\text{sat}} \approx 15\text{V} \\ \text{si } v_+ < v_- & v_s = -V_{\text{sat}} \end{cases}$$

(l'ALI fonctionne comme un comparateur)

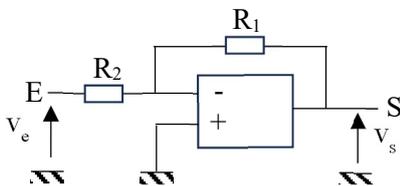
Remarque dans de rares cas, on pourra avoir simultanément une rétroaction négative et une rétroaction positive. On vous précisera alors quel sera le mode de fonctionnement de l'ALI (cf ex 6 pour une modélisation plus précise de l'ALI)

3- Exemples de montages

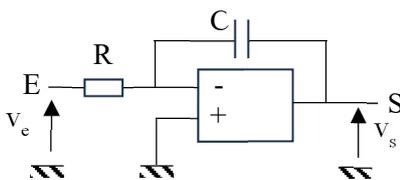
Fonctionnement linéaire
(rétroaction négative)



Circuit 8 :
« suiveur »

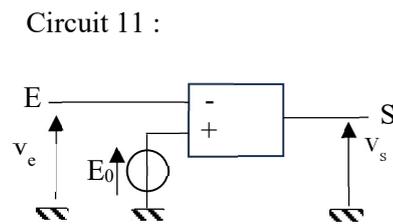


Circuit 9 :
« amplificateur inverseur »



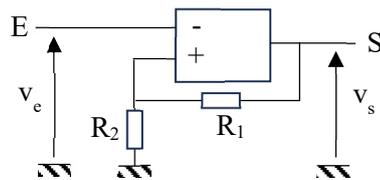
Circuit 10 :
« intégrateur »

Fonctionnement saturé
(pas de rétroaction négative)



Circuit 11 :

Circuit 12 :



Exercice :

1. Les circuits 8, 9 et 10 fonctionnent en régime linéaire grâce à la rétroaction négative. Si v_e est sinusoïdal, on peut envisager l'établissement d'un régime permanent sinusoïdal. Utiliser la notation complexe et

déterminer $\frac{V_s}{V_e}$ (appliquer la loi des nœuds en termes de potentiels et ajouter la condition $V_+ = V_-$)

2. Faire de même avec le circuit 13 plus complexe ci-contre.

$$x = RC\omega$$

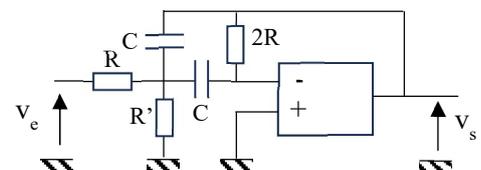
On posera

$$\alpha = \frac{R}{R'}$$

3. Les circuits 11 et 12 fonctionnent de façon non linéaire.

Même si v_e est sinusoïdal, v_s ne l'est pas (pas de R.P.S. et pas

de notation complexe). Déterminer v_s en fonction de v_e , tracer le graphique correspondant puis tracer l'allure de $v_s(t)$ lors $v_e(t)$ est sinusoïdal.



Circuit 13

III- Représentations de la fonction de transfert

Pour étudier le comportement en fréquence d'un filtre représenté par sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = H(\omega).e^{j\varphi(\omega)}$, il faut étudier comment varient le module $H(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ avec la pulsation ou la fréquence.

Représentation de $H(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

- On peut tracer séparément les courbes $H(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.
- Dans le cas où la fonction de transfert est une amplification, il est d'usage pour l'étude H , de travailler en échelle logarithmique. On définit alors le **gain**, en tension ou en courant, en **décibels (dB)** par :

$$G(\omega) = 20.\log(H(\omega)).$$

L'intérêt de travailler avec le gain en décibels est le suivant : si $\underline{H} = \underline{H}_1.\underline{H}_2 \dots$ $H = H_1.H_2 \dots$ et $G = G_1 + G_2 + \dots$

A- diagrammes amplitude, phase linéaires :

on choisit une échelle linéaire pour la fréquence (ou pour ω) et l'on trace les 2 courbes

$$\begin{cases} - \text{courbe de gain } G(\omega) \text{ (ou } H(\omega)) \\ - \text{courbe de phase } \varphi(\omega) \end{cases}$$

Cette représentation est surtout utilisée pour les systèmes sélectifs à bande étroite pour lesquels on s'intéresse à un domaine limité de fréquences.

B- diagrammes de Bode :

on choisit une échelle logarithmique pour la pulsation ou la fréquence . Le diagramme de bode est **l'ensemble des deux graphes**

$$\begin{cases} - \text{ courbe de gain : } G = 20.\log(H) \text{ en fonction de } \log(f) \text{ ou de } \log(\omega) \text{ ou de } \log(x) \quad (x = f/f_0) \\ - \text{ courbe de phase : } \varphi \text{ en fonction de } \log(f) \text{ ou de } \log(\omega) \text{ ou de } \log(x) . \end{cases}$$

La représentation de Bode est très utilisée en électronique car elle rend simplement compte du comportement en fréquence du système dans une large plage de fréquences et permet des constructions graphiques commodes pour les chaînes d'étages en cascade.

Remarques :

- décades et octaves : Par définition

décade = intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$ (ou de pulsation) tel que

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10 \quad \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 1$$

octave = intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$ (ou de pulsation) tel que

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 \quad \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \log\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 0,3$$

$\frac{G_2}{G_1} = 10 \quad \Rightarrow \quad 20.\log\left(\frac{G_2}{G_1}\right) = 20 \quad G_{2,\text{dB}} - G_{1,\text{dB}} = 20 \text{ dB}$	A RETENIR
$\frac{G_2}{G_1} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 20.\log\left(\frac{G_2}{G_1}\right) = 3 \quad G_{2,\text{dB}} - G_{1,\text{dB}} = 3 \text{ dB}$	

C- diagrammes de Bode asymptotique :

Un des intérêts du diagramme de Bode en gain est la propriété suivante : s'il existe un domaine de ω où \underline{H} s'exprime

asymptotiquement sous la forme $K \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, alors $G_{dB} = 20 \log(K) + \underbrace{n \cdot 20}_{\text{pente}} \log \left(\underbrace{\frac{\omega}{\omega_0}}_{\text{abscisse}} \right)$

Le diagramme de Bode en gain possède donc, dans ce domaine de pulsation une asymptote linéaire de pente $20 \cdot n$ dB/décade.

Exemple

Filtre passe-bas d'ordre 2

$$\underline{H}_2(j\omega) = H_2 \cdot e^{j\psi_2} = \frac{A_0}{1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} + j^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = A_0 \frac{1}{1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x + j^2 \cdot x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\psi_2(j\omega) = \text{Arg}(\underline{H}_2) = -\text{Arg}\left(1 - x^2 + j \frac{1}{Q} x\right) = -\theta$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{Q} \frac{x}{1 - x^2} \quad \text{avec } \theta \in [0, \pi]$$

➤ asymptotique :

Basses fréquences : $x \ll 1$ ($\omega \ll \omega_0$) $\underline{H}(j\omega) \sim 1$

$H \approx 1$ et $G_{a1} \rightarrow 0$ asymptote horizontale $G = 0$ quand $\log(x) \rightarrow -\infty$

$\psi_2 \rightarrow 0$ asymptote horizontale $\psi = 0$

Hautes fréquences : $x \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$) $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{1}{j^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

$$H(\omega) \sim \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad G_{a2} = -20 \log \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

droite de pente - 40 dB/décade passant par $\left(G = 0; \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = 0 \right)$

$\psi_2(\omega) \sim -\pi$ (on choisit $-\pi$ plutôt que $+\pi$ car on a montré précédemment que

$\psi_2 \in [-\pi, 0]$ et que ψ_2 était décroissante de 0 à, donc, $-\pi$)

Filtre passe-bande

$$\underline{H}(j\omega) = H \cdot e^{j\psi} = A_0 \frac{j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} + j^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = A_0 \frac{1}{1 + j \cdot Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

La première écriture est intéressante pour tracer les diagrammes de bode :

$$A_0 \frac{j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x}{1 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x + j^2 (x)^2} = A_0 \cdot j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x \cdot \underline{H}_2(x) \quad \text{avec } \underline{H}_2(x) \text{ fonction de transfert étudiée en A.}$$

La seconde écriture met quant à elle bien en évidence le comportement basse bande et laisse très visible les termes prépondérants aux basses et hautes fréquences.

➤ Etude de $\psi(\omega)$

La phase peut se déduire de l'étude précédente par $\psi = \text{Arg}(\underline{H}) = \text{Arg}\left(j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x\right) + \text{Arg}(\underline{H}_2(x)) = \frac{\pi}{2} + \psi_2$

➤ asymptotique :

Basses fréquences : $x \ll 1$ ($\omega \ll \omega_0$) : $\underline{H}(j\omega) \sim \frac{j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x}{1} = j \cdot \frac{1}{Q} \cdot x$

$$G_{a1} = 20 \log\left(\frac{x}{Q}\right) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

asymptote oblique de pente +20 dB/decade

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{asymptote horizontale } \psi = \frac{\pi}{2}$$

Hautes fréquences : $x \gg 1$ ($\omega \gg \omega_0$) $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j \cdot Q \cdot x}$

$$G_{a2} = 20 \log\left(\frac{1}{Qx}\right) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

asymptote oblique de pente -20 dB/decade

$$\psi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{asymptote horizontale } \psi = -\frac{\pi}{2}$$

A la page suivante, vous trouverez une synthèse (non exigible) des principaux diagrammes de Bode

FILTRES EN RPS	NATURE	TRANSMITTANCE	$G_{dB} = f(\log(\%u)) = f(\log x)$	Bande Passante	$\varphi = f(\log(\%u))$	Circuit "type"
1 ^{er} ORDRE	PASSE BAS	$H(j\omega) = \frac{1}{1+jx}$ $x = \omega/\omega_0$		$[0; \omega_0]$ $\omega_c = \omega_0$		
	PASSE HAUT	$H(j\omega) = \frac{jx}{1+jx}$		$[\omega_c; +\infty]$ $\omega_c = \omega_0$		
2 ^e ORDRE	PASSE BAS	$H(j\omega) = \frac{1}{1-x^2+jx/Q}$		$[0; \omega_c]$		
	PASSE HAUT	$H(j\omega) = \frac{-x^2}{1-x^2+jx/Q}$		$[\omega_c; +\infty]$		
PASSE BANDE	PASSE BANDE	$H(j\omega) = \frac{1}{1+jQ(x-1/x)}$ $= \frac{jx/Q}{1-x^2+jx/Q}$		$[\omega_1; \omega_2]$ $\Delta\omega = \omega_0/Q$ $\omega_1, \omega_2 = \omega_0 \pm \omega_0/Q$		
	COUPE BANDE ou RESECTEUR DE BANDE	$H(j\omega) = \frac{1-x^2}{1-x^2+jx/Q}$		$[\omega_1; \omega_2]$ $\Delta\omega = \omega_0/Q$ $\omega_1, \omega_2 = \omega_0 \pm \omega_0/Q$ Bande rejete		

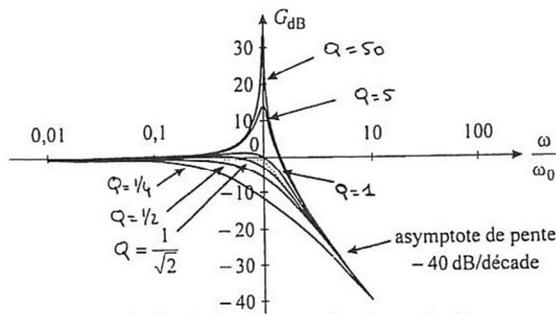
D- Quelques calculs usuels sur les filtres

1- Déterminer la pulsation de coupure ω_c d'un filtre du 1^{er} ordre tel que $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$. Idem si $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$

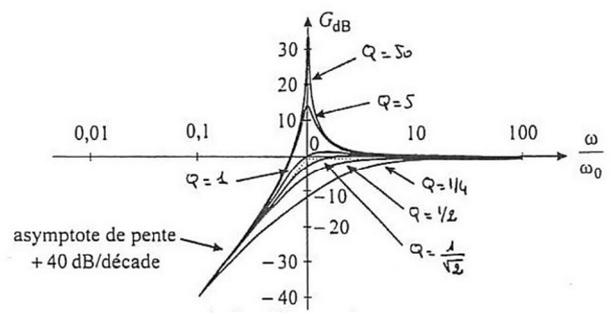
2- En effectuant un changement de variable astucieux, montrer que les deux filtres précédents ont des diagrammes de Bode de gain symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Existe-t-il des propriétés de ce type pour les filtres usuels du second ordre ?

3- Déterminer la condition de résonance d'un filtre passe-bas ou passe-haut du 2nd ordre usuel. Que vaut la pulsation de résonance ?

4- Est-il souhaitable qu'un tel filtre soit résonant ? En vous appuyant sur les diagrammes de Bode ci-dessous, proposer une valeur optimale du facteur de qualité pour un tel filtre.



courbe de gain d'un filtre passe-bas du second ordre



courbe de gain d'un filtre passe-haut du second ordre

Remarque : un vrai passe-haut n'existe pas : on observe toujours une chute du gain à très haute fréquence, quel que soit le dispositif, due à des effets capacitifs. C'est le cas également des amplificateurs, suiveurs et de tous les appareils de mesure sensés fournir une réponse spectrale plate (multimètre, oscilloscope ...)

Nous verrons en TP que la fréquence de coupure haute d'un multimètre numérique est de qq 100 kHz, celle d'un oscilloscope numérique de 1 à 10 MHz

5- Démontrer qu'un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + j.Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ possède un gain maximal G_m pour

la seule valeur $\omega = \omega_0$. Que vaut G_m ? Discuter l'influence de Q .

6- Une fonction de transfert s'écrit : $\underline{H} = \frac{R_3}{2R_1 + jR_1R_3C\omega + \frac{R_1 + R_2}{jR_2C\omega}}$ Déterminer la pulsation de résonance

ω_0 , le gain maximal et le facteur de qualité.

7- Soit un filtre passe-bande de fonction de transfert $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + j.Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$. Déterminer le diagramme

asymptotique du gain et le tracer pour $Q = 0,1$ puis 1 puis 10 ; on prendra $H_0 = 0,6$. Donner l'allure du diagramme réel.

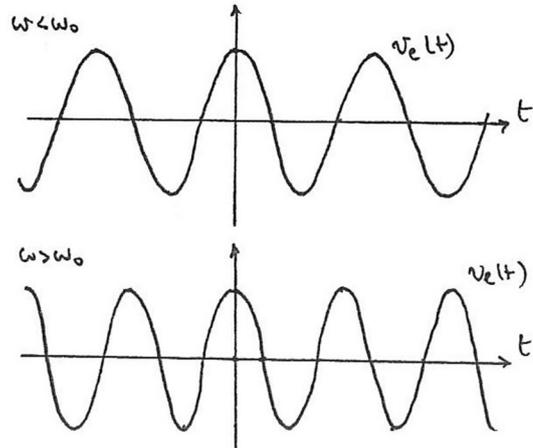
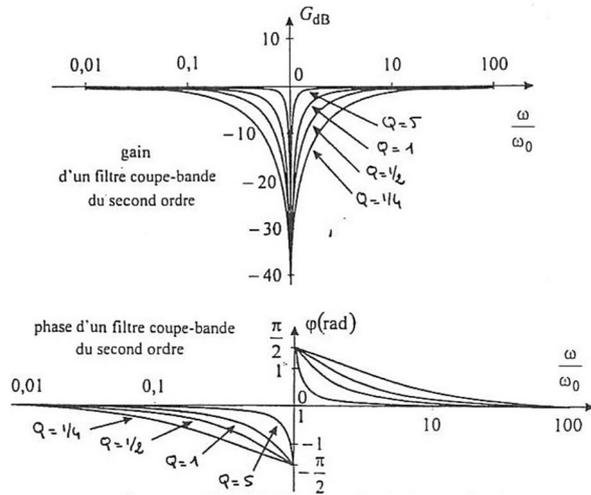
8- Déterminer les fréquence de coupure d'un filtre passe-bande du 2nd ordre, en fonction de ω_0 et Q . En déduire $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ et le produit $\omega_{c2} \cdot \omega_{c1}$. Commenter

CALCUL IMPORTANT. RESULTAT A MEMORISER

9- En TP, comment déterminer rapidement si un filtre passe-bas est du 1^{er} ou du second ordre ?

10- On donne ci-dessous les diagrammes de Bode d'un réjecteur de bande tel que $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j^2 x^2}{1 + j \frac{x}{Q} + j^2 x^2}$.

Justifier brièvement ces diagrammes puis tracer $v_s(t)$ lorsque $v_e(t)$ est sinusoïdal de pulsation légèrement inférieure à ω_0 , puis légèrement supérieure à ω_0 . Commenter la discontinuité de phase en ω_0 .



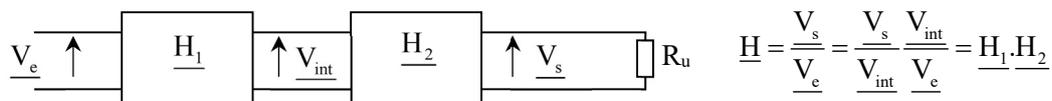
IV- Caractérisation d'un quadripôle par ses impédances d'entrée et de sortie et sa transmittance en circuit ouvert.

A- Positionnement du problème

On a vu qu'un des intérêts de travailler en échelle logarithmique était de simplifier les calculs : si \underline{H} se met sous la

forme $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ alors $\begin{cases} G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$

Souvent le produit $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ résulte de la mise en cascade de deux filtres de transmittances respectives \underline{H}_1 et \underline{H}_2



ATTENTION : dans cette configuration la transmittance \underline{H}_1 dépend du quadripôle 1 mais aussi de sa « charge » cad du quadripôle 2 et de R_u . A priori \underline{H}_1 n'a pas la même valeur que si le quadripôle 1 était en sortie ouvert (de même \underline{H}_2 dépend de R_u et diffère de $\underline{H}_{2\text{sortie ouverte}}$)

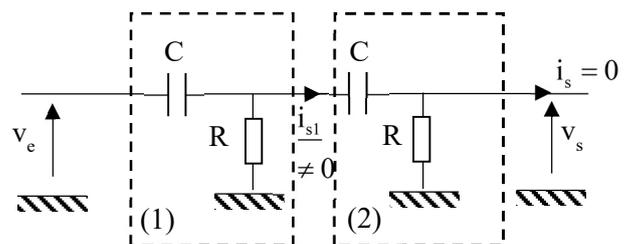
Par exemple reprenons le circuit 6

On a bien $\underline{H}_2 = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = RC\omega$

Mais a-t-on $\underline{H}_1 = \underline{H}_2$? NON car $i_{s1} \neq 0$.

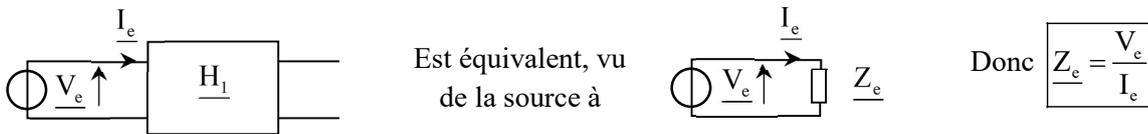
On a d'ailleurs vu que ce filtre avait pour fonction de

transfert $\underline{H}_6 = \frac{-x^2}{1 + 3jx + (jx)^2}$ et $\underline{H}_2^2 = \frac{-x^2}{1 + 2jx + (jx)^2}$



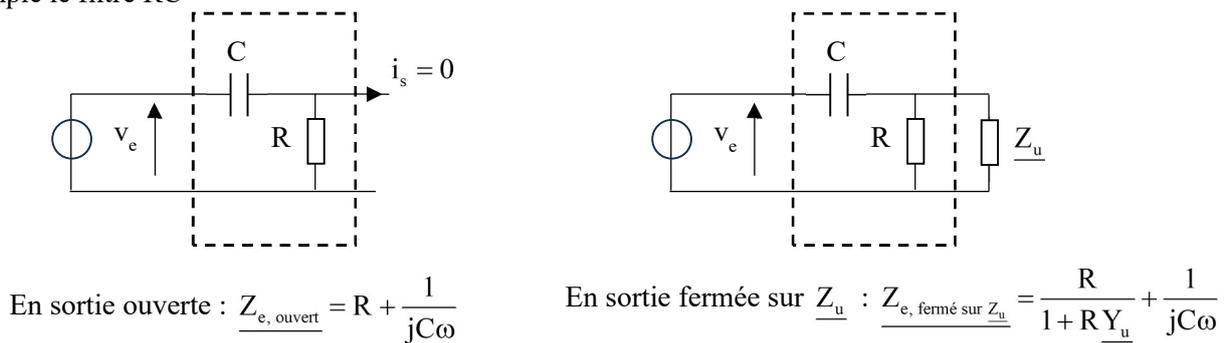
B- Modélisation du quadripôle entre ses bornes d'entrée

Considérons par exemple de quadripôle 1 relié à une source qui impose $v_e(t)$. La source est reliée par ces deux bornes au reste du circuit constitué de dipôle linéaires passifs. Aux bornes de la source est donc branché un dipôle linéaire passif caractérisé par son impédance \underline{Z}_e .



Remarque : \underline{Z}_e dépend en général de la nature du quadripôle et de la charge

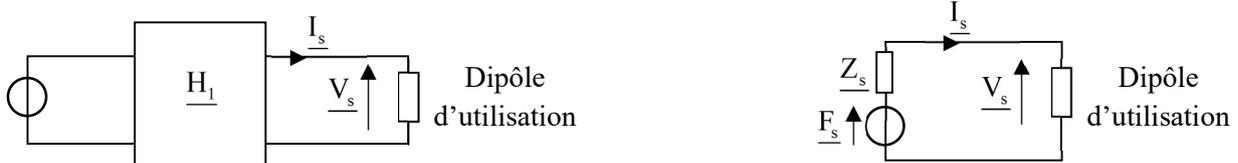
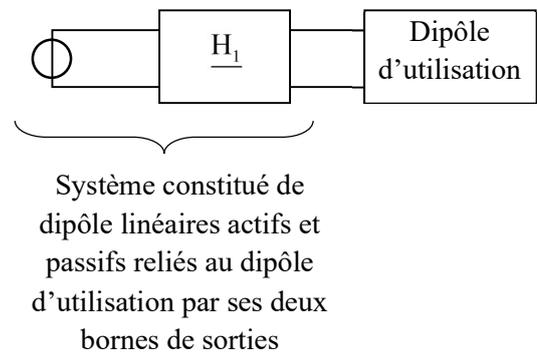
Exemple le filtre RC



C- Modélisation du quadripôle entre ses bornes de sortie

Vue du dipôle d'utilisation : tout ce qui est branché en amont (filtre + source) constitue un dipôle actif linéaire.

Comme on l'a vu pour les sources réelles en régime permanent continu, ce dipôle peut être modélisé comment une source idéale de fem sinusoïdale d'amplitude complexe \underline{F}_s en série avec une impédance \underline{Z}_s



On a donc $\underline{V}_s = \underline{F}_s - \underline{Z}_s \cdot \underline{I}_s$

- **fem de sortie** : $\underline{V}_s = \underline{F}_s$ si $\underline{I}_s = 0$

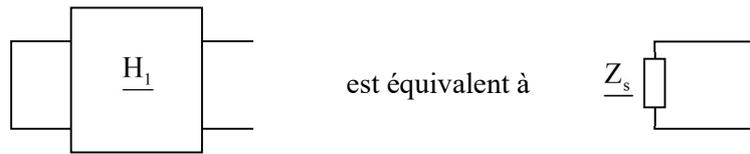
On définit justement la fonction de transfert en sortie ouverte $\underline{H}_{\text{ouvert}}$ comme $\underline{H}_{\text{ouvert}} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ si $\underline{I}_s = 0$

Donc $\underline{V}_s = \underline{H}_{\text{ouvert}} \cdot \underline{V}_e$

- **Impédance de sortie** : $\underline{V}_s = -\underline{Z}_s \cdot \underline{I}_s$ si $\underline{F}_s = 0$ donc si $\underline{V}_e = 0$

Ainsi \underline{Z}_s est l'impédance du circuit lorsque $\underline{V}_e = 0$ soit lorsque les sources idéales sont passivées (sources

idéales de tension remplacées par des fils et les sources idéales de courant remplacées par des circuits ouverts)

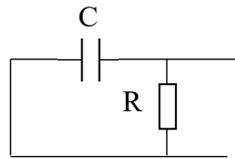


Exemple sur le filtre RC

- $\underline{Z}_s = \underline{Z}_{R//C}$

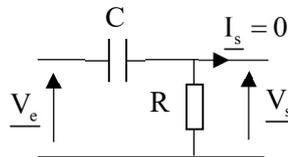
$$\underline{Y}_s = jC\omega + \frac{1}{R} = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

$$\underline{Z}_s = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

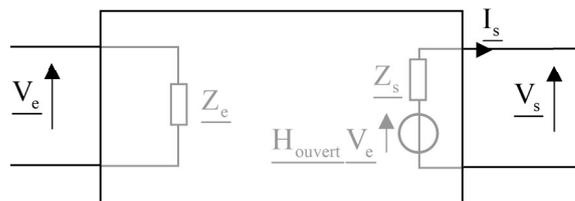


- Pont diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Y}_C}{\underline{Z}_R \underline{Y}_C + 1} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

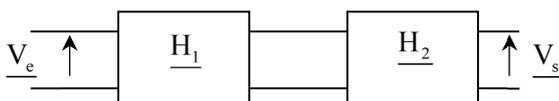


Conclusion modélisation complète d'un quadripôle



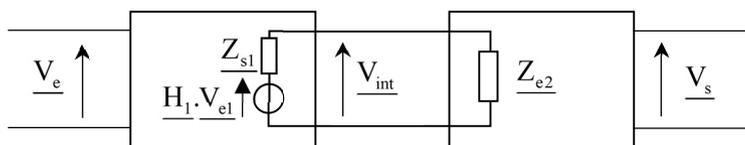
D- Utilisation

1- Filtre en cascade



Quelle est la fonction de transfert de l'ensemble ?

On utilise la modélisation précédente



On reconnaît un pont diviseur de tension : $\underline{V}_{int} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 \underline{V}_e$

On a donc
$$\underline{H}_{tot} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_{int}} \cdot \frac{\underline{V}_{int}}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 \underline{H}_2$$

Si $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$, on pourra considérer $\underline{H}_{tot} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$

Exemple avec le filtre du circuit 6 :

$$\underline{H}_{\text{tot}} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{s1} + \underline{Z}_{e2}} \underline{H}_1 \underline{H}_2 = \frac{\underline{Z}_{e2} \cdot \underline{Y}_{s1}}{1 + \underline{Z}_{e2} \cdot \underline{Y}_{s1}} \underline{H}_1 \underline{H}_2 = \frac{\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right)}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right)} \left(\frac{jx}{1 + jx} \right)^2$$

$$= \frac{2 + jx + \frac{1}{jx}}{3 + jx + \frac{1}{jx}} \left(\frac{jx}{1 + jx} \right)^2 = \frac{2jx + (jx)^2 + 1}{3jx + (jx)^2 + 1} \left(\frac{jx}{1 + jx} \right)^2$$

$$\underline{H}_{\text{tot}} = \frac{(jx)^2}{3jx + (jx)^2 + 1}$$

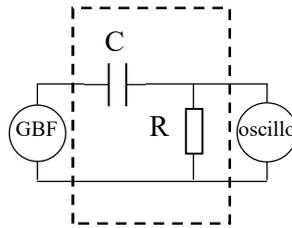
2- Intérêt en TP

Lors de l'étude d'un filtre en TP, on visualise $v_s(t)$ à l'oscilloscope (pour mesurer $|\underline{H}| = \frac{|V_s|}{|V_e|}$ et $\text{Arg}(\underline{H}) = \text{déphasage}$

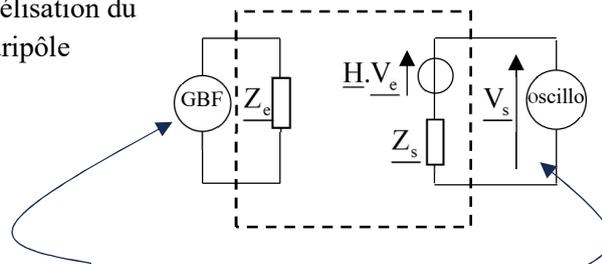
de $v_s(t)$ par rapport à $v_e(t)$).

On suppose alors que le filtre est étudié en circuit ouvert alors que l'on branche en sortie l'oscilloscope.

Montage de TP



Modélisation du quadripôle



On pourra considérer que le GBF est une source parfaite de tension

$$\text{si } r_{\text{int}} \ll |Z_e|$$

On pourra considérer $V_s = \underline{H} V_e$ si

$$|Z_s| \ll |Z_{\text{oscillo}}|$$