III- Réponse d'un filtre à un excitation périodique

C- Intégrateur, dérivateur

3- Pseudo-dérivateur

Soit $v_e(t)$ T-périodique de pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$

Soit un filtre passe-haut du 1er ordre de pulsation de coupure ω_c.

Si $\omega_e \ll \omega_c$ alors la sortie v_s est très faible (toutes les composantes de Fourier significatives de v_e sont hors bande passante), mais on constate que v_s est proportionnel à $\frac{dv_e}{dt}$; on dit que le filtre se comporte en **pseudo-dérivateur**.

Démonstration :

- $v_e(t) = V_{e,0} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{e,k} \cos(k\omega_e t + \varphi_k)$
- $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \underset{\omega \ll \omega_c}{=} H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}$
- Supposons que toutes les composantes significatives de v_e sont telles que $k\omega_e \ll \omega_c$ (k de 1 à 10 dans le cas d'un signal triangulaire ou sans discontinuité ; k de 1 à 50 dans le cas d'un signal avec discontinuité comme dans le cas d'un créneau).
  Pour les composantes significatives on a donc :
  $\frac{\underline{V_{s,k}}}{\underline{V_{e,k}}} = H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}$ $\qquad \underline{V_{s,k}} = \frac{H_0}{\omega_c} j\omega \underline{V_{e,k}}$ $\qquad v_{s,k}(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \frac{dv_{e,k}}{dt}$
- Sommons ces relations pour k = 1 … N
  $\underbrace{\sum_{k=1}^{N} v_{s,k}(t)}_{v_s(t)-\langle v_s \rangle} = \frac{H_0}{\omega_c} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{dv_{e,k}}{dt}}_{\frac{d}{dt}(v_e(t)-\langle v_e \rangle)=\frac{dv_e}{dt}}$
  $v_s(t) - \langle v_s \rangle = \frac{H_0}{\omega_c} \frac{dv_e}{dt}$
  Attention, la condition $k\omega_e \ll \omega_c$ ne peut pas être vraie pour tout k et en toute rigueur $v_s(t) - \langle v_s \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} v_{s,k}(t)$ mais la notion de composantes de Fourier « significatives » signifie que $v_s(t) - \langle v_s \rangle \approx \sum_{k=1}^{N} v_{s,k}(t)$
- De plus $\langle v_s \rangle = \lim_{\omega \to \infty} \underline{H} \times \langle v_e \rangle = 0$ pour un filtre passe haut.

On a donc bien $v_s(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \frac{dv_e}{dt}$

Généralisation :
Un filtre qui possède une fonction de transfert asymptotique de la forme $cst \times j\omega$ dans un large domaine de fréquences joue le rôle de pseudo-dérivateur pour tout signal périodique dont toutes les composantes de Fourier significatives sont dans ce domaine de fréquences.

Exemple (autre que le passe-haut d'ordre 1) : le passe bande du 2[d] ordre dans le domaine $\begin{cases} \omega \ll \omega_0 \\ \omega \ll Q\omega_0 \end{cases}$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underset{\substack{\omega \ll \omega_0 \\ \omega \ll Q\omega_0}}{=} \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega$$

Propriétés :
Un pseudo-dérivateur se reconnaît sur le diagramme de Bode : il faut qu'il existe un large domaine de fréquence où la courbe de gain se comporte comme une droite de pente **+20 dB/decade** et $\varphi \approx \pm\frac{\pi}{2}$

Intérêt du pseudo-dérivateur par rapport au dérivateur :
Les hautes fréquences de v_e ne sont pas dérivée mais simplement atténuées d'un facteur $G_\infty = \lim\limits_{\omega\to\infty}\left(\left|\underline{H}\right|\right)$. Ceci évite que le bruit haute fréquence qui s'ajoute à la partie utile de v_e ne soit dérivée. Une dérivation de ce bruit haute fréquence, même si son amplitude est très faible, provoquerait un bruit d'amplitude élevée sur v_s.

4- Pseudo-intégrateur

Soit $v_e(t)$ T-périodique de pulsation $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$

Soit un filtre passe-bas du 1[er] ordre de pulsation de coupure ω_c.

Si $\omega_e \gg \omega_c$ alors la sortie v_s est très quasiment constante égale à $G_0\left\langle v_e \right\rangle$ (toutes les composantes de Fourier significatives de v_e sont hors bande passante à l'exception de la valeur moyenne), mais on constate que les oscillations résiduelles de v_s autour de sa valeur moyenne sont proportionnelles à une primitive de v_e (la primitive de v_e de valeur moyenne nulle) ; on dit que le filtre se comporte en **pseudo-intégrateur**.

Démonstration :

- $v_e(t) = V_{e,0} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_{e,k}\cos(k\omega_e t + \varphi_k)$
- $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \underset{\omega \gg \omega_c}{=} H_0\omega_c \frac{1}{j\omega}$
- Les composantes de v_e sont telles que $k\omega_e \gg \omega_c$:

$$\frac{\underline{V_{s,k}}}{\underline{V_{e,k}}} = H_0\omega_c\frac{1}{j\omega} \qquad j\omega\underline{V_{s,k}} = H_0\omega_c\underline{V_{e,k}} \qquad \frac{dv_{s,k}}{dt}(t) = H_0\omega_c v_{e,k}$$

- Sommons ces relations

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dv_{s,k}}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(v_s(t)-\langle v_s\rangle\right)=\frac{dv_s}{dt}} = H_0\omega_c \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} v_{e,k}}_{v_e(t)-\langle v_e\rangle}$$

$$\frac{dv_s}{dt} = H_0\omega_c\left(v_e(t)-\langle v_e\rangle\right)$$

Généralisation :

Un filtre qui possède une fonction de transfert asymptotique de la forme $\frac{cst}{j\omega}$ dans un large domaine de fréquences joue le rôle de pseudo-intégrateur pour tout signal périodique dont toutes les composantes de Fourier significatives sont dans ce domaine de fréquences.

Exemple (autre que le passe-haut d'ordre 1) : le passe bande du 2^d ordre dans le domaine $\begin{cases}\omega \gg \omega_0 \\ \omega \gg Q\omega_0\end{cases}$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underset{\substack{\omega\gg\omega_0 \\ \omega\gg Q\omega_0}}{=} \frac{H_0\omega_0}{Q}\frac{1}{j\omega}$$

Propriétés :

Un pseudo-intégrateur se reconnaît sur le diagramme de Bode : il faut qu'il existe un large domaine de fréquence où la courbe de gain se comporte comme une droite de pente **-20 dB/decade** et $\varphi \approx \pm\frac{\pi}{2}$

Intérêt du pseudo-intégrateur par rapport à l'intégrateur :

La valeur moyenne de v_e n'est pas intégrée ; ce terme constant intégré amènerait à une divergence de v_s.