Étude d'une cellule de filtrage.

1- $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{\underline{Z}_{R\parallel C} + \underline{Z}_L} = \dfrac{1}{1 + \underline{Z}_L \underline{Y}_{R\parallel C}}$

$$= \frac{1}{1 + jL\omega\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega + (j\omega)^2 LC}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L}{R}$$

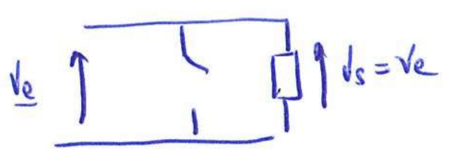
On retrouve bien $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{R}{L}\sqrt{LC} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

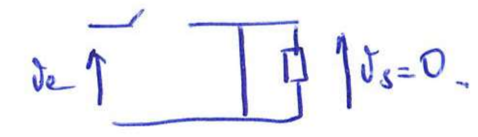
Fonction de transfert d'un passe bas (d'ordre 2) ; ce que confirme l'étude asymptotique

Basses fréquences

le circuit est éq. à



Hautes fréquences



2- $|\underline{H}|$ admet un extremum si $\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right| = |\underline{D}|$ en admet un.

$$|\underline{D}|^2 = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$= (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2} \quad \text{en posant } X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Etudions $f : X \longmapsto (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}$

$$f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q^2}.$$

$$f'(X) = 0 = 2X - 2 + \frac{1}{Q^2} \Rightarrow X = \frac{-1}{2Q^2} + 1.$$

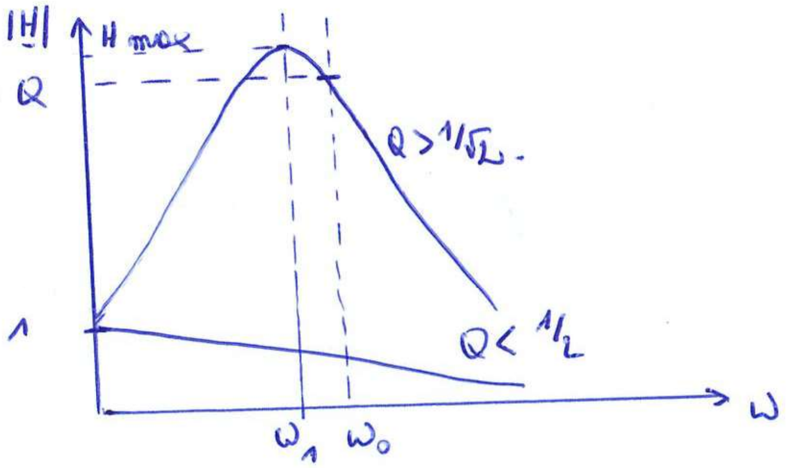
Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
et f donc $|\underline{H}|$ sont monotone.
$|\underline{H}|$ est décroissante pour $\omega \in \mathbb{R}$.

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ f' s'annule.
f donc $|\underline{H}|$ admet un extrémum
en $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$$H_{max} = \frac{1}{\left[\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1 - \frac{1}{2Q^2}}{Q^2}\right]^{1/2}}$$

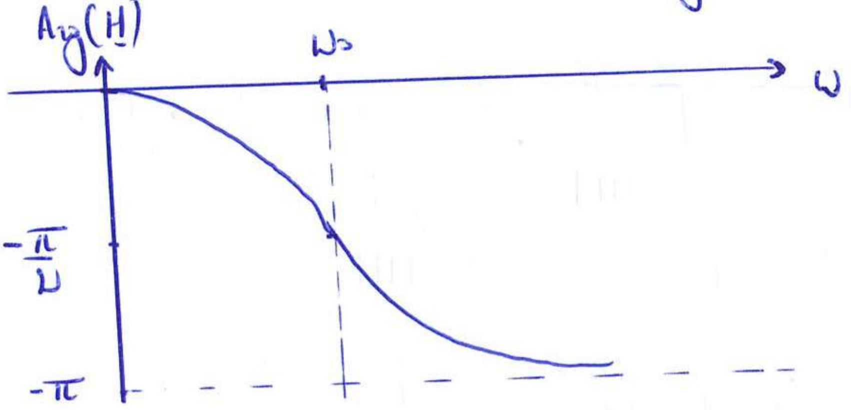
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} - \frac{1}{2Q^4} + \frac{1}{Q^2}}}$$

$$\boxed{H_{max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$



$$\operatorname{Arg}(\underline{H}) = -\operatorname{Arg}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$
$$= -\theta$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ $\quad \operatorname{Arg}(\underline{H}) \in [-\pi ; 0]$.

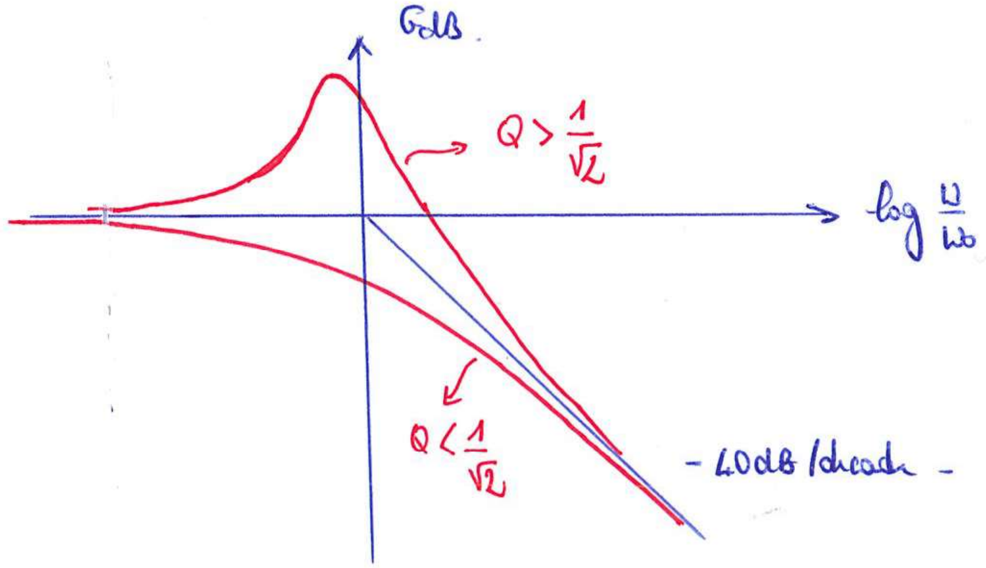


3- * $\omega \ll \omega_0$ $\quad \underline{H} \sim 1$ $\quad G_{dB} = 0$

Droite asymptote d'équation $G_{dB} = 0$ en $\log \frac{\omega}{\omega_0} \to -\infty$

$\omega \gg \omega_0$ $\quad \underline{H} \sim \dfrac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ $\quad G_{dB} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$

Droite asymptote oblique à la courbe de gain en $\log \frac{\omega}{\omega_0} \to +\infty$ de pente -40 dB/décade



4 - $V_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T v_1(t)\,dt$

$= \frac{1}{T}\int_0^{Tf} E\,dt$

$= E\,\frac{Tf}{T}$ $\boxed{V_{moy} = \alpha E}$

Fondamental : $\omega f = \frac{2\pi}{T}$

$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T v_1(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

$= \frac{2}{T}E\int_0^{Tf}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

$= \frac{2E}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{Tf}$

$a_1 = \frac{E}{\pi}\sin(2\pi\alpha)$

de même $b_1 = \frac{2E}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{Tf}$

$= \frac{E}{\pi}\left(1-\cos(2\pi\alpha)\right)$

donc $Vf^2 = a_1^2 + b_1^2$

$= \frac{E^2}{\pi^2}\left(\sin^2 2\pi\alpha + (1-\cos 2\pi\alpha)^2\right)$

$= \frac{E^2}{\pi^2}\left(2 - 2\cos 2\pi\alpha\right)$

$= \frac{E^2}{\pi^2}\,4\sin^2\pi\alpha$

$Vf = \frac{2E}{\pi}\left|\sin\pi\alpha\right|$

Premier harmonique $\underline{\omega_f = 2\frac{2\pi}{T}}$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T v_1(t)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)dt.$$
$$= \frac{2E}{T}\left[\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right]_0^{T_f}.$$
$$= \frac{E}{2\pi}\sin(4\pi\alpha).$$

et de même $b_2 = \frac{E}{2\pi}\left(1-\cos(4\pi\alpha)\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} V_R &= \sqrt{a_2^2+b_2^2} \\ &= \frac{E}{\pi}\left|\sin\pi\alpha\right| \end{aligned}}$$

5a- $v_1(t) = V_{moy} + V_f\cos(\omega_f t + \varphi_f)$

D'après la linéarité du filtre.

$$v_2(t) = \underbrace{H(0)\,V_{moy}}_{V_{2,0}} + \underbrace{|\underline{H}(\omega_f)|\,V_f}_{V_{2,f}.}\cos\left(\omega_f t + \varphi_f + \operatorname{Arg}(\underline{H}(\omega_f))\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_{2,0} &= 1.V_{moy} = \alpha E \\ V_{2,f} &= \frac{2E/\pi\,|\sin\pi\alpha|}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{2\pi}{\omega_0 T}\right)^2\right)^2+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{2\pi}{\omega_0 T}\right)^2}} \end{aligned}}$$

Ondulation crête à crête $\underline{\Delta v_2 = 2V_{2,f}}.$

6a $$\boxed{\alpha = \frac{V_{20}}{E} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{R = \frac{V_{20}}{I_2} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,\Omega}$$

6b. $$V_{1f} = \frac{2E}{\pi} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2E}{\pi} = 6{,}37\,V.$$

Donc $$|\underline{H}(\omega_f)| = \frac{V_{2f}}{V_{1f}} \leq \frac{1}{2}\,\frac{0{,}1}{6{,}37} = \quad , \quad 10^{-}$$

On peut supposer que $\omega_f \gg \omega_0$ de façon à pouvoir considérer $$|\underline{H}| \sim \frac{1}{\left(\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi $$\frac{\omega_0^2}{\omega_f^2} = \frac{1}{LC\omega_f^2} < \frac{V_{2f\,max}}{V_{1f}}.$$

Soit $$C > \frac{1}{L\omega_f^2}\,\frac{V_{1f}}{V_{2f\,max}} = \frac{T^2}{L\,4\pi^2}\,\frac{V_{1f}}{V_{2f\,max}}$$

AN $$C > \frac{1}{10^8} \cdot \frac{1}{125\;10^{-6}\;4\pi^2}\;\frac{6{,}37}{0{,}05} = 2{,}58\;10^{-4}\,F$$

$$\underline{C > 258\,\mu F}$$

6c - Le 1er harmonique non nul de v_1 est maintenant l'harmonique 3 car pour $\alpha = 2$, $v_1 - V_{10}$ est impaire ($a_k = 0$) et symétrique par rapport à $\frac{T}{4}$ ($b_{2k} = 0$)

$$\rightarrow V_k = \frac{2E}{3\pi}\,|\sin 3\pi\alpha| = \frac{2E}{3\pi}$$

$$\rightarrow V_{2k} = \frac{2E/_{3\pi}}{\left[\left(1 - 9\frac{4\pi^2}{\omega_0^2T^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_0^2}\,9\,\frac{4\pi^2}{\omega_0^2T^2}\right]^{1/2}} = 1{,}9\,mV$$

Amplitude crête à crête 3,8 mV maximale.