

DS de PHYSIQUE n° 1
Samedi 28 septembre 2024
4 heures

Exercice 1 : Electrostatique autour d'une sphère chargée

Partie 1 : polarisabilité de l'atome

On s'intéresse à un atome dont le noyau, de charge Ze , est supposé ponctuel et situé en un point P, tandis que le cortège électronique, de charge $-Ze$, est modélisé par une sphère de centre N et de rayon R , uniformément chargée en volume. Dans tout l'exercice, le point P se trouve à l'intérieur de la sphère de la sphère chargée, au voisinage de N.

- 1- Calculer le champ électrostatique créé par le nuage électronique en tout point de l'espace, puis montrer qu'en l'absence de champ électrique extérieur, N et P sont confondus. Que vaut le moment dipolaire de l'atome dans cette situation ?

On suppose maintenant que l'atome est plongé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}$.

On donne $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ en unités SI.

- 2- Faire un schéma représentant l'atome en l'absence de champ extérieur puis en présence du champ $\vec{E}$, en indiquant clairement dans quel sens se déplacent P et N entre la première et la seconde situation. On supposera que le nuage électronique reste sphérique en présence de $\vec{E}$ et que les déplacements de N et P sont faibles devant le rayon R du nuage.
 Déterminer le moment dipolaire $\vec{p}$ acquis par l'atome lors de l'application de $\vec{E}$, appelé moment dipolaire induit, et montrer que celui-ci peut s'écrire $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$. Exprimer le coefficient α , appelé polarisabilité de l'atome, en fonction des données et en déterminer un ordre de grandeur ; donner enfin un ordre de grandeur de la distance NP dans le cas d'un atome d'hélium placé dans un champ extérieur de 10^4 V.m^{-1} et commenter.

Partie 2 : Hémisphère chargé

- 0- Déterminer le champ électrostatique créé dans tout l'espace par une sphère de centre O, de rayon R chargée uniformément en surface avec la densité surfacique constante de charge σ

On considère maintenant une coquille hémisphérique (cet hémisphère est découpé dans une sphère creuse de centre O et de rayon R). Cette coquille hémisphérique est chargée en surface avec la densité surfacique constante de charge σ , elle est limitée par un plan diamétral (P) non chargé.

- 1- Montrer que le champ électrostatique créé en O est orthogonal à (P).
- 2- Calculer le champ électrostatique créé en O.
- 3- Montrer que le champ électrostatique créé en tout point du disque (découpé par la sphère sur P) est orthogonal à ce plan

Problème 1 : Etude d'une cellule de filtrage (ESIM 1996 – niveau CCP)

De nombreux circuits électroniques sont alimentés avec une tension continue de 5 V. Une “ alimentation à découpage ” transforme, en plusieurs étapes, la tension alternative sinusoïdale du réseau électrique en une tension continue. La dernière étape consiste à filtrer une tension rectangulaire représentée *figure 1* par le filtre passif “L,C” de la *figure 2* dans lequel la résistance R symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue.

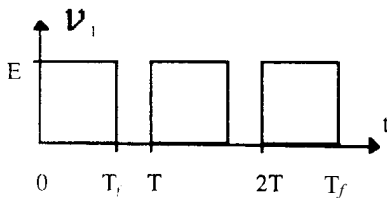


figure 1

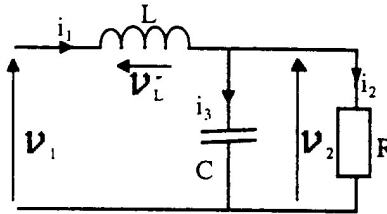


figure 2

On établit à l'entrée du filtre de la *figure 2* une tension sinusoïdale $V_1(t)$ de pulsation ω . On adopte la notation complexe.

On notera: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q_0 = \frac{R}{L\omega_0}$

- 1- Déterminer la fonction de transfert complexe de ce montage : $\underline{H} = \frac{V_2}{V_1}$
- 2- Étude en échelle linéaire de la fonction de transfert.
 - 2a- Quelle inégalité doit vérifier Q_0 pour que la courbe représentative de $|\underline{H}|$ en fonction de la pulsation ω présente un extremum ?
 - 2b- Quelle est alors, en fonction de ω_0 et Q_0 , la pulsation ω_1 de l'extremum H_{max} et la valeur de H_{max} ?
 - 2c- Représenter les deux allures possibles (suivant la valeur de Q_0) de la courbe représentative $|\underline{H}|$ en fonction de la pulsation ω en faisant clairement apparaître les points de pulsations remarquables ($\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$). Tracer l'allure de $\text{Arg}(\underline{H})$ en fonction de la pulsation ω .
- 3- Étude en échelle semi-logarithmique.
 - 3a- Rechercher les équations des directions asymptotiques de la courbe : $20 \cdot \log |\underline{H}| = f(\log \omega)$.
 - 3b- Tracer les directions asymptotiques et représenter les deux allures possibles des courbes réelles par rapport à ces directions asymptotiques.
- 4- On applique au filtre le signal rectangulaire $V_1(t)$ représenté à la *figure 1*. On appelle $\alpha = T_f/T$ le rapport cyclique variable ($0 < \alpha < 1$) de la tension $V_1(t)$.

Calculer la valeur moyenne V_{moy} de $V_1(t)$ et, à l'aide des relations rappelées en annexe, les amplitudes V_f du fondamental et V_h du premier harmonique non nul de $V_1(t)$. Exprimer, en fonction de la période T , les pulsations ω_f du fondamental et ω_h du premier harmonique.

- 5-** On admet que le signal rectangulaire $\mathbf{V}_1(t)$ est correctement représenté par la superposition de sa composante continue V_{moy} et de son terme fondamental d'amplitude V_f .
- 5a-** Calculer la valeur moyenne $V_{2,0}$ du signal $\mathbf{V}_2(t)$ à la sortie du filtre.
- 5b-** Exprimer l'amplitude V_{2f} de la composante alternative de $\mathbf{V}_2(t)$ en sortie du filtre en fonction de α , E , Q_0 , ω_0 et T . En déduire l'ondulation crête à crête ΔV_2 .
- 6-** Application numérique.
Le signal rectangulaire a une fréquence $f = 1/T = 10$ kHz et une amplitude $E = 10$ V.
On souhaite obtenir en sortie $V_{2,0} = 5$ V pour $I_2 = 10$ A. Les circuits électroniques alimentés fonctionnent correctement si ΔV_2 n'excède pas 100 mV.
- 6a-** Calculer α et R .
- 6b-** On choisit $L = 125$ μ H. Quelle valeur faut-il donner au condensateur C pour que la condition $\Delta V_2 \leq 100$ mV soit respectée avec l'hypothèse du 5° ?
- 6c-** Vérifier que le premier harmonique non nul de $\mathbf{V}_1(t)$ engendre en sortie du filtre une ondulation résiduelle de pulsation ω_h négligeable, en calculant littéralement puis numériquement l'amplitude crête à crête de cette ondulation.

ANNEXE

Développement en série de Fourier

$$f(t) = A_0 + \sum (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) = A_0 + \sum (C_n \cos(n\omega t - \Phi_n))$$

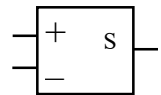
$$A_n = \left(\frac{2}{T} \right) \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad B_n = \left(\frac{2}{T} \right) \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Problème 2 : Etude d'un oscillateur quasi sinusoïdal. (d'après concours ; niveau Centrale)

Dans ce problème, les circuits des figures 1 et 3 contiennent un Amplificateur Linéaire Intégré (A.L.I.) idéal, dont les propriétés sont les suivantes :

- * Les résistances d'entrée de ses bornes + et - peuvent être considérées infinies.
- * Les potentiels de ses bornes + et - sont égaux à tout instant (régime dit linéaire).
- * Un courant est débité en sortie (borne S).
- * L'A.L.I. est alimenté par deux sources de tension continue, non représentées, de *f.é.m.* respectives notées $+V_0$ et $-V_0$, avec V_0 de l'ordre de $+12$ à $+15$ V.
- * La valeur absolue du potentiel de la borne de sortie ne peut jamais dépasser V_0 . Ainsi, si on alimente l'A.L.I. par des tensions trop élevées, le potentiel de sortie sature à $\pm V_0$.



A. Quadripôles constituant l'oscillateur.

- 1- On considère le quadripôle représenté sur la figure 1, noté (A). Etablir l'équation différentielle liant $e(t)$ et $s(t)$, en supposant la sortie ouverte et l'A.L.I. idéal, en régime linéaire. De quel type de quadripôle s'agit-il ?
- 2- On considère le quadripôle représenté sur la figure 2, noté (B) et appelé « pont de Wien ». Etablir l'équation différentielle liant $e(t)$ et $s(t)$, en supposant la sortie ouverte. De quel type de quadripôle s'agit-il ?

Figure 1

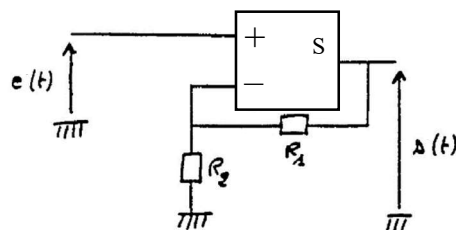


Figure 2

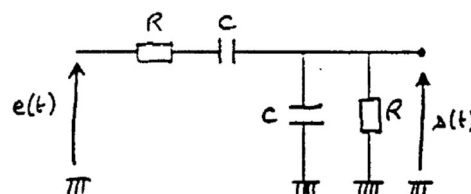
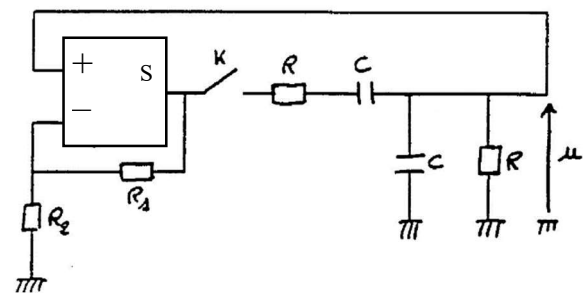


Figure 3



B. Réalisation de l'oscillateur.

On associe les quadripôles (A) et (B) dans le montage représenté sur la figure 3, appelé « oscillateur à pont de Wien ». Ce montage ne contient pas de générateur. Toutefois, lorsqu'on ferme l'interrupteur K à un instant choisi comme origine des temps, on constate que la tension $u(t)$ aux bornes de l'association parallèle R/C peut, sous certaines conditions, se mettre à osciller.

On supposera que, juste avant fermeture de l'interrupteur K , $u(t = 0^-)$ prend une valeur u_0 très faible et que la tension aux bornes du second condensateur est nulle.

- 1- Proposer une origine physique à la tension u_0 puis expliquer pourquoi les résultats établis au A. sont toujours valables dans ce montage, lorsque K est fermé.
- 2- Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ lorsque K est fermé s'écrit :

$$\tau \ddot{u} + (2 - \alpha) \dot{u} + u/\tau = 0$$
 où τ et α sont deux paramètres dont on donnera les expressions en fonction des données, ainsi que les dimensions.
- 3- Que valent $u(t)$ et sa dérivée temporelle juste après fermeture de K ?

C. Recherche d'une solution purement sinusoïdale.

- 1- Montrer que l'on peut observer une solution $u(t)$ purement sinusoïdale du temps en donnant au paramètre α une valeur particulière α_0 .
Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations observées ainsi que leur amplitude. D'où provient l'énergie nécessaire au maintien de ces oscillations ? Quel est l'intérêt d'un tel montage ?
- 2- On se propose de retrouver la condition d'oscillation précédente ainsi que la pulsation ω_0 par une autre méthode :
En envisageant a priori un régime permanent sinusoïdal de pulsation ω dans le montage, déterminer les fonctions de transfert respectives des dipôles (A) et (B).
En déduire qu'en l'absence de générateur, ce régime n'est compatible qu'avec une unique valeur de α et de la pulsation ω et conclure.
- 3- La situation décrite dans cette question est-elle réalisable en pratique ?

D. Absence d'oscillations entretenues.

- 1- Sur la base de l'équation différentielle obtenue au B., indiquer pour quelles valeurs de α la tension $u(t)$ tendra vers 0 après fermeture de l'interrupteur.
Expliquer physiquement cette évolution.
- 2- Déterminer alors l'expression de u en fonction du temps, des paramètres α et ω_0 et de deux constantes d'intégration que l'on n'explicitera pas. Tracer l'allure de $u(t)$.

E. Apparition d'oscillations entretenues.

- 1- Sur la base de l'équation différentielle obtenue au B., indiquer pour quelles valeurs de α la tension $u(t)$ peut croître au cours du temps, après fermeture de l'interrupteur.
A quelle condition cette croissance se présente-t-elle sous forme d'oscillations ?
Expliquer physiquement cette évolution en analysant l'effet de chacun des quadripôles (A) et (B).
Par quel phénomène $u(t)$ est-elle limitée en pratique et quelle est la valeur maximale qui sera observée.
- 2- Déterminer, en discutant selon la valeur de α l'expression de u en fonction du temps, des paramètres α et ω_0 et de deux constantes d'intégration que l'on n'explicitera pas. Tracer les allures possibles de $u(t)$ en n'oubliant pas de prendre en compte le phénomène limitatif décrit à la question précédente.

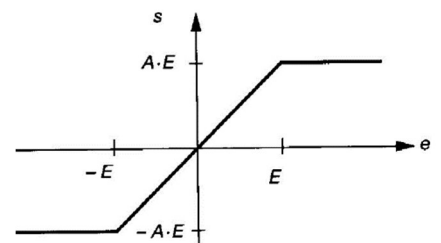
F. Etude du régime quasi sinusoïdal.

On constate que lorsque α est fixé à une valeur très proche de α_0 compatible avec l'existence des oscillations, le système est siège d'oscillations quasiment sinusoïdales. On se propose de décrire cette situation à l'aide de l'analyse de Fourier.

On suppose $u(t)$ suffisamment proche d'une pure sinusoïde pour effectuer tous les calculs à partir de l'expression : $u(t) = E_1 \sin(\omega t)$.

- 1- $u(t)$ s'applique à l'entrée d'un amplificateur dont la caractéristique peut être représentée comme sur la figure ci-contre. Commenter cette caractéristique et donner, en justifiant, un ordre de grandeur du coefficient A et la tension AE .

Pour les applications qui suivent, on prendra : $A = 3,1$ et $AE = 12$ V.



- 2- Pour quelles valeurs de E_1 le signal de sortie $s(t)$ de l'amplificateur n'est-il pas sinusoïdal ?
Représenter alors son allure. Montrer que, dans une telle situation, $s(t)$ reste néanmoins périodique puis calculer les amplitudes S_1 et S_h de son fondamental et de sa 1^{ère} harmonique non nulle. On

MP*

montrera que ces amplitudes s'écrivent :

$$S_1 = \frac{2A}{\pi} \left(\theta + \frac{\sin \theta}{2} \right) E_1 \quad \text{et} \quad S_h = \frac{A}{3\pi} \sin(2\theta) (1 + \cos(2\theta)) E_1 \quad \text{avec} \quad \theta = \arcsin\left(\frac{E}{E_1}\right)$$

- 3-** En étudiant l'effet du pont de Wien sur le signal $s(t)$, déterminer numériquement l'amplitude E_1 des oscillations de $u(t)$ et justifier le caractère quasi sinusoïdal de $u(t)$.

Problème 3 : Etude thermique d'une lampe à incandescence. (Extrait de Centrale MP 2000)

La partie du problème posée ici est complètement indépendante des aspects thermodynamiques détaillés en début d'énoncé et peut être traitée à partir de la seule équation différentielle fournie dans la question II.A.1.

Des annexes figurent en fin d'énoncé.

On s'intéresse à une ampoule à incandescence dont le filament, constitué de tungstène très pur, est assimilé à un cylindre de rayon r et de longueur L .

II.A - Étude théorique de l'évolution périodique de la température

En dépit de l'inertie thermique du filament, lorsqu'on alimente une ampoule à incandescence avec une tension périodique $u_a(t)$ de période τ , la température du filament devient une fonction périodique du temps notée $T(t)$. On note m la masse du filament et c_p la capacité thermique massique du tungstène. Afin de proposer un modèle des phénomènes physiques observés, on retient les hypothèses simplificatrices suivantes :

- a) Le filament absorbe l'énergie électrique et rayonne comme un corps gris suivant la loi de Stefan. (On rappelle qu'il suffit de remplacer σ par σ_1 dans la loi de Stefan.)
- b) On néglige les phénomènes convecto-diffusifs et le rayonnement du verre de l'ampoule.
- c) La température $T(t)$, supposée uniforme dans tout le filament varie autour d'une valeur moyenne T_0 . On note $\theta(t)$ l'écart en température : $T(t) = T_0 + \theta(t)$ avec $|\theta(t)| \ll T_0$.
- d) On néglige les variations de résistance du filament avec la température : $R(T) \equiv R(T_0) = R_0$.
- e) La capacité thermique massique c_p du tungstène est constante dans le domaine de variation de température considéré.
- f) La tension $u_a(t)$ varie suffisamment lentement pour que l'auto-inductance du filament puisse être négligée.

II.A.1) Équation d'évolution de la température

Le cours sur le rayonnement n'ayant pas encore eu lieu, on admet que les hypothèses ci-dessus reviennent à considérer que l'équation différentielle vérifiée par l'écart de température $\theta(t)$ est la suivante :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 2\pi r L \sigma_1 (T_0^4 + 4T_0^3 \theta(t)) = \frac{u_a^2(t)}{R_0}$$

II.A.2) Que vaut, par définition de T_0 , la valeur moyenne

$$\langle \theta(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \theta(t) dt.$$

Déduire de l'équation différentielle établie à la question précédente, la valeur de T_0 en fonction des constantes du problème et de la valeur efficace de $u_a(t)$ notée u_{aRMS} et donnée par la relation

$$u_{aRMS}^2 = \langle u_a^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_a^2(t) dt$$

II.A.3) On étudie maintenant le cas où le filament est alimenté par une tension sinusoïdale $u_a(t) = U_a \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2} t$. On suppose alors, que la température $T(t) = T_0 + \theta(t)$ varie sinusoïdalement autour de T_0 avec $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$ et $\theta_m \ll T_0$.

a) Exprimer la puissance électrique $P_e(t)$ fournie au filament en fonction de U_a , R_0 , ω et t .

b) Justifier la fréquence proposée pour l'expression de $\theta(t)$.

c) On pose $\theta(t) = \text{Re}(\theta \exp(i\omega t))$. Montrer que la représentation complexe de l'écart en température est donnée par la relation

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + i \frac{\omega}{\omega_C}} \text{ où } \theta_0 \text{ s'exprime de façon simple en fonction de } T_0.$$

d) Quelle est la nature du filtre que constitue le filament, en considérant $\theta(t)$ comme grandeur de sortie et la composante sinusoïdale de $P_e(t)$ comme grandeur d'entrée ? Donner l'expression de ω_C en faisant intervenir la masse volumique μ du tungstène. Vérifier que ω_C est indépendante de la longueur du filament. Dans quel domaine de fréquence a-t-on $\theta_m < T_0/10$?

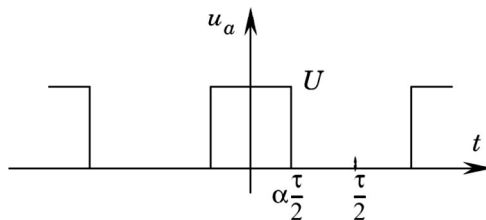
e) Application numérique : $c_p = 0,16 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\mu = 19 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la fréquence de coupure ν_C définie par $\omega_C = 2\pi\nu_C$.

On donne également : $L = 4 \text{ cm}$; $r = 0,03 \text{ mm}$; $T_0 = 2600 \text{ K}$; $\sigma_1 = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

II.B - Modulation de l'intensité lumineuse par largeur d'impulsion

On alimente la lampe avec une tension rectangulaire $u_a(t)$ périodique, représentée ci-dessous et définie sur une période τ par :

$$u_a(t) = U \text{ pour } |t| \leq \frac{\alpha\tau}{2} \text{ et } u_a(t) = 0 \text{ pour } \frac{\alpha\tau}{2} < |t| \leq \frac{\tau}{2}.$$



On agit sur l'intensité lumineuse émise par le filament, en modifiant le rapport cyclique α (compris entre 0 et 1).

II.B.1) Justifier qualitativement qu'une variation de α permet de faire varier l'intensité lumineuse émise par le filament.

II.B.2) Afin d'étudier quantitativement l'effet de cette tension d'alimentation, on cherche la décomposition en série de Fourier du terme de puissance $P_e(t) = u_a^2(t)/R_0$ apparaissant au second membre de l'équation différentielle suivie par $\theta(t)$. Justifier sans calcul que cette décomposition s'écrit sous la forme :

$$P_e(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos(n\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

II.B.3) En utilisant l'annexe 1, calculer le terme P_0 et les termes P_n ; on mettra ces derniers sous la forme :

$$P_n = \beta P_0 \text{sinc}(n\pi\alpha)$$

où sinc désigne la fonction « sinus cardinal » définie dans l'annexe 2 et β est un coefficient à déterminer. Représenter le spectre en fréquence de $P_e(t)$ dans le cas où $\alpha = 1/3$.

En notant $\underline{P}(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n e^{in\omega t}$ on peut encore écrire $P_e(t) = \text{Re}(\underline{P}(t))$.

II.B.4) L'écart en température $\theta(t)$ étant une fonction τ périodique de valeur moyenne nulle, on peut l'écrire

$$\theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

On note $\theta_n = c_n e^{i\varphi_n}$ et on définit $\underline{\theta}(t)$, représentation complexe de la décomposition en série de Fourier de $\theta(t)$, par la relation

$$\underline{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\theta}_n e^{in\omega t}.$$

On a bien sûr, la relation $\theta(t) = \text{Re}(\underline{\theta}(t))$. Exprimer les coefficients $\underline{\theta}_n$ à l'aide des coefficients P_n , puis en fonction de T_0 , ω_C , n , ω et α . Simplifier cette relation dans le cas où $\omega \gg \omega_C$.

II.B.5) Afin de caractériser l'écart en température, on introduit sa valeur quadratique moyenne définie par

$$\theta_{RMS}^2 = \langle \theta^2(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \theta^2(t) dt.$$

Exprimer θ_{RMS} en fonction des coefficients $\underline{\theta}_n$, en déduire le taux d'ondulation de la température du filament défini par

$$\delta_0 = \frac{\theta_{RMS}}{T_0}.$$

Quelle est la limite de δ_0 lorsque la période τ de la tension d'alimentation diminue ?

Annexe 1

On rappelle les propriétés du développement en série de Fourier d'une fonction $v(t)$ périodique de période T et de pulsation $\omega = 2\pi/T$:

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \cos(k\omega t + \varphi_k) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

$$\text{avec } \forall k \geq 1 \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(k\omega t) dt$$

Annexe 2

Définition de la fonction « sinus cardinal » :

$$x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{noté } \text{sinc}(x)$$

Graphique de la fonction « sinus cardinal » :

