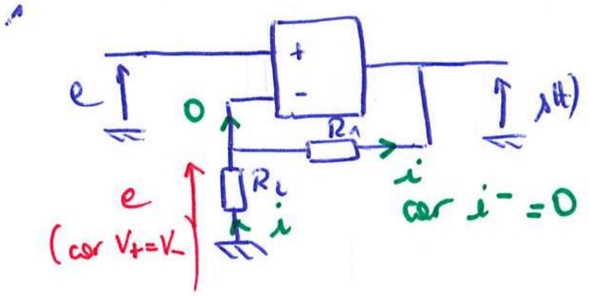
Etude d'un oscillateur quasi sinusoïdal.

A - Quadripôles constituants l'oscillateur.



$$i = -\frac{e}{R_2} = -\frac{s}{R_1+R_2}$$

Donc $s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e$

Montage amplificateur.

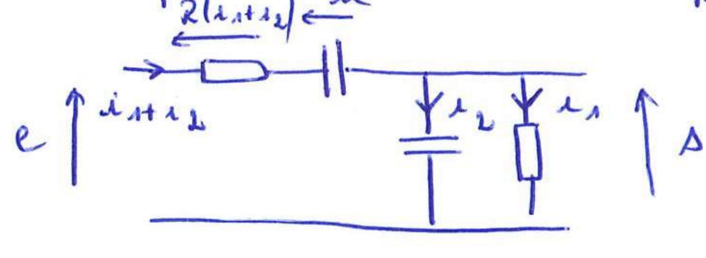
Rq on aurait aussi pu utiliser la loi des noeuds en termes de potentiels en E^-

$$V^- = \frac{\frac{0}{R_2} + \frac{s}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} \quad \text{car } i = 0$$

$$= V_+ = e.$$

Donc $\frac{s}{R_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)e$

2. On peut obtenir l'équation différentielle directement.



Inconnues : i_1, i_2, s, u (4)

Equations

$$\begin{cases} i_2 = C\dfrac{ds}{dt} \\ i_1 + i_2 = C\dfrac{du}{dt} \\ s = R i_1 \\ e = s + u + R(i_1+i_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{R} = C\dfrac{du}{dt} \\ e = s + u + s + RC\dfrac{ds}{dt} \end{cases}$$

Donc $\dfrac{de}{dt} = 2\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{du}{dt} + RC\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

$$= 2\frac{ds}{dt} + \left(\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s\right) + RC\frac{d^2s}{dt^2}.$$

On obtient $\underline{\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{3}{RC}\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{1}{(RC)^2}s = \dfrac{1}{RC}\dfrac{de}{dt}}$.

Rq on aurait également pu supposer que l'on travaille en régime harmonique

Alors $\underline{S} = \dfrac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_{R\parallel C}} E$

$$= \frac{1}{1 + (Z_R + Z_C)Y_{R\parallel C}} E$$

$$= \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} E$$

$$\underline{S} = \frac{1}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega}\underline{E}$$

$$= \frac{jRC\omega}{3jRC\omega + 1 + (jRC\omega)^2}\underline{E}$$

Soit $\left(3jRC\omega + 1 + (jRC\omega)^2\right)\underline{S} = jRC\omega\underline{E}$

ce qui redonne en réels

$$s + 3RC\frac{ds}{dt} + (RC)^2\frac{d^2s}{dt^2} = RC\frac{de}{dt}$$

L'équation différentielle ainsi obtenue est valable quelle que soit la forme de e(t)

Il s'agit de l'équation différentielle d'un filtre passe bande.

$H_0 = 1 \qquad Q = \frac{1}{3} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$

B- Réalisation de l'oscillateur.

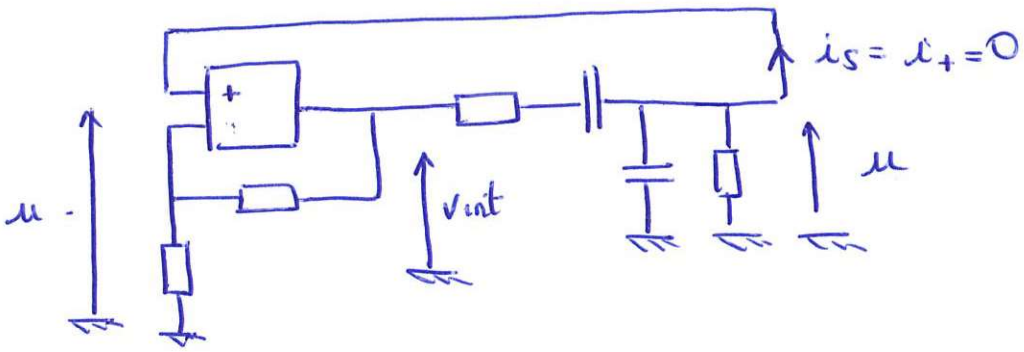
1. u_0 non nulle peut être un "bruit" (sur lq démarrent les oscillations.

Montage amplificateur :
→ il n'est pas utilisé en circuit ouvert
mais on n'a jamais utilisé $i_s = 0$
pour établir la relation au A1
(cela signifie que $Z_s = 0$ pour ce montage)

Filtre passe bande.

→ On explicite utilisé $i_s = 0$

→ Ici $i_s = i_+ = 0$ Donc la relation du A2 reste valable.



On a donc $$V_{int} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) u.$$

et $$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u = \frac{1}{\tau}\frac{dV_{int}}{dt}$$

avec $\tau = RC$.

Donc $$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\left(2 - \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u = 0.$$

de la forme proposée avec $\alpha = \frac{R_1}{R_2}$

$\tau = RC$.

$\dim \alpha = 1 \quad \dim \tau = T$

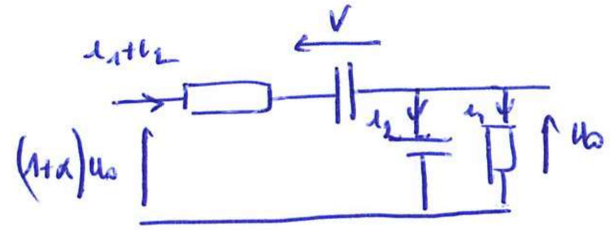
3- Juste après fermeture de l'interrupteur.

La continuité de la tension aux bornes de C impose

$u(0^+) = u_0$.

$(v(0^+) = 0$ aux bornes du 2^{nd} condensateur.

Les equations du AL donnent à 0^+.



$$\begin{cases} i_2(0^+) = C\dfrac{du}{dt}(0^+) \\ i_1(0^+) + i_2(0^+) = C\dfrac{dV}{dt}(0^+). \\ u_0 = R\,i(0^+) \\ (\cancel{1} + \alpha)\,u_0 = \cancel{u_0} + \underbrace{V(0^+)}_{0} + R\big(i_1(0^+) + i_2(0^+)\big) \end{cases}$$

Donc $\alpha u_0 = u_0 + R\,i_2(0^+)$

Soit $i_2(0^+) = (\alpha - 1)\dfrac{u_0}{R}$

et $\boxed{\dfrac{du}{dt}(0^+) = (\alpha - 1)\dfrac{u_0}{RC}.}$ et $\boxed{u(0^+) = u_0}$

C- Recherche d'une solution purement sinusoïdale.

1- Si $\underline{\alpha = 2}$ on obtient l'equation d'un oscillateur harmonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau^2}\,u = 0.$$

$$u = A\cos\left(\frac{t}{\tau}\right) + B\sin\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$A = u_0$$

$$\frac{B}{\tau} = (\alpha - 1)\frac{u_0}{\tau} = \frac{u_0}{\tau} \quad (\alpha = 2)$$

$$u(t) = u_0\left(\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right)$$

$$= u_0\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$ et l'amplitude est $\sqrt{2}\,u_0$.

L'énergie nécessaire au maintien des oscillations est fournie par l'ALI (et donc provient de l'alimentation de l'ALI)

Ce montage permet d'obtenir des oscillations de pulsation fixée.

2 - On a déjà trouvé au A.

$$\frac{\underline{V_{int}}}{\underline{U}} = 1+\alpha \qquad \text{Montage amplificateur.}$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{V_{int}}} = \frac{j\omega\tau}{1+3j\omega\tau+(j\omega\tau)^2}$$

Il faut donc.

$$\frac{(1+\alpha)\,j\omega\tau}{1-(\omega\tau)^2+3j\omega\tau} = 1.$$

Soit $\begin{cases} 1-(\omega\tau)^2 = 0 \\ 1+\alpha = 3 \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{matrix} \omega = \frac{1}{\tau} \\ \alpha = 2 \end{matrix}}$

On retrouve les mêmes paramètres

3- Les oscillations seront de très faibles amplitude $\sqrt{2}\,U_0$ comparable au bruit donc peu exploitables.

D- Absence d'oscillations entretenues

1.2- Si $\alpha < 2$ l'équation est celle d'un oscillateur amorti.

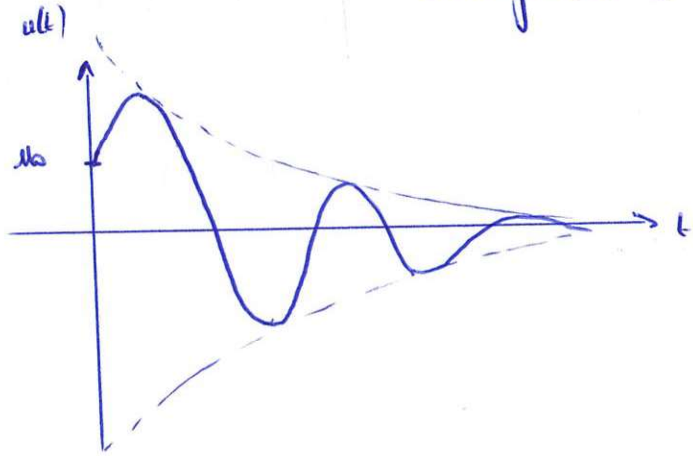
le discriminant de l'équation caractéristique est négatif

$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4 < 0$: régime pseudo périodique.

$$x_\pm = -\frac{2-\alpha}{2}\frac{1}{\tau} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\tau} = -\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\omega_0 \pm i\frac{\sqrt{\alpha(4-\alpha)}}{2}\omega_0$$

$$u(t) = U_0 \underbrace{\exp\Big(-\underbrace{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}_{>0}\omega_0 t\Big)}_{\text{exp. décroissante}} \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha(4-\alpha)}}{2}\omega_0 t + \varphi\right)$$

U_0 et φ sont les constantes d'intégration.



Les oscillations vont s'éteindre car l'amplification n'est pas suffisante pour compenser les pertes (l'énergie apportée par l'ALI au circuit ne compense pas les effets Joule)

E- Apparition d'oscillations entretenues.

1- Pour $\alpha > 2$, le coefficient $(2-\alpha)\omega_0$ de l'équation différentielle devient négatif ; ce qui traduit une instabilité.

Eq. caractéristique $\quad \tau X^2 + (2-\alpha)X + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\omega_0} X^2 + (2-\alpha)X + \omega_0$

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4$$

L'évolution fera apparaître des oscillations si $\Delta < 0$.

soit $\quad 4 > (2-\alpha)^2$

$$-2 < 2-\alpha < 2$$

Tjs vérifié car $\alpha > 0$.

$$\alpha < 4$$

Pour $2 < \alpha < 4$ il apparaîtra des oscillations amplifiées.

$$u(t) = U_0 \underbrace{\exp\left(\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\omega_0 t\right)}_{\text{exp croissante}} \cos\left(\sqrt{|\Delta|}\, t + \varphi\right)$$

* Cette croissance des oscillations est possible car la décroissance induite par le pont de wien (B) est compensé par l'amplification (A). En termes énergétiques, la dissipation d'énergie dans les résistances du circuit est compensé par le fait que l'ALI est un composant actif et injecte de l'énergie dans le circuit | l'énergie vient de l'alimentation +15V / -15V de l'ALI.

* Le pont de Wien (B) assure lui une sélection en fréquences.
Seules les oscillations de fréquences tq $(1+\alpha)|\underline{H}(j\omega)| > 1$ seront amplifiées

* L'amplitude de $u(t)$ est limitée par la saturation de l'ALI à V_0
En effet en fonctionnement linéaire $s(t) = (1+\alpha)\,u$
et $|s| < V_0$ ce qui suppose $|u| < \dfrac{V_0}{1+\alpha} = u_{sat}$

Si $|u(t)|$ dépasse u_{sat} l'ALI sature et l'équation différentielle n'est plus valable ; c'est donc certain ! ce qui explique l'arrêt de la croissance des oscillations.

Rq non demandée si l'ALI sature, en reprenant les notations de la question B2.

$V_{int} = +V_0$ (par exemple)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

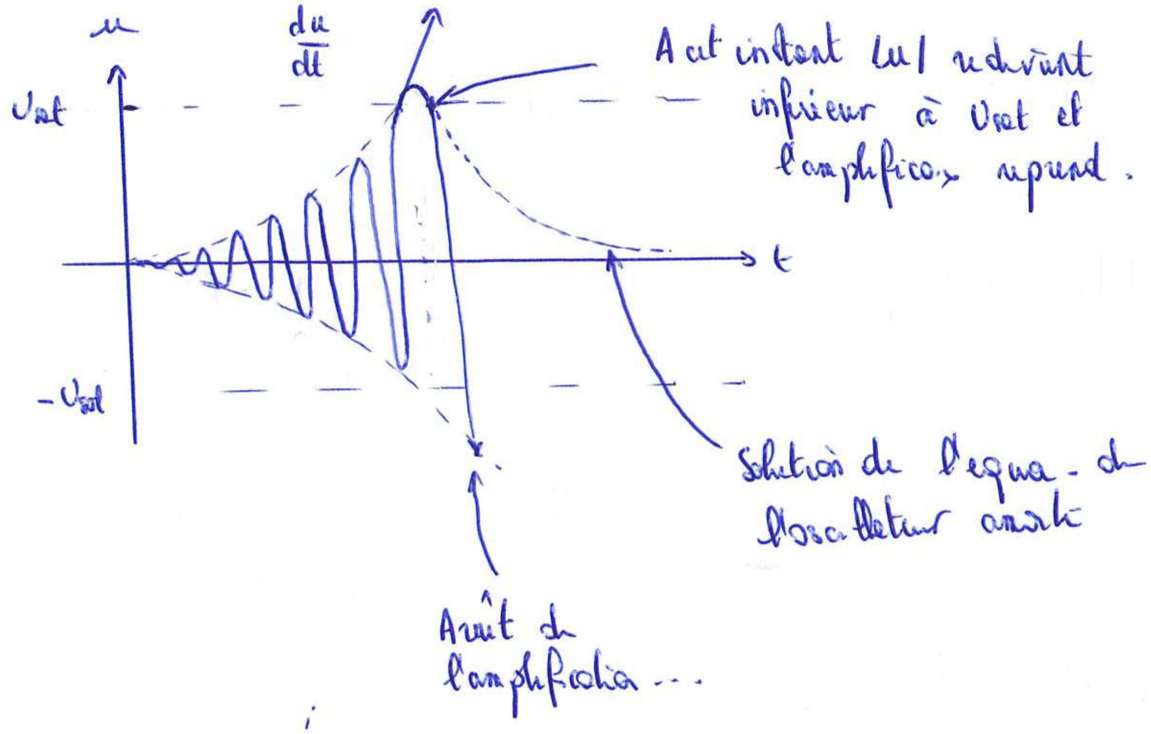
On retrouve un oscillateur amorti et $u(t)$ va décroître (pas instantané ! si $\frac{du}{dt} > 0$ au moment de la commutation)

2. $2 < \alpha < 4$ $\quad u(t) = U_0 \exp\left(\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\omega_0 t\right)\cos\left(\sqrt{|\Delta|}\,t + \varphi\right)$

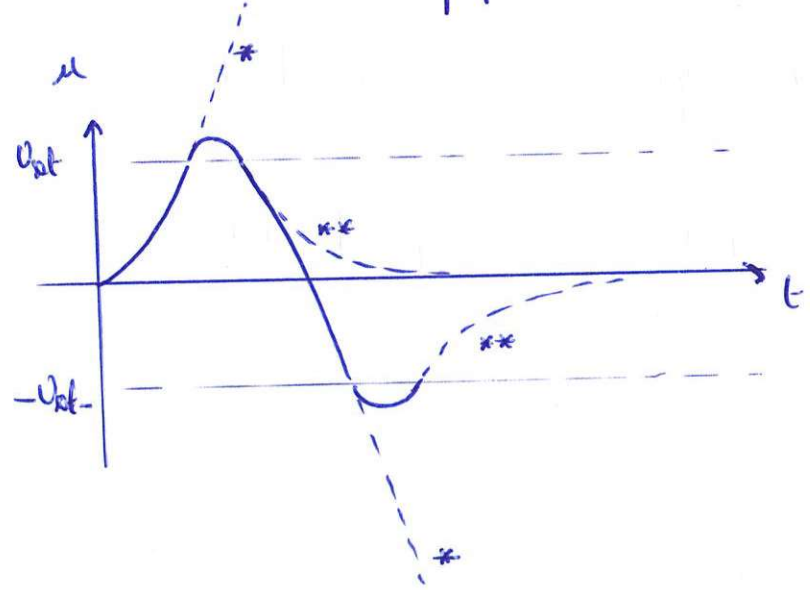
$\alpha = 4$ $\quad u(t) = \exp(\omega_0 t)\,(At+B)$

$\alpha > 4$ $\quad u(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}$ $\quad r_\pm = \left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\omega_0 \pm \sqrt{\Delta}\,\omega_0$

$2 < \alpha < 4$



$\alpha > 4$



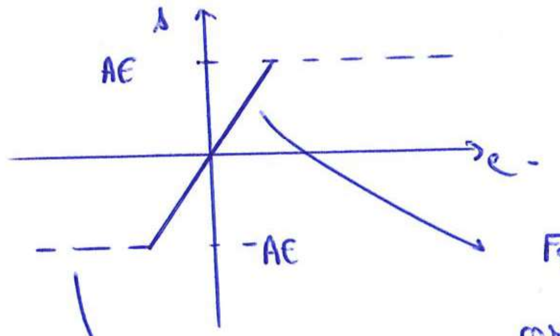
* solution en exp croissante : phase d'amplification lorsque l'ALI fonctionne en régime linéaire

** solution en exp décroissante : phase d'atténuation lorsque l'ALI est saturé.

Ds les 2 configurations la succession des phases amplification / atténuation provoque l'apparition d'oscillations d'amplitude Usat (proche de Vsat)

F- Etude du régime quasi sinusoïdal -

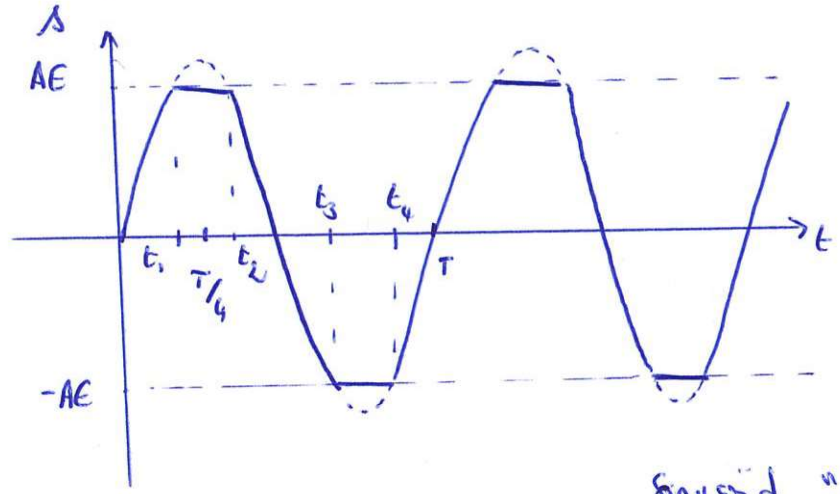
1.



Fonction en amplificateur $s = Ae$.
correspond à l'étude du A
avec $A = 1+\alpha \simeq 1+\alpha_0 = 3$.

L'ALI sature quand $|s|$ atteint V_0.
donc $AE = V_0$. de 12 à 15 V d'après l'énoncé

2. $s(t)$ ne sera plus sinusoïdale lorsque $s(t)$ dépasse $U_0 = AE$
soit lorsque $E_1 > E$.



sinusoïde "tronquée".

$s(t)$ reste sinusoïdal -
t_1 vérifie $AE_1 \sin \omega t_1 = AE$ $\qquad \omega t_1 = \arcsin \frac{E}{E_1}$

$t_1 = \frac{\theta}{\omega}$ -

Amplitude de S_1 et S_2 (question calculatoire)

↳ posé à un oral de l'X…

$s(t)$ reste impaire et symétrique par rapport à $\frac{T}{4}$ donc

$a_k = 0$

$b_{2k} = 0$

$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin\left((2k+1)\omega t\right)$

$$S_1 = b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{8}{T}\int_0^{T/4} \sin(\omega t)\, s(t)\,dt \quad \text{(sym / } \tfrac{T}{4} \text{ et impaire)}$$

$$= \frac{8}{T}\int_0^{\theta/\omega} A E_1 \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))} dt + \frac{8}{T}\int_{\theta/\omega}^{T/4} AE \sin \omega t \,dt$$

$$= \frac{8}{T}\frac{AE_1}{2}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^{\theta/\omega} + \frac{8AE}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_{\theta/\omega}^{T/4}$$

$$= \frac{4E_1A}{T}\left(\frac{\theta}{\omega} - \frac{1}{2\omega}\underbrace{\sin(2\theta)}_{\substack{2\sin\theta\cos\theta \\ 2\frac{E}{E_1}\cos\theta}}\right) + \frac{8AE}{T\omega}\cos\theta \quad *$$

$$= 2\frac{AE_1}{\pi}\theta - 4\frac{A\cancel{E_1}}{2\pi}\,2\frac{E}{\cancel{E_1}}\cos\theta + \frac{4AE}{\pi}\cos\theta$$

$$= 2\frac{AE_1}{\pi}\theta + 2\frac{AE}{\pi}\cos\theta.$$

Repris à +

$$S_1 = \frac{2E_1 A\theta}{2\pi} - \frac{E_1 A}{2\pi}\sin 2\theta + \frac{4AE}{2\pi}\cos\theta$$

θ : $\sin\theta = \frac{E}{E_1}$

$2AE\cos\theta = 2E_1 A\sin\theta\cos\theta$

$= E_1 A\sin 2\theta$

$$= 2\frac{E_1 A}{\pi}\theta - 2\frac{E_1 A}{2\pi}\sin 2\theta + 2\frac{E_1 A}{\pi}\sin 2\theta$$

$$\underline{S_1 = 2\frac{E_1 A}{\pi}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)}$$

Le premier harmonique correspondra à l'harmonique 3.

$$S_h = b_3 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} s(t)\sin(3\omega t)\,dt$$

$$= \frac{4}{T}2\int_0^{T/2} s(t)\sin(3\omega t)\,dt$$

$$= \frac{4}{T}2\int_0^{\theta/\omega} AE_1 \underbrace{\sin(\omega t)\sin(3\omega t)}_{\frac{1}{2}(\cos(2\omega t) - \cos(4\omega t))}dt + \frac{4}{T}2\int_{\theta/\omega}^{T/4} AE\sin(3\omega t)$$

$$= \frac{4AE_1}{T}\left[+\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t) - \frac{1}{4\omega}\sin(4\omega t)\right]_0^{\theta/\omega} + \frac{8AE}{T}\left[\frac{-1}{3\omega}\cos 3\omega t\right]_{\theta/\omega}^{T/4}$$

$$= \frac{AE_1}{\pi}\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta\right) + \frac{4}{3\pi}\underbrace{AE\cos 3\theta}$$

$E_1\sin\theta\cos 3\theta$

$= \frac{E_1}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta)$

$$S_h = \frac{AE_1}{\pi}\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta + \frac{2}{3}\sin 4\theta - \frac{2}{3}\sin 2\theta\right)$$

$$= \frac{AE_1}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin 2\theta + \underbrace{\frac{1}{6}\sin 4\theta}_{\frac{1}{3}\sin 2\theta\cos 2\theta}\right)$$

On retrouve bien $S_R = \frac{AE_1}{3\pi}\sin 2\theta\left(1+\cos 2\theta\right)$

3. Idée de fonctionnement.

Amplification avec saturation à AE

$s(t) = S_1 \sin(\omega t) + S_3 \sin 3\omega t$.

Filtre de Wien.

$u(t) = E_1 \sin(\omega t) + E_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$

Pour que cette approche soit cohérente il faut que u soit quasiment sinusoïdal c'est que $E_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$ soit négligeable devant $E_1 \sin \omega t$.
C'est possible car $\omega \approx \omega_0$ pulsation centrale du filtre alors que $3\omega = 3\omega_0$ conduit à une atténuation plus importante par le filtre.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1/3}{1 + j\frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{et} \quad |\underline{H}(\omega_0)| = \frac{1}{3}$$

$$|\underline{H}(3\omega_0)| = \frac{1/3}{\sqrt{1 + \frac{1}{3^2}\left(3 - \frac{1}{3}\right)^2}} = 0{,}25$$

Donc $E_1 = \frac{1}{3} S_1$

$E_3 = 0{,}25 S_3$.

Pour obtenir E_1 on peut utiliser

$$\cancel{E_1} = \frac{1}{3} S_1 = \frac{2}{3\pi} A \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \cancel{E_1}$$

Soit θ solution de $\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{3\pi}{2A} = 1{,}52$.

Une résolution numérique donne $\theta = 1{,}08$ rad

Comme $A = 3{,}1$ et $AE = 12V$ on obtient $E = 3{,}87V$

et ainsi $E_1 = \frac{E}{\sin\theta} = 3{,}87 V$

On obtient ensuite

$E_1 = 4{,}38 V$ $\quad E_3 = 0{,}12V$ $\quad (2{,}7\%$ de $E_1) \to$ u est quasi sinusoïdal.

$S_1 = 13{,}1V$ $\quad S_3 = 0{,}53V$ $\quad (4{,}7\%$ de $S_1)$