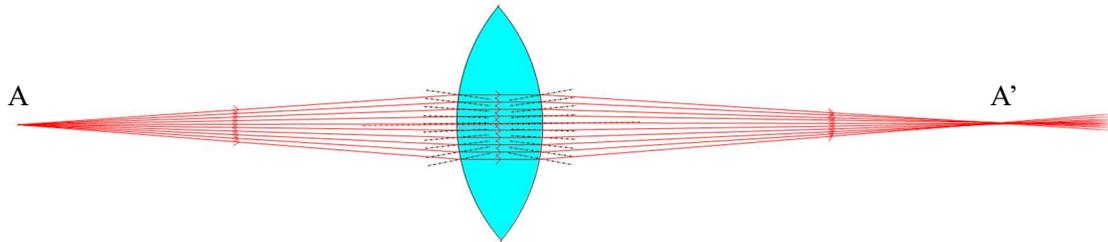


Interrogation sur le cours de première année : correction

PHYSIQUE

1- Un système optique (S) est dit stigmatique pour le couple de point (A, A') si tous les rayons incidents sur (S) passant par A (ou dont le prolongement passe par A) émergent de (S) en passant par A' (ou en ayant leur prolongement passant par A'). On dit alors que A' est l'image de A par (S)



Un système optique centré (S), d'axe optique Δ est utilisé dans les conditions de Gauss si les rayons incidents sur (S) sont :

- peu écartés de Δ
- peu inclinés par rapport à Δ

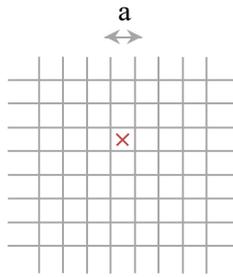
Utilisé dans les conditions de Gauss, la plupart des systèmes optiques centrés sont stigmatiques et aplanétiques approchés.

Cette condition est nécessaire pour assurer que des « images » (au sens commun du mot) de bonne qualité, nette, se forme sur les détecteurs/capteurs (plans).

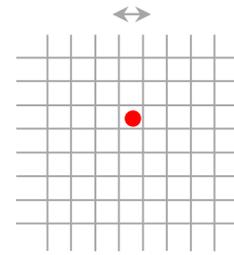
Cette condition est également suffisante puisque les détecteurs n'ont pas une résolution infinie.

Prenons l'exemple des capteurs CCD des appareils photos numériques. Ces capteurs ont une dimension a (dimension du pixel) et il suffit que la tâche ait un diamètre inférieur à a pour qu'elle ait le même effet qu'un point (cf schéma page suivante).

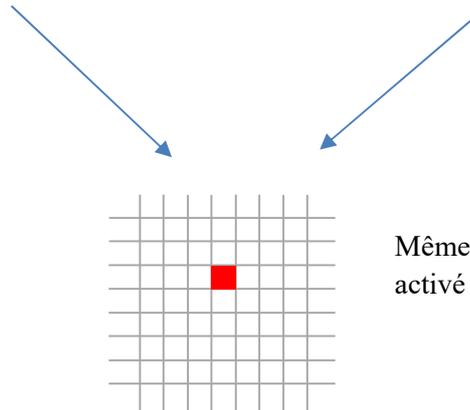
Remarque : le stigmatisme absolu n'existe pas ; c'est une abstraction de l'optique géométrique : la divergence naturelle d'un faisceau fait qu'il est impossible de le faire converger parfaitement en un point



Un point lumineux se forme sur un pixel



Une tâche lumineuse de petite dimension se forme sur un pixel



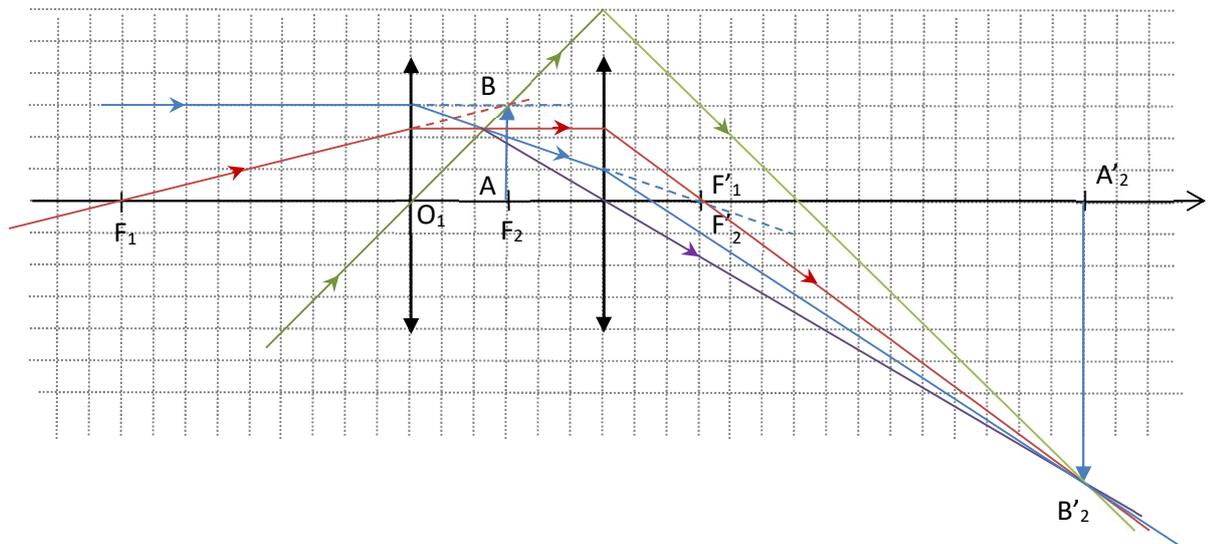
Même effet : un seul pixel activé

$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2$; en utilisant les formules de Descartes

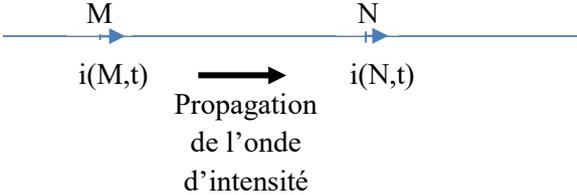
$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \quad \frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{1}{f'_1} \quad \frac{1}{O_1 A_1} - \frac{2}{e} = \frac{2}{3e} \quad \text{donc} \quad \overline{O_1 A_1} = \frac{3}{8}e$$

$$A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \quad \frac{1}{O_2 A_2} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{O_2 A_2} - \frac{1}{O_2 O_1 + O_1 A_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \frac{1}{O_2 A_2} - \frac{1}{-e + \frac{3}{8}e} = \frac{1}{O_2 A_2} + \frac{1}{\frac{5}{8}e} = \frac{2}{e}$$

donc $\boxed{\overline{O_2 A_2} = \frac{5}{2}e}$



- 2- Les lois de Kirchhoff ne sont a priori valables qu'en régime permanent (par exemple la loi des nœuds a été établie en régime permanent à partir de la conservation). En régime variable, il apparaît une onde d'intensité se propageant dans les câbles.
L'onde se propageant à une vitesse finie, l'intensité dans une même branche ne sera plus la même en chacun des points d'une même branche :

$$i(N,t) = i\left(M,t - \underbrace{\frac{MN}{c}}_{\substack{\text{durée de} \\ \text{propagation} \\ \text{de l'onde} \\ \text{entre M et N}}}\right)$$


On sera dans l'Approximation des Régime Quasi Stationnaire si on peut considérer

$i\left(M,t - \frac{MN}{c}\right) = i(M,t)$. En d'autres termes, la durée de propagation entre deux points M et N du circuit doit être négligeable devant l'échelle des variations temporelles de i

Par exemple dans le cas d'une évolution sinusoïdale, $\cos\left(\omega\left(t - \frac{MN}{c}\right)\right) \approx \cos(\omega t)$ si $\frac{MN}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$

Un circuit sera donc utilisé dans l'ARQS si sa dimension spatiale L et la fréquence maximale d'utilisation f_{\max} (ou l'échelle de temps caractéristique des évolutions temporelles les plus brèves

$$\tau_{\min} \approx \frac{1}{f_{\max}}) \text{ vérifient } \frac{L}{c} \ll \tau_{\min} \sim \frac{1}{f_{\max}}$$

En TP : $L \approx 1\text{m}$, $f_{\max} \approx 1\text{MHz} = 10^6 \text{Hz}$ et on a effectivement bien $\frac{L}{c} = 3 \cdot 10^{-9} \ll \frac{1}{f_{\max}} = 10^{-6}$.

Dans le cadre de l'ARQS, les lois de Kirchhoff restent valable entre grandeurs instantanées.

- 3- Pour transformer un signal créneau symétrique (v_e) en signal triangulaire (v_s), il faut intégrer le signal d'entrée.

$$v_e(t) = \cancel{V_{e,0}} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{e,k} \cos(k\omega_c t + \phi_k) \text{ (valeur moyenne de } v_e \text{ nulle)}$$

Dit autrement, il faut que pour toutes les composantes harmoniques de v_e et v_s on ait la relation

$$v_{e,k}(t) = \tau \frac{dv_{s,k}}{dt} \quad \text{soit} \quad \underline{V_{e,k}} = \tau j\omega \underline{V_{s,k}} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(\omega = k\omega_c) = \frac{V_{s,k}}{V_{e,k}} = \frac{1}{\tau j\omega}$$

On obtient ce type de fonction de transfert en sortie d'un passe-haut du premier ordre utilisé aux basses fréquences.

$$\text{Prenons l'exemple du filtre RC } \underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{si} \quad \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \gg 1$$

Les harmoniques significative du créneaux doivent être dans ce domaine intégrateur, il faut donc $RC\omega = 2\pi RCf = 2\pi RC \cdot (k \cdot f_c) \ll 1$ pour tout $k = 1 \dots 50$ et $f_c = 1\text{kHz}$

Soit $RC \gg \frac{1}{2\pi f_c} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{s}$; ceci est par exemple réalisé avec

$$R = 10\text{k}\Omega \text{ et } C = 100\text{nF} \text{ (} RC = 10^{-3} \text{s)}$$

4- Considérons un champ magnétique uniforme \vec{B}_0

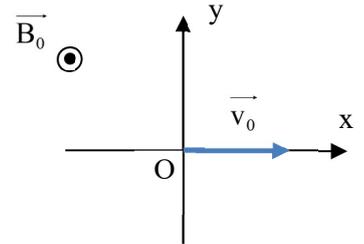
Sans réduire la généralité de la démonstration, nous pouvons choisir le vecteur \vec{u}_z colinéaire et de même sens que \vec{B}_0 : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. Nous pouvons de même choisir l'origine du repère O au point d'injection de la particule et le vecteur \vec{u}_x colinéaire et de même sens que la vitesse initiale (orthogonale à \vec{B}_0) : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$. Le vecteur $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$ complète le trièdre orthonormé direct.

Système étudié : la particule ponctuelle de charge q
 Référentiel d'étude : référentiel du laboratoire supposé galiléen

Force subie par la particule de charge q : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Remarque on peut très facilement montrer en projetant la seconde loi de Newton sur \vec{u}_z que le mouvement est plan :

$\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z} = \text{cst} = \dot{z}(t=0) = 0$ donc $z = \text{cst} = z(t=0) = 0$; le mouvement a lieu dans le plan (Oxy)



Plusieurs démonstrations sont possibles pour retrouver le rayon de la trajectoire :

En utilisant les coordonnées cartésiennes (il n'est alors pas nécessaire de supposer la trajectoire circulaire)

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z) \wedge B_0\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{y}qB_0 \\ -\dot{x}qB_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on obtient donc en projection sur Ox et Oy :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y} \frac{qB_0}{m} \\ \ddot{y} = -\dot{x} \frac{qB_0}{m} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \dot{x} = y \frac{qB_0}{m} + \text{cst} = y \frac{qB_0}{m} + v_0 \\ \dot{y} = -x \frac{qB_0}{m} + \text{cst}' = -x \frac{qB_0}{m} \end{cases}$$

$\begin{matrix} x(t=0)=v_0 \\ y(t=0)=0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} y(t=0)=0 \\ x(t=0)=0 \end{matrix}$

Traitons le cas $q > 0$ et posons $\omega_c = \frac{qB_0}{m} > 0$

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} = -\omega_c^2 x \text{ donc } x = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \underset{\substack{x(t=0)=v_0 \\ x(t=0)=0}}{=} \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

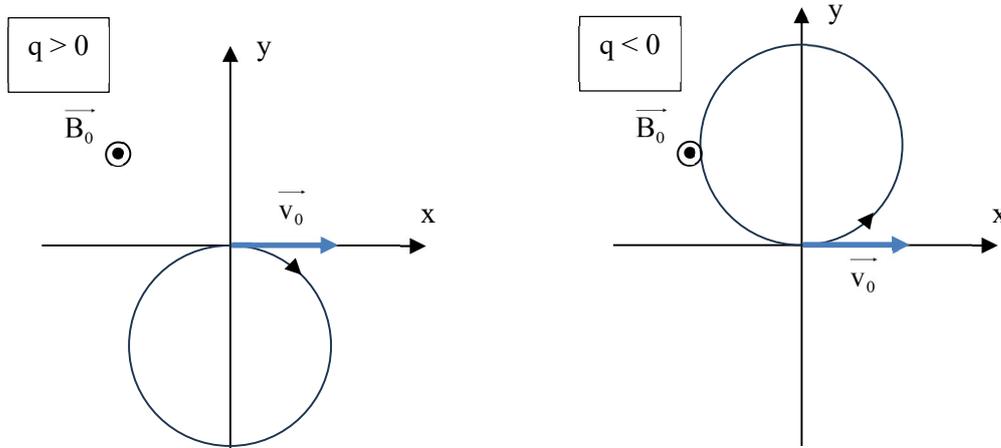
$$\text{Ainsi } \dot{y} = -\omega_c x = -v_0 \sin(\omega_c t) \text{ soit } y = \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \text{cst} = -\frac{v_0}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t))$$

On remarque donc que $\left(y + \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$ qui est l'équation d'un cercle de centre C $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v_0}{\omega_c} \end{pmatrix}$ et de

rayon $\boxed{R = \frac{v_0}{\omega_c}}$

Dans le cas où $q < 0$, on pose $\omega_c = -\frac{qB_0}{m} > 0$ et on trouve $\left(y - \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$ qui est l'équation

d'un cercle de centre $C \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_0}{\omega_c} \end{pmatrix}$ et de rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c}$



En utilisant la base de Frenet (dans le plan du mouvement) : nous ne traiterons que le cas $q > 0$

$$m\vec{a} = m \left(\frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N} \right) = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{T} \wedge B_0\vec{u}_z = qvB_0\vec{N}$$

On en déduit

- $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $v = \text{cst} = v_0$

- $m \frac{v_0^2}{\rho} = qv_0B_0$ soit $\rho = m \frac{v_0}{qB_0} = \frac{v_0}{\omega_c}$; le rayon de courbure est constant : la trajectoire est

un cercle de rayon $R = m \frac{v_0}{qB_0} = \frac{v_0}{\omega_c}$

En utilisant les coordonnées polaires (dans le plan du mouvement en supposant la trajectoire circulaire).

On choisit l'origine des coordonnées en le centre C (supposé) de la trajectoire circulaire (ce centre est nécessairement sur l'axe Oy puisque la vitesse initiale doit être orthogonale à \overrightarrow{CO})

$$\overrightarrow{CM} = R\vec{e}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\vec{v} = qR\dot{\theta}\vec{e}_\theta \wedge B_0\vec{u}_z = qRB_0\dot{\theta}\vec{e}_r$$

La deuxième loi de Newton projetée sur \vec{e}_θ donne $\ddot{\theta} = 0$ donc $\dot{\theta} = \text{cst} \left(= \varepsilon \frac{v_0}{R} \right)$ ($\varepsilon = +1$ si $y_C > 0$,

les particules « tournent » alors dans le sens positif ou $\varepsilon = -1$ sur $y_C < 0$)

La deuxième loi de Newton projetée sur \vec{e}_r donne

$$-mR\dot{\theta}^2 = -m \frac{v_0^2}{R} = \dot{\theta}^2 = \varepsilon^2 qRB_0 \frac{v_0}{R} \quad \text{soit} \quad R = -\varepsilon \frac{m}{qB_0} v_0$$

Comme $R > 0$, on retrouve $\varepsilon = +1$ si $q < 0$: les particules de charge négatives auront une trajectoire

située dans le demi plan $y > 0$ et $R = \frac{m}{|q|B_0} v_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$

Et si $q > 0$, $\varepsilon = -1$ les particules de charge positives auront une trajectoire située dans le demi plan $y < 0$

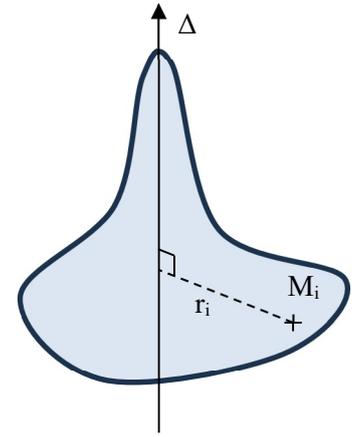
et $R = \frac{m}{qB_0} v_0 = \frac{v_0}{\omega_c}$

6- Soit un solide S en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ .

Son moment cinétique par rapport à l'axe Δ vaut : $\sigma_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$

avec ω sa vitesse angulaire de rotation autour de Δ et J_{Δ} son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ

Remarque $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2 = \iiint_{M \in S} \rho(M) r^2 d\tau_M$ avec r_i la distance à l'axe Δ du point M_i de masse m_i .



L'énergie cinétique de S vaut $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$

Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ fixe dans le référentiel d'étude considéré galiléen.

$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$ où $M_{\Delta, \text{ext}}$ est le moment résultant par rapport à l'axe Δ des actions mécaniques extérieures.

Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel d'étude considéré galiléen.

$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$ où P_{ext} et P_{int} sont respectivement la puissance des actions mécaniques extérieures et

intérieures (P_{int} , lié à la déformation du système, est a priori non nulle, à la différence des résultantes des forces et des moments intérieurs qui sont toujours nulles d'après le principe des actions réciproques)

Dans le cas d'un solide **indéformable** : $P_{\text{int}} = 0$ et $\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\text{solide indéformable}} = P_{\text{ext}}$

et pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ : $P_{\text{ext}} = M_{\Delta, \text{ext}} \omega$ et $\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\text{solide indéformable en rotation autour de } \Delta} = M_{\Delta, \text{ext}} \omega$

7- **Théorème du moment cinétique appliqué au point matériel M de masse m en le centre de force O dans le référentiel d'étude considéré galiléen :**

$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overline{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{\sigma}_O = \overline{OM} \wedge m\vec{v} = \text{cst}$ (imposée par les conditions initiales)

Cas particulier $\vec{\sigma}_O = \vec{0}$ alors à chaque instant $\overline{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$ donc à chaque instant \overline{OM} et \vec{v} sont colinéaires et le mouvement est rectiligne (le long d'une droite passant par O et la position initiale).

Cas général $\vec{\sigma}_O \neq \vec{0}$, à chaque instant \overline{OM} est orthogonal à $\vec{\sigma}_O$ qui définit une direction constante de l'espace. **Le point M est donc constamment dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}_O$ passant par le centre de force O.**

Dans le plan du mouvement, on utilisera les coordonnées polaires.

Alors $\vec{\sigma}_O = \overline{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge mr\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \text{cst}$

Ainsi la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante appelée **constante des aires**.

On en déduit la loi des aires : le point soumis à une force centrale de centre O dans le référentiel

d'étude galiléen décrit un mouvement à vitesse aréolaire constante ; ce qui signifie que le rayon vecteur \overline{OM} balaie des aires égales pendant des durées égales.

Les deux aires sont égales.

Démonstration de la loi des aires : l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps de

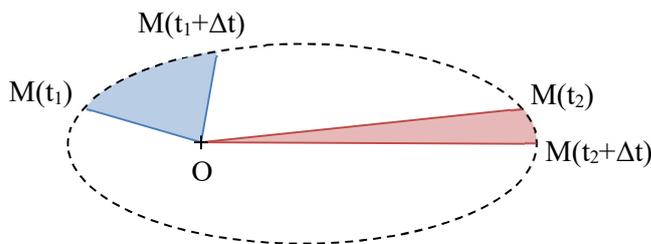
$$dt \text{ est } dA = \frac{1}{2} \|\overline{OM} \wedge d\vec{l}\| = \frac{1}{2} \|\overline{OM} \wedge \vec{v} dt\| = \frac{1}{2m} \|\vec{\sigma}_O\| dt = \frac{|C|}{2} dt$$

8- Système étudié : l'astre mobile de masse P de masse m

Référentiel d'étude : référentiel astrocentrique (dans lequel l'astre de masse M est fixe) considéré galiléen

Bilan des forces : attraction gravitationnelle de « M sur m » $\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$

On suppose que la trajectoire de « m » est un cercle de rayon R centré sur O.



$$\overline{OM} = R \cdot \vec{u}_r \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = R \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r$$

La deuxième loi de Newton donne $m\vec{a} = \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$

$$\text{donc } \begin{cases} R \dot{\theta}^2 = G \frac{M}{R^2} \\ R \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}^2 = G \frac{M}{R^3} \\ \dot{\theta} = \text{cst} \end{cases} ; \text{ ces deux équations sont bien cohérentes (ce qui valide$$

l'existence de trajectoires circulaires) et de plus $v = R \dot{\theta} = \sqrt{G \frac{M}{R}}$

$$\text{L'énergie mécanique vaut } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} mG \frac{M}{R} - G \frac{mM}{R} = -\frac{1}{2} G \frac{mM}{R}$$

Remarque, on a bien $E_m < 0$; la trajectoire circulaire étant liée.

Dans le cas d'une orbite elliptique de demi grand axe a : $E_m = -G \frac{mM}{2a}$ et

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{mM}{r} = -G \frac{mM}{2a} \text{ donne } v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

9- La vitesse de libération d'un corps situé à la distance r d'un astre est la vitesse minimale à communiquer à ce corps pour qu'il puisse se libérer de l'attraction gravitationnelle de celui-ci ; c'est-à-dire pour qu'il s'en éloigne infiniment.

Le corps doit donc être dans un état de diffusion (après gain de vitesse) soit $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} \geq 0$

soit $v^2 \geq 2G\frac{M}{r}$; on en déduit donc que $v_{\text{lib}} = \sqrt{2G\frac{M}{r}}$

Représentation graphique

La vitesse initiale étant orthoradiale, $v_r = \dot{r} = 0$; la position initiale correspond donc à une valeur extrême de r ; il s'agit du périhélie ou de l'apogée de la trajectoire.

- Si $v > v_{\text{lib}}$, $E_m > 0$ et la trajectoire est hyperbolique (la position initiale est le périhélie)
- Si $v = v_{\text{lib}}$, $E_m = 0$ et la trajectoire est parabolique (la position initiale est le périhélie)
- Si $v < v_{\text{lib}}$, $E_m < 0$ et la trajectoire est elliptique (suivant que v soit élevée ou faible, la position initiale peut-être le périhélie ou l'apogée de la trajectoire)

On ne le demandait pas a priori, mais on peut essayer de distinguer ces deux configurations. Pour cela, il faut déterminer l'autre position extrême r' sur l'ellipse :

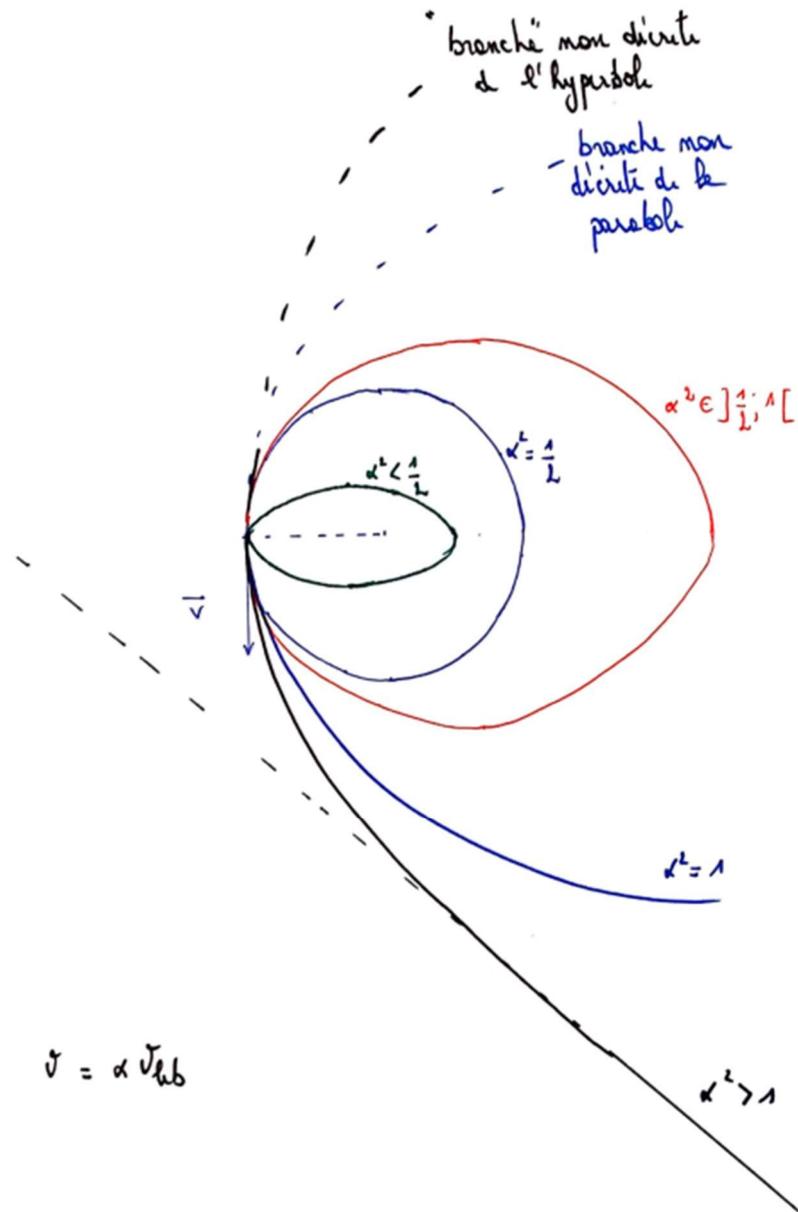
On sait que $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{r+r'}$; pour simplifier les écritures, posons

$$v = \alpha v_{\text{lib}} = \alpha \sqrt{2G\frac{M}{r}} \text{ avec } \alpha < 1$$

$$\frac{1}{2}m\alpha^2 2G\frac{M}{r} - G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{r+r'} \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha^2}{r} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r+r'}$$

$$\text{donc } r' = \frac{r}{1-\alpha^2} - r = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} r$$

- $r' > r$ si $\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} > 1$ soit $\alpha^2 > \frac{1}{2}$, la position initiale reste le périhélie
- $r' < r$ si $\alpha^2 < \frac{1}{2}$, la position initiale devient l'apogée
- Si $\alpha^2 = \frac{1}{2}$, $v = \alpha \sqrt{2G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{r}}$ et la trajectoire sera un cercle d'après la question précédente



Application numérique à la surface de la Terre :

$$v_{lib} = \sqrt{2G \frac{M}{R}} \quad \text{avec} \quad g = G \frac{M}{R^2} \approx 10 \text{ m.s}^{-2} \quad \text{donc} \quad v_{lib} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^6} \approx 10^4 \text{ m.s}$$

Thermodynamique

10- 2nd principe de la thermodynamique :

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état extensive non conservative appelée entropie noté S dont la variation entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$ vérifie : $\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}}$ avec

- $S_{\text{créée}} \geq 0$ et $S_{\text{créée}} = 0$ dans le cas d'une évolution réversible
- $S_{\text{échangée}}$ lié aux transferts thermiques ; lorsque le système échange des transferts thermiques $(Q_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ avec N sources de chaleurs aux températures $(T_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$:

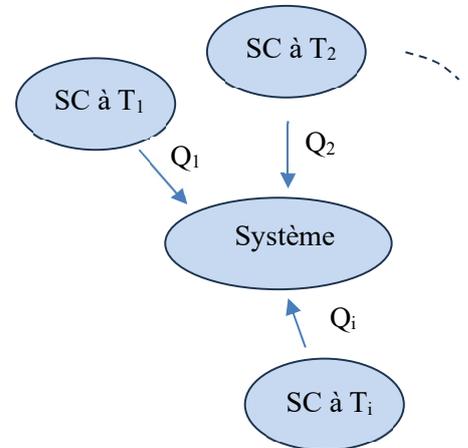
$$S_{\text{échangée}} = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}$$

On en déduit immédiatement l'inégalité de Clausius. Lorsqu'un système échange des transferts thermiques avec N sources de chaleurs :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} \geq \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} ;$$

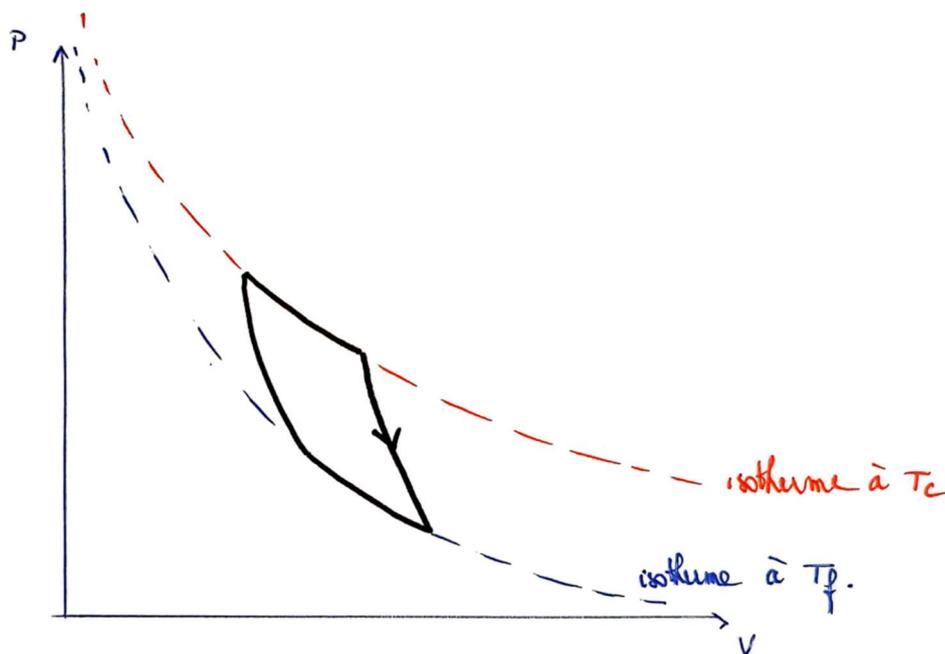
dans le cas d'une évolution cyclique $0 \geq \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i}$

Ces inégalités deviennent des égalités dans le cas d'évolutions réversibles.



11- Le cycle réversible dit de Carnot est constitué :

- Deux isothermes réversibles à T_f et à T_c aux cours desquelles l'agent thermique échange des transferts thermiques avec les sources de chaleur (à T_f et T_c on supposera $T_f < T_c$)
- Entre ces deux isothermes, l'agent thermique ne doit plus échanger de transferts thermiques ; les deux autres transformations sont donc des transformations adiabatiques réversibles (aux cours desquelles l'agent thermique passe de T_f à T_c puis de T_c à T_f).



Remarque : attention au sens de parcours du cycle : le cycle moteur est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre ($W < 0$).

$$\text{Rendement du moteur : } \rho = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur à dépenser}} = \frac{|W|}{Q_c}$$

où Q_c est le transfert thermique fourni à l'agent thermique par la source chaude.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à l'agent thermique pour un cycle (ou pour n cycles) : $W + Q_c + Q_f = \Delta U = 0$ (car U est une fonction d'état)

donc $-W = Q_c + Q_f > 0$ (moteur)

$$\rho = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

Or l'inégalité de Clausius devient une égalité dans le cas d'un fonctionnement réversible et

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$$

$$\text{Donc } \rho_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Application numérique (ordre de grandeur) : pour une voiture, la source froide est l'air extérieur et on pourra prendre $T_f = 300\text{K}$; la source chaude est une source fictive qui modélise l'effet thermique de la réaction chimique de combustion, on peut prendre $T_c = 3000\text{K}$ (ce qui peut correspondre aussi à l'ordre de grandeur des températures maximales que peuvent supporter les parties mécaniques)

$$\rho_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,9$$

Le rendement réel (compte tenu des irréversibilités, des pertes) est plus proche de 30%

12- On s'intéresse à la vaporisation totale, à pression P et température T_{eq} constantes ; ici $T_{\text{eq}} = 100^\circ\text{C}$

On note $\Delta_{\text{vap}}H_m(T)$ la chaleur latente molaire de vaporisation à la température T (ou enthalpie molaire de vaporisation)

$$\text{Au cours de la vaporisation : } \Delta H = n \cdot \Delta_{\text{vap}}H_m(T_{\text{eq}}) ; \Delta S = n \cdot \frac{\Delta_{\text{vap}}H_m(T)}{T}$$

$\Delta U = \Delta(H - PV) = \Delta H - P \frac{\Delta V}{V_{\text{vap}} - V_{\text{liq}}}$, on peut négliger le volume des n moles d'eau liquide devant le

volume de la phase vapeur

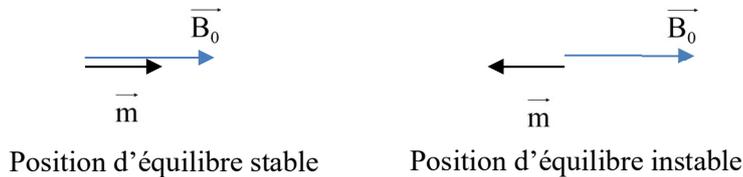
$$\Delta U = \Delta H - PV_{\text{vap}} = n \cdot (\Delta_{\text{vap}}H_m(T_{\text{eq}}) - RT_{\text{eq}})$$

Magnétisme

13- Moment résultant des actions de Laplace sur un moment magnétique \vec{m} plongé dans un champ magnétique \vec{B}_0 uniforme : $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$

Les positions d'équilibre correspondent à $\vec{M} = \vec{0}$ soit \vec{m} **colinéaire** à \vec{B}_0 .

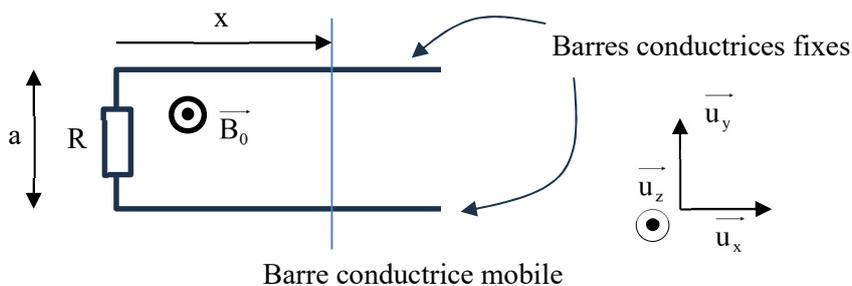
Application millénaire de cet effet : **la boussole**.



14- On peut choisir plusieurs exemples pour illustrer le phénomène d'induction.

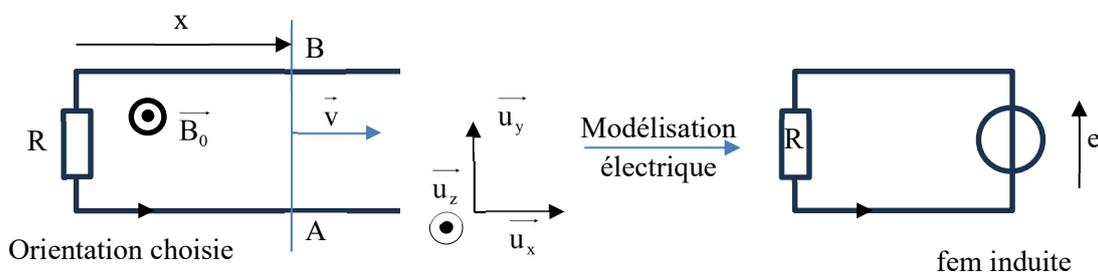
Rails de Laplace (peut-être le plus simple).

Le dispositif est représenté sur la figure ci-dessous



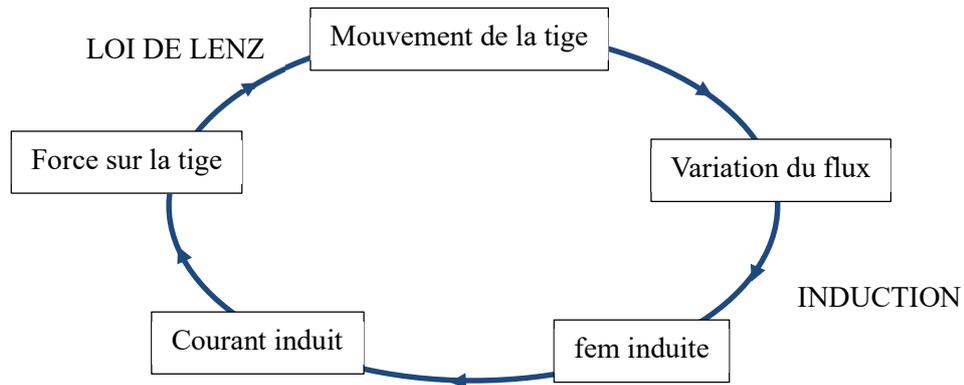
Lorsque la barre est mise en mouvement dans le champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ le flux de ce champ magnétique à travers le circuit varie. Cette variation du flux du champ magnétique à travers le circuit, va induire l'apparition d'un courant dans le circuit : c'est le phénomène d'induction.

Electriquement, ce phénomène est modélisé électriquement par l'ajout dans le circuit électrique d'une fem induite, donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$; les signes de ϕ et donc de e étant déterminé par l'orientation arbitrairement choisie du circuit (cf schéma ci-dessous).



La loi de Lenz stipule que **l'induction par ses effets s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance**.

Sur l'exemple des rails de Laplace :



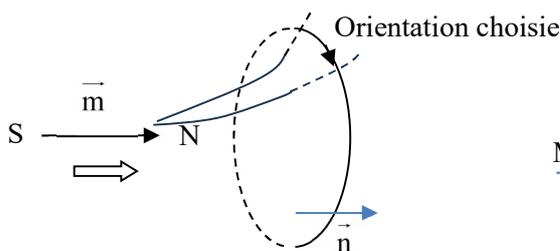
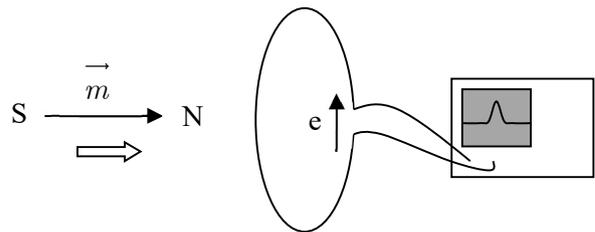
$$\phi = +B_0 a x$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a \frac{dx}{dt}$$

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{B_0 a}{R} \frac{dx}{dt}$$

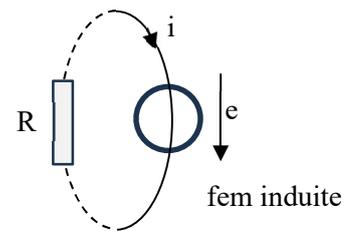
La barre mobile, parcourue par le courant est donc soumise à la force de Laplace

$$\vec{F} = \int_A^B i \vec{dl} \wedge \vec{B} = \int_{y_A=0}^{y_B=a} i dy \vec{u}_y \wedge B_0 \vec{u}_z = iaB_0 \vec{u}_x$$



Vecteur normal au circuit
(sa direction est liée à l'orientation du circuit)

Modélisation électrique



R : Résistance totale de la boucle

$$\text{Ainsi } \vec{F} = -\frac{(aB_0)^2}{R} \frac{dx}{dt} \vec{u}_x = -\alpha \vec{v} \quad \text{où } \alpha > 0$$

La force de Laplace s'apparente donc à une force de frottement fluide qui s'oppose au mouvement de la tige, à l'origine du phénomène d'induction.

Résumé

Autre exemple : un aimant que l'on approche d'une boucle de courant (plus difficile à interpréter)
Lorsque l'on approche un aimant d'une boucle de courant, reliée à un oscilloscope ou un voltmètre, on détecte l'apparition d'une tension aux bornes de la boucle que l'on nommera fem induite.
Un ampèremètre ou micro-ampèremètre détecterait également un courant dit courant induit.

Ici lorsque l'aimant s'approche, le champ magnétique devient plus intense au niveau de la boucle de courant. Avec l'orientation choisie : $\phi = +SB_{\text{moy sur la boucle}} > 0$; donc $\phi = +SB_{\text{moy sur la boucle}}$ augmente lorsque l'on approche l'aimant (par son pôle Nord)

Ainsi $e < 0$ et $i = \frac{e}{R} < 0$

Il crée donc un champ magnétique \vec{B}_{ind} qui au niveau du circuit est dirigé suivant $-\vec{n}$. \vec{B}_{ind} aura donc un flux négatif et s'oppose à l'augmentation du flux total du champ magnétique à travers le circuit. On retrouve la loi de modération de Lenz.

ATTENTION \vec{B}_{ind} ne s'oppose pas au champ magnétique créé par l'aimant mais aux variations de son flux.

Ainsi par exemple si on éloigne le pôle Nord de l'aimant, le champ magnétique induite aura le même sens que celui de l'aimant et s'opposera toujours à la diminution du flux magnétique.

15- Soient deux circuits C_1 et C_2 , filiformes et plans. On note

- Σ_1 et Σ_2 les aires respectives des surfaces délimitées par C_1 et C_2
- i_1 et i_2 les intensités parcourant C_1 et C_2
- \vec{B}_1 et \vec{B}_2 les champs magnétiques créés par C_1 et C_2
- $\Phi_{\Sigma_i}(\vec{B}_j)$ le flux du champ \vec{B}_j à travers Σ_i

On définit le coefficient de mutuel M entre C_1 et C_2 par les relations :

$$\boxed{\Phi_{\Sigma_1}(\vec{B}_2) = Mi_2 \quad \text{et} \quad \Phi_{\Sigma_2}(\vec{B}_1) = Mi_1}$$

Applications : transformateur, plaques à induction, détecteur par boucle inductive.

CHIMIE

16a-
$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_v}{dt}$$

Vitesse d'apparition de NO_2 :
$$\frac{d[\text{NO}_2]}{dt} = 2v$$

La réaction admet un ordre n :
$$v = k[\text{N}_2\text{O}_5]^n$$

16b-
$$\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5]}{dt} = -v = -k[\text{N}_2\text{O}_5]^2$$

$$\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5]}{[\text{N}_2\text{O}_5]^2} = -k dt$$

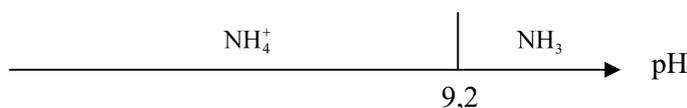
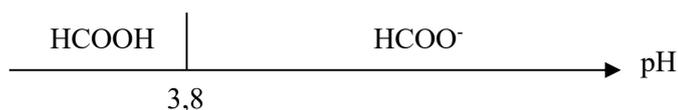
$$\left[-\frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5]} \right]_{t=0}^t = -kt$$

$$\frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5](t)} = kt + \frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5]_0} \quad \text{ou} \quad [\text{N}_2\text{O}_5](t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5]_0}}$$

Pour vérifier cette loi, on peut tracer la courbe $\frac{1}{[\text{N}_2\text{O}_5](t)}$ en fonction du temps : les points s'alignent sur une droite de pente k

17- On considère les couples acides-bases :
$$\begin{cases} \text{HCOOH} / \text{HCOO}^- & \text{pK}_a = 3,8 \\ \text{NH}_4^+ / \text{NH}_3 & \text{pK}_a = 9,2 \end{cases}$$

17a- Diagrammes de prédominance



Justification : la constante d'acidité du couple $\text{HCOOH} / \text{HCOO}^-$ vaut $K_a = \frac{[\text{HCOO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCOOH}]}$ et

donc $\text{pK}_a = \text{pH} - \log \frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{HCOOH}]}$ ou $\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{HCOO}^-]}{[\text{HCOOH}]}$

Donc
$$\begin{cases} \text{Si } [\text{HCOO}^-] > [\text{HCOOH}] & \text{pH} > \text{pK}_a \\ \text{Si } [\text{HCOO}^-] < [\text{HCOOH}] & \text{pH} < \text{pK}_a \end{cases}$$

17b- D'après les diagrammes de la question précédente, l'acide HCOOH et la base NH₃ ne peuvent pas être simultanément les espèces majoritaires de leur couple respectif (domaines de prédominance disjoints). L'avancement de la réaction entre HCOOH et NH₃ sera donc important et proche de ξ_{\max} .

Notons $x = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}]_0}{[\text{NH}_3]_0}$ le rapport des concentrations initiales des réactifs

Si $x \gg 1$ alors NH₃ sera totalement consommé, la quantité de CH₃COO⁻ formé sera négligeable devant la quantité de CH₃COOH restant en fin de solution. CH₃COOH reste l'espèce majoritaire dans son couple et pH < 3,8

Si $x > 1$ mais inférieur à 10 alors le pH final sera proche de 3,8 ($x > 2$, pH < 3,8 et si $1 < x < 2$, CH₃COO⁻ sera l'espèce majoritaire du couple et pH > 3,8)

Si $x \approx 1$, le pH sera entre 3,8 et 9,2

Si $x \ll 1$ alors CH₃COOH sera totalement consommé, la quantité de NH₄⁺ sera négligeable devant la quantité de NH₃ restant en fin de solution. NH₃ reste l'espèce majoritaire dans son couple et pH > 9,2

Si $x < 1$ mais supérieur à 0,1 alors le pH final sera proche de 9,2 ($x < 0,5$; pH > 9,2 et si $0,5 < x < 1$, pH < 9,2)

17c- Réaction $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{NH}_3 = \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{NH}_4^+$

$$K^\circ = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-] \cdot [\text{NH}_4^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}] \cdot [\text{NH}_3]} = \frac{K_a(\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^-)}{K_a(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3)} = 10^{\text{p}K_a(\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3) - \text{p}K_a(\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^-)}$$

$$K^\circ = 10^{9,2-3,8} = 10^{5,4} \gg 1$$

On retrouve bien une constante d'équilibre grande devant 1

18a- On calcule dans l'état « initial » : $Q_i = \frac{[\text{Ag}^+]_i [\text{Cl}^-]_i}{c^{\circ 2}} = \frac{c_2}{2} \cdot \frac{c_1}{2} \frac{1}{c^{\circ 2}} = 7,5 \cdot 10^{-3} > K_s$

facteur 1/2
à cause de la
dilution

On observera donc la précipitation de AgCl



Etat initial $\frac{c_2}{2} V \quad \frac{c_1}{2} V$

Etat final $\left(\frac{c_2}{2} - x\right) V \quad \left(\frac{c_1}{2} - x\right) V \quad xV$

Dans l'état d'équilibre final : $\frac{1}{c^{\circ 2}} \left(\frac{c_2}{2} - x\right) \left(\frac{c_1}{2} - x\right) = K_s = 10^{-9,8}$

Hypothèse : $[\text{Cl}^-]_f = \left(\frac{c_1}{2} - x\right) = \varepsilon \ll \left(\frac{c_2}{2} - x\right)$

Soit $x = \frac{c_1}{2} = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Ag}^+]_f = \frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{2} = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

Vérification de l'hypothèse $[\text{Cl}^-]_f = K_s \frac{c^{\circ 2}}{[\text{Ag}^+]_f} = 10^{-8,8} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \ll [\text{Ag}^+]_f$. L'hypothèse est vérifiée.

Conclusion : $[\text{Ag}^+]_f = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1} \quad [\text{Cl}^-]_f = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \quad n_{\text{AgCl}} = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$

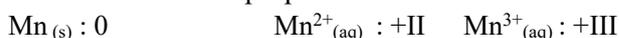
18b- Cette fois, $Q_i = \frac{[Ag^+]_i [Cl^-]_i}{c^{o2}} = \frac{c_2}{2} \cdot \frac{c_1}{2} \frac{1}{c^{o2}} = 7,5 \cdot 10^{-12} < K_s$; la solution n'est pas saturée.

Conclusion : composition finale

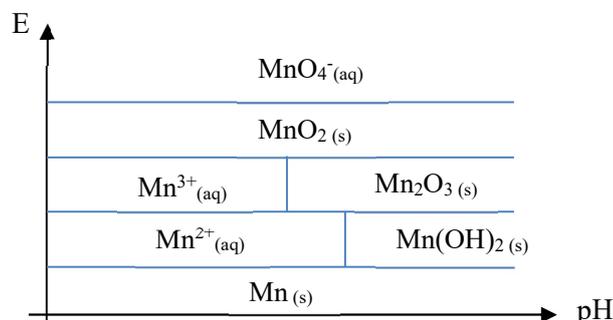
$$\boxed{[Ag^+]_f = 5,0 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \quad [Cl^-]_f = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \quad n_{AgCl} = 0}$$

19a- On commence par chercher les no de Mn dans

chacun des édifices proposés :



On en déduit le diagramme simplifié ci-contre



Justification :

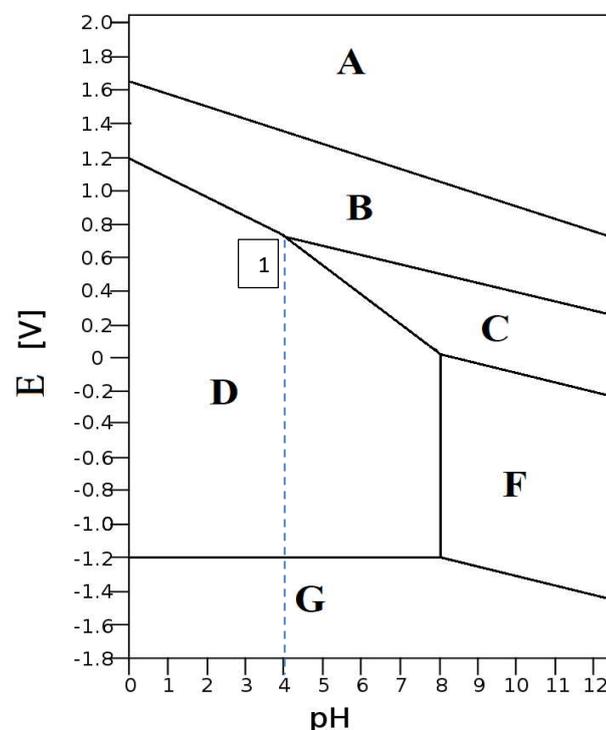
D'après la formule de Nernst, plus une espèce est oxydée (plus son nombre d'oxydation est élevé), plus son domaine de prédominance ou d'existence correspond à des valeurs élevées du potentiel E .

De plus, plus une espèce est **riche en ion OH⁻** (cas des bases, des hydroxydes et, indirectement, des oxydes), plus son domaine de prédominance ou d'existence correspond à des valeurs élevées du pH .

On attribue les domaines :



Mn³⁺ n'apparaît pas dans le diagramme car il se dismute.



19b- On étudie la frontière G/D (Mn/Mn²⁺)

$$E = E^\circ(Mn^{2+} / Mn) + \frac{0,06}{2} \log \frac{[Mn^{2+}]}{c^o}$$

A la frontière : $[Mn^{2+}] = c_t$

$$E_{\text{frontière}} = E^\circ(Mn^{2+} / Mn) + \frac{0,06}{2} \log \frac{c_t}{c^o}$$

$$\boxed{\text{Donc } E^\circ(Mn^{2+} / Mn) = E_{\text{frontière}} - 0,03 \log \frac{c_t}{c^o} = -1,20 + 0,03 = -1,17V}$$

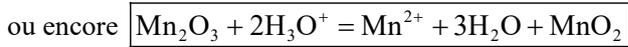
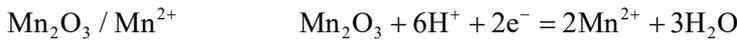
19c- $Mn(OH)_2 = Mn^{2+} + 2HO^-$ $K_s = [Mn^{2+}][HO^-]^2$

On s'intéresse pH frontière verticale D/F : Mn²⁺/Mn(OH)₂ : sur la frontière : $[Mn^{2+}]_f = c_t$ et

$$[HO^-]_f = \frac{K_c}{[H_3O^+]_f} c^{o2} = 10^{pH_f - pK_c}$$

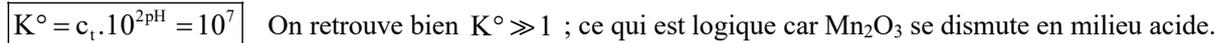
Ainsi, sur la frontière, le K_s est vérifié (solide en équilibre avec « ses » ions) et $\boxed{K_s = 0,1 \cdot 10^{2(8-14)} = 10^{-3}}$

19d- Equilibrons, en milieu acide, les deux demies équations associées aux couples



On en déduit $K^\circ = \frac{[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{H}^+]^2}$, on utilise les coordonnées du point 1 où $[\text{Mn}^{2+}]_1 = c_1$ (les autres espèces

solides sont présentes à l'état de traces, grains ...)



20- Nombre d'électrons de valence : C : 4 O : 6 Cl : 7 S : 6 F : 7 N : 5

Numéros atomiques

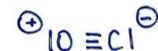
$Z_{\text{C}} = 6$	$Z_{\text{O}} = 8$	$Z_{\text{Cl}} = 17$	$Z_{\text{S}} = 16$	$Z_{\text{F}} = 9$	$Z_{\text{N}} = 7$
--------------------	--------------------	----------------------	---------------------	--------------------	--------------------



Nombre d'électrons de valence : 16 donc 8 doublets



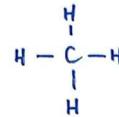
Nombre d'électrons de valence : 10 donc 5 doublets



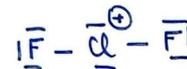
Nombre d'électrons de valence : 18 donc 9 doublets



Nombre d'électrons de valence : 8 donc 4 doublets



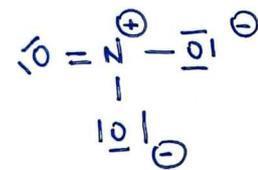
Nombre d'électrons de valence : 20 donc 10 doublets



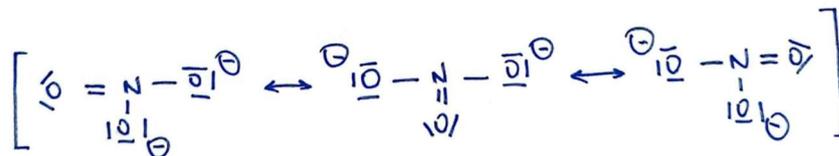
Nombre d'électrons de valence : 8 donc 4 doublets



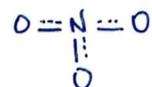
Nombre d'électrons de valence : 24 donc 12 doublets



Remarque : le dernier ion présente deux autres structures de Lewis équiprobables ; on parle de formes mésomères et de mésomérie :



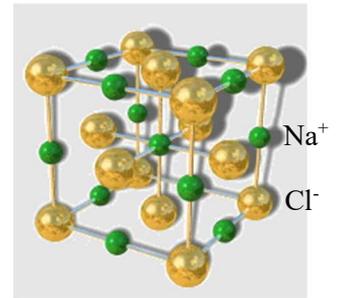
Dans cet ion, les 3 liaisons N-O sont équiprobables et présentent des caractéristiques intermédiaires entre la liaison double et simple. On note parfois :



20a- Schéma de la maille (en ne respectant pas la tangence entre anions et cations pour une meilleure visibilité).

En utilisant la tangence anions/cations le long des arêtes du cube :

$$a = 2(r_{\text{Cl}^-} + r_{\text{Na}^+})$$



20b-

$$\rho = \frac{M_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 \frac{(M_{\text{Cl}^-} + M_{\text{Na}^+})}{N_a}}{a^3} = \frac{4(M_{\text{Cl}^-} + M_{\text{Na}^+})}{(2(r_{\text{Cl}^-} + r_{\text{Na}^+)})^3 N_a}$$

20c- La relation de « tangence » des anions et des cations impose $a = 2(r_{\text{Cl}^-} + r_{\text{Na}^+})$

La non tangence des anions le long des diagonales du cube impose $a\sqrt{2} > 4r_{\text{Cl}^-}$

Donc $a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(r_{\text{Cl}^-} + r_{\text{Na}^+}) > 4r_{\text{Cl}^-}$ soit $r_{\text{Cl}^-} + r_{\text{Na}^+} > \sqrt{2}r_{\text{Cl}^-}$ ou $\frac{r_{\text{Na}^+}}{r_{\text{Cl}^-}} > \sqrt{2} - 1$