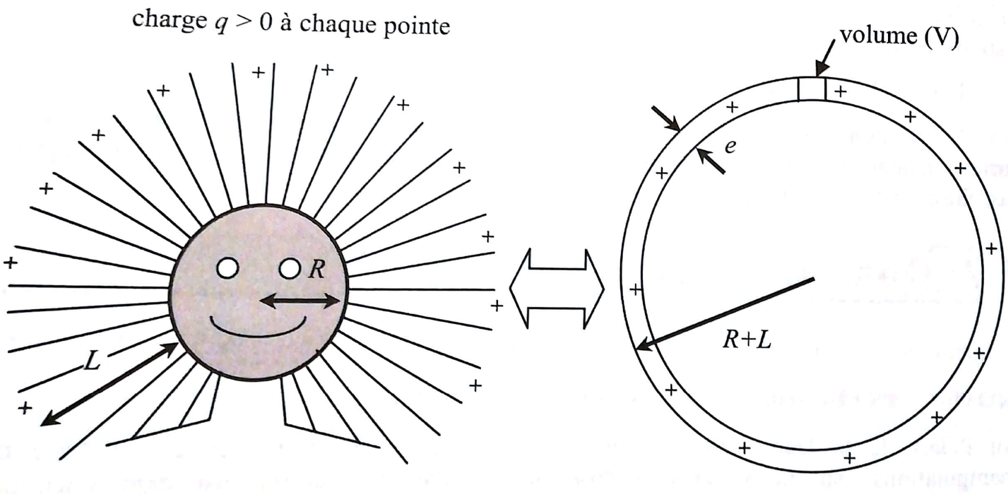
DM 2 Version 5/2
Mardi 15 Octobre.

Problème 1 : expérience fameuse du palais de la découverte.

Au palais de la découverte à Paris, il est possible de participer à une série d'expériences spectaculaires d'électrostatique, notamment la fameuse expérience des cheveux qui se dresse sur la tête. Sur la photo, la personne est placée sur une plateforme métallique reliée à une machine haute tension. Le but de ce problème est de calculer à partir de quelle tension les cheveux se dressent sur la tête comme sur la photo.

1- Expliquer qualitativement le ou les phénomène(s) entrant en jeu dans cette expérience

On propose la modélisation suivante : la personne ainsi que ses cheveux, conducteurs d'électricité sont au potentiel $V_0 > 0$ (le potentiel à l'infini étant pris égal à 0). La tête de la personne est assimilée à une sphère de rayon R et les cheveux, tous identiques ont une longueur L. Les pointes des cheveux se

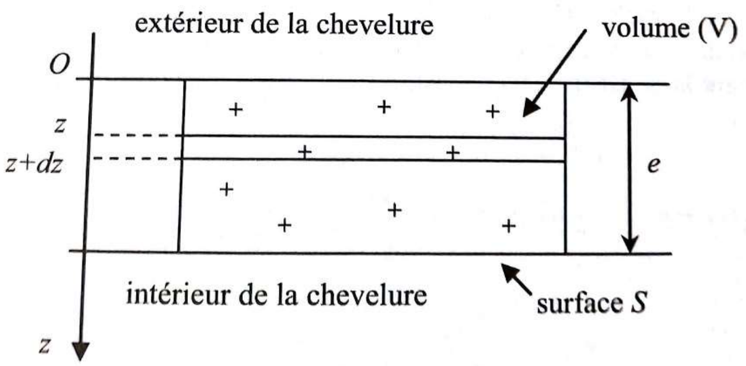


chargent sur une longueur e très petite. Chaque pointe possède une charge $q > 0$. On note n_c la densité de cheveux sur le cuir chevelu et μ leur masse par unité de longueur.

2- Les cheveux étant très denses, que peut-on dire de la direction et de la dépendance du champ électrique à l'extérieur de la chevelure.

3- Donner une expression du champ électrique à l'extérieur de la chevelure faisant intervenir V_0 ainsi que d'autres paramètres de l'énoncé, hormis q. Que vaut le champ électrique à l'intérieur de la chevelure ?

On raisonne sur un volume V contenant un nombre N de pointes chargées, N étant grand devant l'unité, mais petit devant le nombre total de pointes. Les cheveux étant denses, on considère que ce volume contient une distribution volumique de charges. Le volume V est pris suffisamment petit (voir schéma précédent) pour pouvoir se placer dans une configuration à une seule dimension où les grandeurs ne dépendent que de la profondeur z, l'origine O étant à l'extérieur de la chevelure (voir schéma ci-dessous). On note $\rho(z)$ la charge volumique et $\vec{E} = E(z)\overrightarrow{u_z}$ le champ électrique.



4- Montrer que la force subie par V se met sous la forme $\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{Surface}^2 S\overrightarrow{u_z}$ où $E_{Surface}$ désigne le champ électrique à proximité immédiate de la chevelure.

5- Déterminer le potentiel V_0 minimal permettant à un cheveu placé à la verticale au dessus de la tête de rester effectivement dressé.
Proposez une application numérique sachant que

- La densité de cheveux varie entre 100 et 300 cheveux par cm^2 suivant les individus
- Le rayon des cheveux peut aller de 0,04 à 0,1 mm.
- La masse volumique des cheveux est de l'ordre 1,3 $g.cm^{-3}$
- On rappelle que $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ SI

Pour information, la machine du Palais de la Découverte peut générer une différence de potentiel de 350 kV

PROBLEME II : conducteur en équilibre électrostatique.

L'objet de ce problème est l'étude de la répartition de charges « induite » dans un conducteur par une charge ponctuelle q située dans son voisinage, et le calcul de la force exercée alors sur la charge, l'ensemble étant en équilibre électrostatique.

On donne $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ $\mathrm{F\,m^{-1}}$.

Première partie

Un matériau conducteur semi-infini est limité par sa surface libre plane que l'on prendra comme plan xOy. Sur l'axe Oz, perpendiculaire à cette surface et orienté vers l'intérieur du conducteur, on place à l'extérieur du conducteur une charge ponctuelle q positive, en A, à la distance h de la surface libre (Fig. 1). On suppose dans cette première partie que le matériau est un conducteur parfait.

1.a) Quel est, à l'équilibre, le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du conducteur ? Que peut-on dire du potentiel électrique dans le conducteur ? On prendra le potentiel nul à grande distance, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du conducteur.

b) Montrer que les charges électriques apparaissant dans ce conducteur parfait sous l'influence de la charge q sont nécessairement situées à la surface du conducteur.

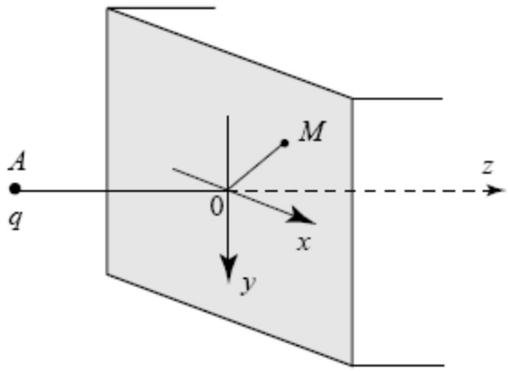


Figure 1

c) Etablir la relation entre le champ électrique $\vec{E}(M)$ dans le vide au voisinage immédiat d'un point M de la surface et la densité surfacique de charge $\sigma(M)$ sur le conducteur.

2. On admettra que dans le demi-espace *vide* ($z < 0$) le champ électrique et son potentiel, créés par la charge q en A et le conducteur, sont identiques à ceux qui seraient donnés, en l'*absence* de milieu conducteur, par la même charge q en A et une charge $-q$ placée au point image A', symétrique de A par rapport au plan xOy.

a) Vérifier que le plan xOy est, pour ce système de deux charges, une surface équipotentielle ; préciser la valeur de son potentiel.

b) En déduire le champ électrique $\vec{E}(M)$ au voisinage d'un point M de la surface du conducteur, situé à une distance r de l'origine O (Fig. 1). Préciser direction et sens de $\vec{E}(M)$.

c) Déterminer la densité surfacique de charge $\sigma(r)$.

d) Montrer que l'on a l'inégalité simple $\left|\dfrac{\partial \sigma}{\partial r}\right| \leq \dfrac{3}{2}\dfrac{|\sigma|}{h}$.

3.a) Calculer la charge totale portée par la surface du conducteur.

b) Calculer la force $\vec{F}_A$ exercée par le conducteur sur la charge q placée en A.

Deuxième partie

Dans un conducteur réel, non parfait, les charges mobiles sont « réparties » au voisinage de la surface sur une épaisseur moyenne λ dite « épaisseur d'écran ». La distribution des porteurs de charge mobiles (électrons) dans le conducteur n'est plus surfacique, mais caractérisée par un nombre de particules par unité de volume $n(r,z)$, ou densité volumique, en un point générique de coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe Oz. Lorsque le conducteur est localement neutre, cette densité volumique est égale à n_0, où n_0 est aussi le nombre volumique de charges (positives) fixes, liées au noyaux du cristal constituant le conducteur. On prendra comme conditions aux limites loin à l'intérieur du conducteur : $\lim_{z\to\infty} n(r,z) = n_0$. Le conducteur est maintenu à température uniforme et constante. Dans cette deuxième partie, on analyse l'importance de l'étalement des charges.

On définit le potentiel électrochimique $\widetilde{\mu}(r,z)$ d'un électron, de charge $-e$, dans le conducteur comme la somme de deux contributions : une partie μ, potentiel chimique local par électron, qui ne dépend que de la densité $n(r,z)$ et de la température T, et une autre $-eV(r,z)$, où $V(r,z)$ est le potentiel électrique local dans le conducteur, soit :

$$\widetilde{\mu}(r,z) = \mu\,[n(r,z),T] - eV(r,z).$$

1. On admet que la règle générale d'équilibre entre phases d'un système pour une espèce chargée (égalité des potentiels électrochimiques) s'applique ici aux potentiels électrochimiques locaux, soit :

$$\widetilde{\mu}(r,z) = \widetilde{\mu}(r,z\to\infty).$$

a) Montrer qu'à grande distance : $\widetilde{\mu}(r,z\to\infty) = \mu(n_0,T)$.

b) Réécrire l'équation d'équilibre à l'aide de $\left(\dfrac{\partial\mu(n,T)}{\partial n}\right)_T$, du gradient de $n(r,z)$ et du champ électrique $\overrightarrow{E}(r,z)$.

c) En déduire les expressions de la composante radiale $E_r(r,z)$ et de la composante $E_z(r,z)$ selon l'axe Oz.

2.a) On a toujours : $\left(\dfrac{\partial\mu(n,T)}{\partial n}\right)_T > 0$. Représenter sur un schéma les composantes du champ au voisinage de la surface. Quel rôle joue la composante radiale ?

b) Exprimer le rapport E_r/E_z à l'aide des dérivées partielles de $n(r,z)$.

3.a) Donner une estimation simple de $|\partial n/\partial z|$ en fonction de n, n_0 et λ.

b) En admettant que l'inégalité de la question **2.d)** de la première partie s'étend à la densité volumique de charge $\rho(r,z) = -e[n(r,z) - n_0]$, donner une borne supérieure à $|\partial n/\partial r|$, exprimée en fonction de n, n_0 et h.

c) En déduire une estimation simple du rapport E_r/E_z. Dans quelle limite le modèle du conducteur parfait utilisé dans la première partie est-il valable ?

Troisième partie

1.a) Dans la pratique, on a $|n - n_0| / n_0 \ll 1$. Montrer que la condition d'équilibre du conducteur donnée à la question **1.** de la deuxième partie peut se réécrire comme :

$$\rho(r,z) \left(\frac{\partial \mu(n_0, T)}{\partial n_0} \right)_T = -e^2 V(r,z).$$

b) Ecrire la relation générale existant par ailleurs entre la densité de charge $\rho(r,z)$ et le potentiel électrostatique $V(r,z)$.

c) En déduire l'équation aux dérivées partielles linéaire devant être satisfaite par $\rho(r,z)$; on introduira la longueur d'écran λ définie par $\lambda^2 = \frac{\epsilon_0}{e^2} \left(\frac{\partial \mu(n_0,T)}{\partial n_0} \right)_T$.

2. En coordonnées cylindriques, le laplacien s'écrit :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ .$$

Pour des raisons d'analyse dimensionnelle, il est possible d'effectuer le changement de variable et de fonction : $\rho(r,z;\lambda,h) 2\pi r \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \bar{\rho}(R,Z;\lambda/h) 2\pi R \mathrm{d}R \mathrm{d}Z$, où l'on a utilisé les coordonnées réduites sans dimensions $R = r/h$ et $Z = z/\lambda$, et explicité la dépendance dans les paramètres λ, h. Relier ρ et $\bar{\rho}$. Ecrire l'équation aux dérivées partielles linéaire satisfaite par $\bar{\rho}(R,Z;\lambda/h)$.

3. On suppose dorénavant que $\lambda/h \ll 1$.

a) Montrer qu'un terme de l'équation précédente de la question **2.** devient alors négligeable, et en déduire que dans cette limite $\bar{\rho}$ se met sous la forme : $\bar{\rho}(R,Z;\lambda/h \ll 1) = f(R)g(Z)$, où $g(Z)$ est une fonction que l'on déterminera.

b) Dans le même cadre d'approximation, on admettra que la densité volumique de charge totale $\rho(r,z)$ obéit à la règle de somme :

$$\int_0^\infty \rho(r,z) \mathrm{d}z = \sigma(r),$$

où $\sigma(r)$ est la densité surfacique de charge trouvée dans la première partie pour un conducteur parfait. Déterminer $f(R)$.

c) En déduire finalement l'expression de $\rho(r,z)$.

4. Quelle est, pour $z > 0$, l'expression du potentiel électrostatique $V(r,z)$ dans le conducteur ? Déterminer le rapport $V(r,z)/V_0$ où V_0 est le potentiel créé en O par la charge q seule. Tracer les graphes de $V(r,z)/V_0$ en fonction de $R = r/h$ pour $z = 0$ et $z = \lambda$; on prendra $\lambda/h = 0,1$. Commenter le résultat en comparant au cas du conducteur parfait.

5. Dans un métal, le potentiel chimique d'un électron de conduction est pratiquement identique à celui de température nulle et est donné par $\mu = \dfrac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_0)^{2/3}$, où $\hbar = h_{Planck}/2\pi$ est la constante de Planck « réduite » et m_e la masse de l'électron.

a) En introduisant le « rayon de Bohr » $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \cong 0,05$ nm, exprimer la longueur d'écran λ_M dans un métal en fonction de a_0 et de n_0.

b) Pour du cuivre, la densité électronique est $n_0 = 8,6 \times 10^{28}$ m^{-3} . Calculer la valeur de λ_{Cu} correspondante.

6. Dans un semi-conducteur faiblement dopé, la densité électronique est faible et les électrons de conduction se comportent à la température ordinaire comme un gaz classique. Leur potentiel chimique satisfait à :

$$\left(\frac{\partial\mu(n_0,T)}{\partial n_0}\right)_T = \frac{k_B T}{n_0},$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

a) Donner, dans ce cas, l'expression λ_{sc} de l'épaisseur d'écran en fonction de T et n_0 en remplaçant simplement, dans l'expression de λ donnée dans la question **1.c)** de cette troisième partie, ε_0 par une permittivité ε pour tenir compte des propriétés diélectriques du matériau.

b) Selon le dopage, n_0 varie entre 10^{18} et 10^{25} m^{-3}. Calculer les valeurs correspondantes de λ_{sc} à la température ambiante pour laquelle $k_B T = 25 \times 10^{-3}$ eV, en prenant $\epsilon = 15\ \epsilon_0$.

7. On s'intéresse maintenant à la force $\overrightarrow{F}_A$ exercée sur la charge q en A.

a) En donner l'expression formelle sous forme d'une intégrale double contenant $\rho(r,z)$.

b) Evaluer cette intégrale à l'aide du résultat de la question **3.c)** de cette troisième partie ; on effectuera pour cela un développement limité de l'intégrand jusqu'au premier ordre en z/h, en justifiant qualitativement cette approximation.

Comparer le résultat à l'expression obtenue à la question **3.b)** de la première partie dans le cas d'un conducteur parfait.

FIN