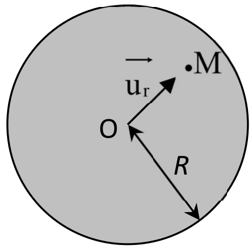
Electrostatique (1)

Exercice 1 : modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

Proton sphérique uniformément chargé



L'anglais J.J.Thomson (*Sir Joseph-John Thomson (1856-1940), prix Nobel 1906*) proposa en 1902 de représenter la charge positive de l'atome d'hydrogène (le « noyau ») comme une sphère finie de centre O, de rayon R, chargée avec une densité uniforme de charge volumique ρ. La charge totale de la sphère est celle du proton : $+e$.

Dans ce modèle, l'électron de masse m_e est supposé ponctuel en un point M et **reste à l'intérieur du « noyau »** ; il n'est soumis qu'à la force d'attraction du noyau dans le repère galiléen lié à ce dernier.

<u>Données :</u> $\varepsilon_0 = 8{,}8.10^{-12}$ F.m^{-1} $\quad e = 1{,}6.10^{-19}$ C $\quad m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg

1- Démontrer que la position de l'électron suit l'équation différentielle : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2\,\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Exprimer la fréquence f_0 de cet oscillateur harmonique en fonction uniquement de e, R, ε_0 et m_e . Décrire les trajectoires possibles pour l'électron.

2- La plus petite fréquence observée à l'époque dans le spectre de l'hydrogène atomique était $f_{min} = 460$ THz soit $f_{min} = 460.10^{12}$ Hz . En déduire une valeur numérique R_{max} majorant R. C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau dans ce modèle.

3- Quelle expérience a permis d'infirmer ce modèle ? A quelle date approximativement ? Quelle est l'estimation actuelle du rayon du noyau d'hydrogène ? Comment s'appelle le modèle de l'atome d'hydrogène ayant succédé à celui de Thomson ?

Exercice 2 : modélisation de la répartition des charges au voisinage de la surface d'un conducteur plan.

Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, comme une plaque de condensateur par exemple, les charges se localisent au voisinage immédiat de la surface entre le conducteur et le vide. Dans cet exercice, on modélise un tel conducteur par un demi-espace infini $x > 0$ chargé avec une densité volumique $\rho(x) = \rho_0 e^{-x/a}$ où a est de l'ordre d'une dizaine de nanomètres, le demi-espace $x < 0$ étant vide.

1- Calculer, à une constante additive près, le champ en tout point de l'espace. Représenter graphiquement pour $\rho_0 > 0$.

2- Justifier, en précisant le cadre de l'approximation, que l'on puisse effectuer une modélisation surfacique des charges et proposer une valeur de densité surfacique σ adaptée.
En reprocédant à une nouvelle analyse des symétries, dans la cadre de l'approximation surfacique, déterminer la constante introduite à la question **1-**. Exprimer alors totalement le champ et le potentiel électrostatique dans le cadre d'une distribution de charge surfacique et dans le cadre d'une distribution volumique.

3- Montrer que dans cette modélisation le champ dans le vide au voisinage immédiat du conducteur s'écrit $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est la normale sortante du conducteur, puis représenter $\|\vec{E}\|$ et V en fonction de x.

Exercice 3 : Potentiel de Yukawa

On se place en coordonnées sphériques de centre O et on suppose que le potentiel en tout point de l'espace est donné par la formule suivante, dite de Yukawa : $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$

1- Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace puis son flux $\Phi(r)$ à travers la sphère de centre O et de rayon r.

2- En utilisant astucieusement l'expression de $\Phi(r)$, déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en tout point de l'espace (on montrera qu'il existe un lien entre $\rho(r)$ et $\frac{d\Phi}{dr}(r)$).

3- Calculer la densité **radiale** de charge, notée $\lambda(r)$ et définie comme la charge par unité de longueur selon la direction radiale (toutes directions confondues).

4- Montrer que cette situation peut être vue comme la superposition de deux distributions de charges, de charges totales opposées, que l'on décrira.

5- On utilise parfois ce modèle pour décrire l'atome d'hydrogène de façon semi-classique. Discuter ce choix puis déterminer la distance la plus probable entre l'électron et le noyau atomique dans le cadre de ce modèle.

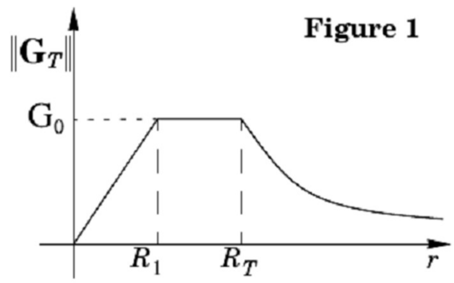
6- *Pour les 5/2 uniquement* : déterminer, dans ce modèle, l'expression de l'énergie d'ionisation de l'atome.

Exercice 4 : Champ gravitationnel terrestre. (*Extrait de Centrale MP 2008*)

Dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R_T, de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

1- Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\overrightarrow{\mathcal{G}_T}$ en tout point M de l'espace et représenter graphiquement $\left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}\right\|$ en fonction de $r = OM$

2- Calculer $\mathcal{G}_0 = \left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}(r = R_T)\right\|$ à la surface de la Terre



En réalité, la M_T n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on conserve la symétrie sphérique, les variations de $\left\|\overrightarrow{\mathcal{G}_T}\right\|$ sont représentées sur la figure 1 avec $R_1 = 3{,}50.10^3$ km

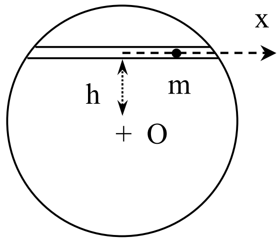
3- Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

4- Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre $(0 \le r \le R_1)$ comme homogène et calculer sa masse volumique (moyenne)

5- Dans le manteau terrestre $(R_1 \le r \le R_T)$, la masse volumique est-elle supposée fonction croissante ou décroissante de r ? Justifier.

Données : $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg ; $R_T = 6{,}38.10^3$ km

Questions complémentaires (*s'il reste du temps*) :



1- On reprend le modèle avec répartition uniforme de la masse de la Terre. Un tunnel est creusé dans la Terre, à une distance *h* de son centre ; un wagon de masse *m* peut se déplacer sans frottement dans le tunnel (schéma ci-contre).
Déterminer la durée mise par le wagon pour passer d'une extrémité à l'autre du tunnel, en fonction de R_T et de G_0 ; calculer numériquement cette durée en heures et minutes.

2- De la matière est uniformément répartie entre deux plans infinis parallèles distants de $2a$. On appelle x l'abscisse d'un point quelconque de l'espace le long d'un axe orthogonal aux deux plans, avec origine à égale distance des deux plans.

3- Représenter l'allure de la fonction $G_x(x)$ où G_x est la composante le long de cet axe du champ gravitationnel créé par ce pavé de matière. Quel intérêt peuvent présenter ce modèle de « pavé de matière » et la détermination de ce champ gravitationnel ?