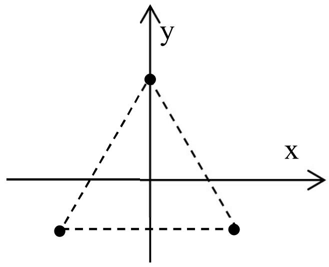
Electrostatique (2)

Exercice 1 : Piégeage d'une particule chargée



Dans un plan (*Oxy*), trois charges ponctuelles $q > 0$ identiques sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de centre *O* et dont la longueur des côtés vaut $a\sqrt{3}$ (voir la figure ci-contre). Le potentiel électrostatique au voisinage de l'origine *O* est de la forme :

$$V(x,y,z) = V_0 + a.x + b.y + g.z + k_1.x^2 + k_2.y^2 + k_3.z^2 + k_4.xy + k_5.yz + k_6.zx$$

On se propose de déterminer avec le minimum de calcul tous les coefficient inconnus : V_0 ; α ; β ; γ ; $\{k_i\}_{i=1..6}$.

1- Déterminer le maximum de coefficients et de relations entre coefficient à partir des symétries de la distribution et des valeurs du potentiel et du champ en *O*.

2- On admet que le potentiel suit dans le vide l'équation locale dite de Laplace $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.
Exploiter cette équation.

3- Calculer le potentiel en un point de l'axe (*Oz*) au voisinage de *O* et conclure.

4- L'origine O peut-elle constituer une position d'équilibre pour une particule de charge q' ? Cet équilibre est-il stable vis-à-vis d'un petit déplacement dans le plan (O*xy*) ? Même question, dans la direction (O*z*) orthogonale à ce plan ? On discutera selon le signe de la charge.
L'ajout d'un champ magnétique peut-il améliorer le piégeage ? Si oui, comment choisir ce champ ?

Exercice 2 : Propriétés électrostatiques de l'atmosphère.

Figure 1 :

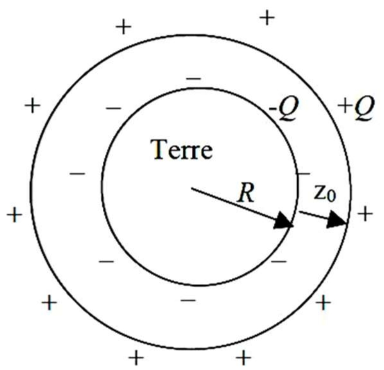
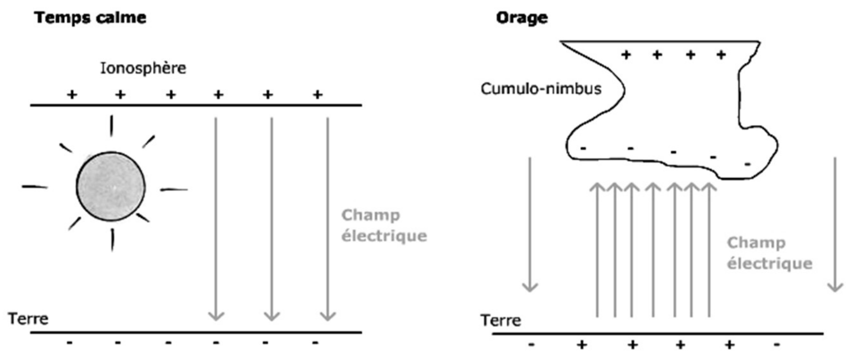


Figure 2 :



A- Système Terre-ionosphère.

On modélise l'ensemble Terre-ionosphère comme un immense condensateur sphérique (figure 1) dont l'une des armatures est la Terre et l'autre armature l'ionosphère ; la portion d'atmosphère située entre le sol et l'ionosphère est supposée isolante et on lui attribue la permittivité du vide. La Terre, de rayon R, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative que nous noterons $-Q$ ($Q > 0$), uniformément répartie sur sa surface ; l'ionosphère, quant à elle, est représentée par une surface équipotentielle de rayon $R + z_0$, de potentiel V_0, portant une charge totale $+Q$ uniformément répartie. On prendra $z_0 = 60$ km et $R = 6000$ km.

1- Exprimer le champ électrostatique de tout point d'altitude z situé entre la Terre et l'ionosphère, en fonction de Q, R, z et ε_0.

2- En déduire le potentiel V_0 puis la capacité C du condensateur Terre-ionosphère, en fonction de R, z_0 et ε_0. Ce condensateur peut-il être assimilé à un condensateur plan ?

3- Des mesures à l'altitude z_0 ont permis d'évaluer le potentiel V_0 à 360 kV. Calculer numériquement la capacité C, l'énergie électrique U_e stockée par ce condensateur, ainsi que la norme E_0 du champ au niveau du sol. Calculer également la charge Q ainsi que la densité surfacique de charge σ_0 à la surface de la Terre.

4- Lors d'un orage, le ciel s'emplit de cumulo-nimbus et le signe de la charge surfacique portée par la Terre s'inverse localement sous les nuages (figure 2) ; ceci est lié à l'effet électrostatique de ces nuages bas, qui se chargent positivement dans leur partie haute et négativement dans leur partie basse.
Sachant que la différence de potentiel entre le sol et un nuage situé à 1 km d'altitude peut alors atteindre 10^8 V, déterminer la nouvelle valeur de la norme du champ au niveau du sol. Commenter, sachant que le champ disruptif de l'air au niveau du sol est de l'ordre de 3.10^6 V.m^{-1}.

B- Electrisation du sol.

Le modèle précédent est un peu sommaire et le champ électrostatique moyen au niveau du sol est plutôt de l'ordre de 5 kV.m^{-1} lors d'un orage. Toutefois, ce champ peut varier localement du fait du relief, comme le montre la figure 3 qui représente les équipotentielles au niveau d'une aspérité ; celle-ci est supposée conductrice, si bien que sa surface est équipotentielle, de potentiel nul.

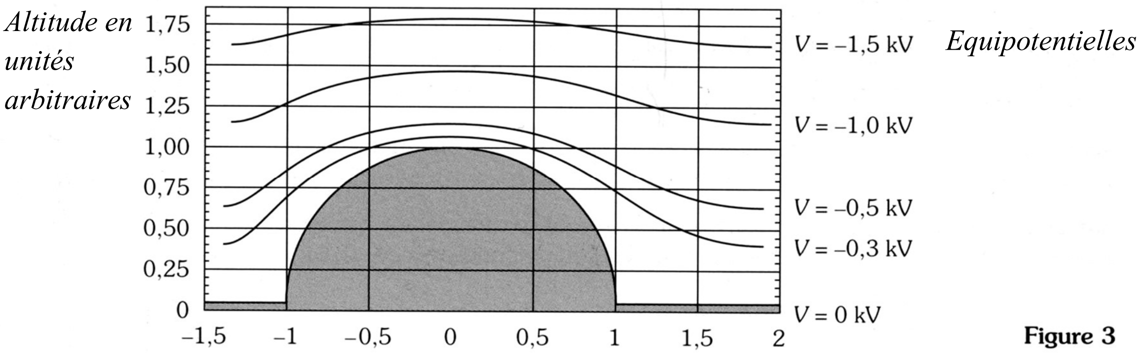


Figure 3

1- Quelle est le signe de la charge portée par l'aspérité ?

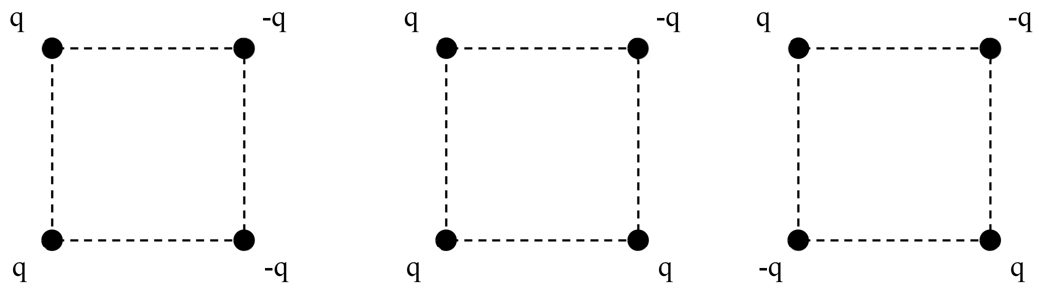
2- Représenter l'allure de quelques lignes de champ. Dans quelle région le champ est-il le plus intense ?

3- Si le champ est de 5 kV.m^{-1} loin de l'aspérité, évaluer sa valeur au sommet de cette aspérité et conclure quant à l'effet de l'orage.

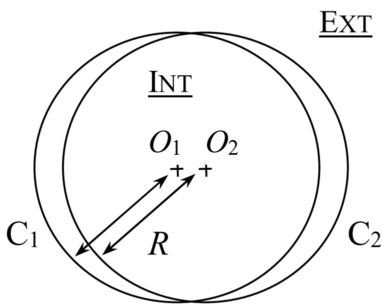
4- Expliquer qualitativement pourquoi une pointe située au niveau du sol « attire la foudre » et citer quelques exemples de cet « effet de pointe ».

Exercice 3

Dans les situations suivantes, quatre charges se trouvent au sommet d'un carré. Sans calcul, prévoir dans chaque cas la dépendance en r du potentiel à grande distance.



Exercice 4 : Modélisation d'une surface chargée par un double cylindre chargé en volume.



Vue en coupe perpendiculairement à la

On étudie un ensemble de deux cylindres C_1 et C_2 infinis de même rayon R et d'axes respectifs (O_1z) et (O_2z). Chaque cylindre est chargé uniformément en volume et les densités volumiques de charges ρ_1 et ρ_2 de C_1 et C_2 sont opposées. On notera $\rho_1 = -\rho < 0$ et $\rho_2 = +\rho > 0$.

On suppose en outre que la distance $a = O_1O_2$ entre les deux axes est négligeable devant le rayon commun R.

On appelle alors intérieur du système (respectivement extérieur), l'ensemble des points M de l'espace intérieurs (respectivement extérieurs) à C_1 et C_2 (*cf.* schéma ci-contre). On ne s'intéressera pas au cas d'un point M situé dans la zone « intermédiaire ».

1- Montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du système et donner son expression en fonction des données.

2- On se place à l'extérieur du système ; on note O le milieu de $[O_1O_2]$ et on repère le point M où l'on veut calculer le champ $\vec{E}$ et le potentiel V par ses coordonnées cylindriques d'axe (Oz), notées r, θ, z.
Compte tenu de la condition $a \ll R$, déterminer l'expression à l'ordre le plus bas en a/r du potentiel $V(M)$ puis en déduire le champ $\vec{E}\,(M)$. Comparer qualitativement au cas d'un unique cylindre chargé.

3- Tracer l'allure des lignes de champ (traits pleins) et des équipotentielles (traits pointillés) dans tout l'espace intérieur et extérieur au système. Quelle est la nature des équipotentielles ?

4- Justifier que, du point de vue de la répartition des charges, ce système est équivalent à un unique cylindre creux, chargé en surface avec une densité σ non uniforme dont on donnera l'expression en fonction des données et des coordonnées θ et z paramétrant la position d'un point à la surface du cylindre.
Montrer alors que la discontinuité du champ de part et d'autre de tout point P de cette surface chargée, s'écrit : $\overrightarrow{E_{ext}} - \overrightarrow{E_{\text{int}}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, $\vec{n}$ étant la normale en P à la surface.

Exercice 5 : Champ électrostatique créé sur l'axe et au voisinage de l'axe d'une spire chargée.

1- Champ électrostatique sur l'axe :

On considère une spire chargée de centre *O*, d'axe (*Oz*) et de rayon *R*, portant une charge totale *Q* répartie uniformément avec une densité de charge linéique λ (figure 1).

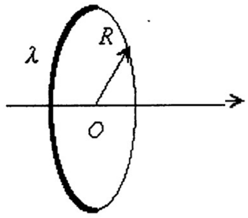


Figure 1

a- Montrer qu'en tout point de l'axe (*Oz*) le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(M) = E_{axe}(z)\vec{e_z}$.

b- On pose : $E_{axe}(z) = E_0 \times g\left(\frac{z}{R}\right)$ où E_0 est une valeur typique de l'intensité du champ électrique sur l'axe. En vous justifiant, représenter l'allure du graphe de la fonction *g*.

c- Proposer une expression de E_0 en fonction des paramètres du problème, par analyse dimensionnelle.

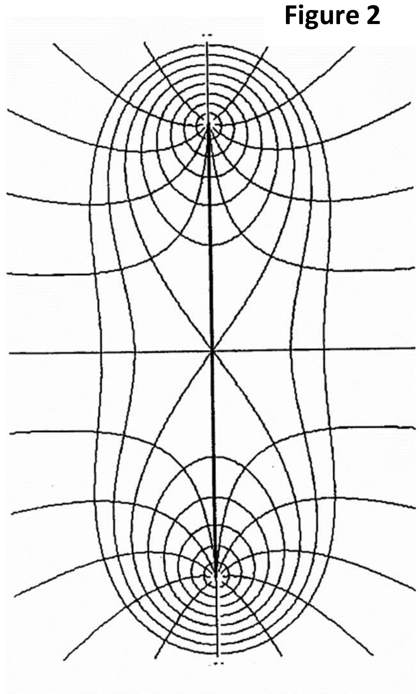
d- Parmi les expressions suivantes, identifier celle qui peut correspondre à la fonction *g*, la variable étant notée *u* :

$\left(1+u^2\right)^{-1/2}$ $\quad\left(1+u^2\right)^{-3/2}$ $\quad u\left(1+u^2\right)^{-3/2}$ $\quad |u|\left(1+u^2\right)^{-3/2}$ $\quad u\left(1+u^2\right)^{-5/2}$

e- En adoptant cette expression pour la fonction *g*, trouver la valeur de E_0 qui convient.

2- Champ électrostatique au voisinage de l'axe :

Figure 2



L'objectif de cette partie est de montrer que l'on peut déduire le champ électrostatique au voisinage immédiat de l'axe de la spire à partir du champ sur l'axe, c'est-à-dire de la fonction $E_{axe}(z)$.

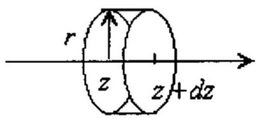
On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

a- Montrer par des arguments de symétrie très précis qu'en tout point M (r, θ, z) hors d'axe, le champ électrostatique n'a pas de composante orthoradiale et que sa norme ne dépend que de *r* et *z*. On note donc : $\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}$. Quel lien existe-il entre ces composantes et $E_{axe}(z)$?

b- On donne ci-contre (figure 2) l'allure des lignes de champ et des équipotentielles dans un plan méridien de l'axe de la spire. Identifier les lignes de champ et préciser leurs orientations, puis démontrer que lignes de champ et équipotentielles sont perpendiculaires. Quelle carte obtiendrait-on à grande distance de la spire ? Que se passe-t-il au centre de la carte ?

c- On cherche à déterminer la composante $E_r(r,z)$ au voisinage de l'axe, c'est-à-dire en supposant r faible à l'échelle des variations de E_r et E_z vis-à-vis de la variable r. Pour cela, on introduit un cylindre fermé élémentaire centré sur l'axe, de rayon r faible et dont les bases sont situées aux abscisses z et $z + dz$ où dz est considéré infinitésimal (figure 3).

Figure 3



Calculer le flux du champ à travers chaque face de ce cylindre, à l'ordre le plus bas non nul. En déduire un lien entre $E_r(r,z)$ et la fonction $E_{axe}(z)$. Calculer explicitement $E_r(r,z)$.

d- On cherche enfin à déterminer la composante $E_z(r,z)$ au voisinage de l'axe. En introduisant un contour fermé élémentaire de votre choix, montrer que :

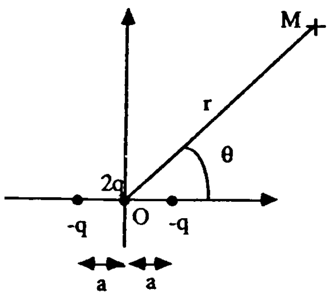
$$\forall(r,z) \quad \frac{\partial E_z}{\partial r}(r,z) = \frac{\partial E_r}{\partial z}(r,z)$$

En déduire une expression approchée de $E_z(r,z)$ au voisinage de l'axe en fonction de $E_{axe}(z)$ (le calcul explicite de $E_{axe}(z)$ n'est pas demandé). Pouvait-on prévoir la dépendance en r^2, et non en r, dans l'expression de $E_z(r,z)$?

Exercice 6 : Sphère chargée en surface et quadripôle électrostatique.

1- On considère une sphère de centre O et de rayon R ne portant des charges que sur sa surface, et on suppose sa densité superficielle de charge $\sigma\,(\sigma > 0)$ uniforme.
Calculer le champ et le potentiel électrostatique créés par la sphère en tout point M de l'espace (intérieur ou extérieur à la sphère), en fonction de la distance $r = OM$. Quelles particularités présentent le champ et le potentiel à la traversée de la surface du conducteur ?

2- On étudie maintenant trois sphères de rayon R identiques à celle décrite ci-dessus, portant respectivement les charges totales : $-q$, $+2q$, $-q$ ($q > 0$) ; les centres de ces sphères sont alignés selon un axe (Oz) et distants de a.
Justifier qu'il suffit de déterminer la carte de champ dans un plan quelconque contenant (Oz) pour connaître le champ en tout point de l'espace. Donner l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans un de ces plans.



3- On s'intéresse au potentiel électrostatique V créé en première approximation par ces sphères en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques r et θ (voir schéma ; pourquoi l'angle φ n'est-il pas précisé ?), dans le cas où r est très grand devant a. En vous justifiant, choisir parmi les expressions ci-contre celle(s) qui peut (peuvent) convenir :

a) $-2A\frac{\cos^2\theta}{r^2}$
b) $A\frac{1-3\cos^2\theta}{r^2}$
c) $A\frac{1-3\cos\theta}{r^2}$
d) $-2A\frac{\cos\theta}{r^2}$
e) $-2B\frac{\cos^2\theta}{r^3}$
f) $B\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}$
g) $-2B\frac{\cos\theta}{r^3}$

4- Déterminer par le calcul la constante indéterminée (A ou B) ; déduire l'expression du champ électrostatique créé à grande distance par ces charges.

5- Quelle molécule présente dans l'atmosphère possède un comportement électrostatique assimilable à celui de cette distribution ?

Exercice complémentaire : Environnement électrostatique d'un colloïde.

Une solution colloïdale est une suspension dans l'eau de particules chargées de même signe, microscopiques mais très grandes à l'échelle atomique, entourées d'ions positifs et négatifs (aux dimensions atomiques). On étudie la façon dont les ions sont distribués au voisinage d'une de ces particules, appelée colloïde, ainsi qu'au champ et au potentiel électrostatiques associés à cette distribution (particule + ions qui l'entourent). On considère que :

- La solution est suffisamment diluée en colloïdes pour que le champ et le potentiel électrostatiques au voisinage du colloïde étudié soient dus uniquement à cette particule et aux ions qui l'entourent. Comme l'ensemble n'est pas plongé dans le vide mais dans l'eau, on n'omettra pas de prendre en compte la permittivité relative ε_r de l'eau lors de tout calcul électrostatique.
- Le colloïde est sphérique, de rayon r_0, et chargé positivement ; sa charge vaut pe (p est un entier positif, $-e$ la charge de l'électron) et est répartie uniformément sur sa surface. Le problème possède donc la symétrie sphérique.
- L'électrolyte est formé de deux types d'ions de charges $\pm e$. Les densités particulaires de chaque espèce d'ions à une distance $r > r_0$ du centre de la particule sont données par la loi de Boltzmann : $$n^+(r) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p^+(r)}{k_B T}\right), \qquad n^-(r) = n_0 \exp\left(\frac{-E_p^-(r)}{k_B T}\right)$$

  où $E_p^+(r)$ et $E_p^-(r)$ désignent les énergies potentielles électrostatiques des cations et des anions à la distance r ; T est la température absolue et k_B la constante de Boltzmann. n_0 est identique pour les ions positifs et négatifs afin de garantir la neutralité électrique de la solution à grande distance de la particule. On suppose en outre que la température est suffisamment élevée pour pouvoir linéariser le facteur de Boltzmann pour les deux types d'ions :
$$\exp\left(\frac{-E_p}{k_B T}\right) \approx 1 - \frac{E_p}{k_B T}$$

1- Déterminer le champ électrostatique à la surface du colloïde en $r = r_0^+$.

2- Exprimer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction du potentiel électrostatique $V(r)$ et des constantes du problème.

3- En appliquant le théorème de Gauss, montrer que la composante radiale E_r du champ électrostatique vérifie, à la distance $r > r_0$ du centre du colloïde, l'équation différentielle :
$$\frac{dE_r}{dr}(r) + 2\frac{E_r(r)}{r} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$
En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par $V(r)$.

4- On pose $V(r) = \dfrac{U(r)}{r}$ et $D = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r k_B T}{2e^2 n_0}}$; D est appelée longueur de Debye.

Calculer $U(r)$ puis le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r > r_0$. Représenter $V(r)$ et interpréter la longueur D. Pourquoi dit-on que la charge pe du colloïde est « écrantée » ?
Calculer D dans le cas de l'eau pure à pH=7 et commenter.
On donne :
$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$; $\varepsilon_r = 80$; $e = 1{,}60.10^{-19}\,\mathrm{C}$; $k_B = 1{,}38.10^{-23}\,\mathrm{J.K^{-1}}$; $T = 300\,\mathrm{K}$;
$N_A = 6{,}02.10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

5- Déterminer la quantité de charge entourant un colloïde. Commenter.