Magnétostatique (1)

Exercice 1 : Etude du champ magnétique terrestre

Dans tout cet exercice, les pôles magnétiques et géographiques sont confondus.

Données :
- Rayon moyen de la Terre : $R_T = 6371$ km
- Latitude de Paris : $\lambda = 48{,}5°$
- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}

1- Lesquelles de ces propriétés sont vraies ?

a- L'intensité du champ magnétique terrestre est négligeable devant celle du champ créé par un aimant usuel.

b- L'aiguille aimantée d'une boussole est sensible au champ terrestre mais ne crée pas elle-même de champ magnétique.

c- Le champ magnétique terrestre est permanent et uniforme.

d- Le champ magnétique terrestre est créé par les roches magnétiques présentes dans le sous-sol.

e- Le champ magnétique terrestre est assimilable à celui d'un aimant droit approximativement dirigé selon l'axe nord-sud.

f- Le pôle nord de cet aimant coïncide avec le pôle nord magnétique terrestre.

2- On suppose le magnétisme terrestre assimilable à celui d'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ situé en son centre et dirigé parallèlement à l'axe des pôles.

a- Effectuer un schéma bidimensionnel des lignes de champ à l'échelle de la Terre, dans le plan méridien contenant Paris. Repérer Paris en coordonnées sphériques d'axe dirigé par $\vec{\mathcal{M}}$ et identifier l'horizontale et la verticale locale dans le repère sphérique.

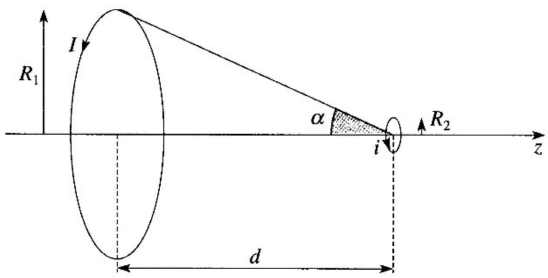
b- Caractériser les composantes verticale B_v et horizontale B_h du champ magnétique ressenti à Paris : y en a-t-il une qui soit nulle ? Le cas échéant, déterminer leur rapport puis l'angle i entre le champ et l'horizontale. On représentera ce champ sur le schéma précédent.

c- Faire de même pour le champ ressenti au pôle nord puis en un point de l'équateur.

d- Sachant que l'intensité du champ mesuré au pôle nord est de 56 µT, déterminer la valeur du moment magnétique de la Terre puis de l'intensité du champ ressenti au niveau de l'équateur. Calculer enfin l'intensité du champ magnétique ressenti à Paris, ainsi que la valeur de sa composante horizontale.

Exercice 2 : Actions mutuelles entre deux spires coaxiales, puis entre une spire et un aimant.

Deux spires circulaires coaxiales d'axe (Oz) et de rayons respectifs R_1 et R_2 sont respectivement parcourues par des courants I et i permanents. Leurs centres sont distants de d et on suppose que R_2 est très petit devant R_1 et d



Donnée : Champ magnétique sur l'axe (Oz) d'une spire de rayon R parcourue par un courant i :

$$\vec{B}(z)=\frac{\mu_0 i}{2R}\frac{1}{\left(1+(z/R)^2\right)^{3/2}}\vec{e_z}$$

1- Calculer la force d'interaction entre les deux spires.

2- Même question si on remplace la petite spire par un petit aimant de moment magnétique colinéaire à (Oz).

Le petit aimant est maintenant placé au voisinage du centre O de la spire de rayon R_1 (il n'y a plus de spire de rayon R_2) et est lâché sans vitesse initiale. On suppose que le seul mouvement possible de l'aimant est une translation sans frottements le long de (Oz) et on néglige tout phénomène d'induction au sein de la spire.

3- Donner l'équation du mouvement de l'aimant, discuter le mouvement observé, puis expliquer comment on peut déterminer expérimentalement le moment magnétique de l'aimant à partir de cette expérience.

Exercice 3 : Modèle semi-classique du magnétisme d'un atome.

Données :

- Charge élémentaire : $e = 1{,}602.10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m = 9{,}109.10^{-31}$ kg
- Constante de Planck : $h = 6{,}626.10^{-34}$ J.s
- Nombre d'Avogadro : $N_a = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-1}
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1}
- Nombre de masse du fer : $A = 56$
- Densité du fer : $d = 7{,}9$
- Intensité du champ magnétique au centre d'une spire de rayon R parcourue par un courant i : $B_0=\dfrac{\mu_0 i}{2R}$.

Les résultats numériques seront donnés avec 3 chiffres significatifs.

Modèle classique de l'atome. Rapport gyromagnétique.

1- Dans une approche classique, un atome d'hydrogène se décrit via un modèle planétaire où un électron mobile de charge - e et de masse m, décrit une orbite circulaire de rayon r autour d'un noyau fixe de charge $+e$.

1a- Exprimer, en fonction de m, e, r et la permittivité du vide ε_0, la vitesse v de l'électron sur son orbite, son énergie mécanique E, son moment cinétique $\vec{L}$, puis la période T de ce mouvement.

1b- Sachant que l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est mesurée à 13,6 eV, calculer la valeur r_0 du rayon de l'orbite correspondant à l'état fondamental de l'atome, puis les valeurs de v et T associées. Que peut-on dire du rayon orbital lorsque l'atome est dans un état excité ?

2a- Expliquer pourquoi l'atome d'hydrogène peut être assimilé, en moyenne au cours du temps, à une petite spire circulaire parcourue par un courant constant i. Exprimer le courant i ainsi que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associés à l'atome, en fonction de m, e, r et ε_0.

2b- Lorsque l'atome est dans son état fondamental, évaluer numériquement le courant i, puis les intensités des champs magnétiques ressentis au niveau du noyau et à des distances égales à 20, 50 et 100 fois le rayon r_0. Comparer au champ magnétique terrestre et conclure.

2c- Montrer que, quel que soit l'état de l'atome, $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{L}$ sont liés par une relation du type : $\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{L}$ où γ, appelé rapport gyromagnétique de l'électron, ne dépend que de constantes fondamentales. Justifier que cette relation puisse se généraliser aux moments cinétique et magnétique de tout type d'atome.

Modèle semi-classique de Bohr. Magnéton de Bohr.

Cette partie fait appel à des notions de mécanique et de physique quantique du cours de MPSI.

3- En toute rigueur, les propriétés de l'atome doivent être traitées dans le cadre de la mécanique quantique. Toutefois, il existe une approche "semi-classique" qui consiste à conserver le modèle planétaire de la partie précédente et d'y ajouter une condition en lien avec les principes de la mécanique quantique.

3a- Exprimer, en fonction des grandeurs introduites à la question 1, la longueur d'onde λ de de Broglie associée à l'électron.

Dans cette approche semi-classique, on impose que l'onde associée au mouvement de l'électron autour du noyau soit stationnaire si l'atome est dans un état stable. Il faut pour cela que la longueur de la trajectoire circulaire de l'électron soit un multiple de sa longueur d'onde.

3b- Montrer que cette condition revient à imposer que le moment cinétique de l'électron soit un multiple de la constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi$, puis discuter les valeurs possibles pour le rayon r. Calculer la valeur minimale r_0 envisageable pour r et commenter.

Vous retrouvez ici la célèbre condition de quantification introduite par le danois N. Bohr qui fut le premier, en 1913, à imaginer un modèle semi classique de l'atome (et obtint le prix Nobel en 1922). r_0 *est appelé « rayon de Bohr » de l'atome.*

3c- Déduire des questions précédentes que le moment magnétique de l'atome ne peut prendre que des valeurs multiples de la quantité $\mu_B = e\hbar/2m$, appelée « magnéton de Bohr ». Calculer numériquement μ_B et commenter.

3d- Rappeler l'unité usuelle du moment magnétique. Dans la littérature, on trouve μ_B exprimé en $J.T^{-1}$. Justifiez par analyse dimensionnelle.

4- Dans la plupart des structures atomiques et moléculaires, les moments magnétiques des différents électrons se compensent et conduisent à un moment magnétique résultant nul. A contrario, un aimant est constitué d'atomes ayant chacun un moment magnétique non nul.

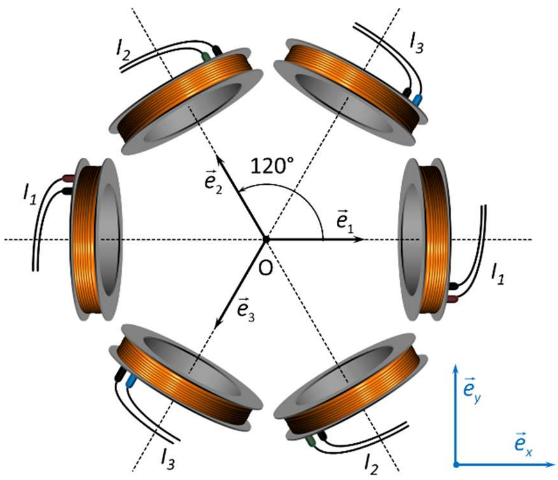
En supposant que chaque atome constituant un aimant possède un moment magnétique égal à μ_B, évaluer l'ordre de grandeur du moment magnétique volumique de cet aimant ; en déduire l'ordre de grandeur de son moment magnétique et commenter la valeur obtenue.

Exercice 4 : Champ tournant et moteur synchrone.

Je corrigerai cet exercice s'il reste du temps ; *lisez l'énoncé SVP !*

I- CHAMP TOURNANT.

1- L'espace est rapporté au trièdre direct (*Oxyz*), l'axe (*Oz*) étant vertical ascendant. Dans le plan horizontal (*Oxy*), on considère 3 axes concourants en *O*, dirigés respectivement par les trois vecteurs unitaires $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ faisant entre eux un angle de 120° (schéma ci-contre).

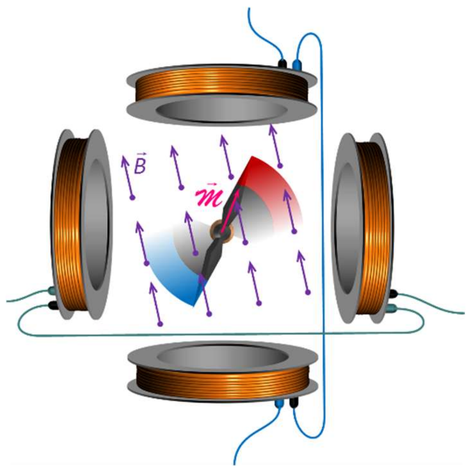


Ces axes sont les axes de symétrie de trois paires de bobines, chaque paire de bobines étant parcourue par un courant i_k orienté dans le sens direct par rapport à $\vec{e}_k$, $k \in \{1,2,3\}$. Ces courant sont tous sinusoïdaux de même pulsation et même amplitude mais sont déphasés de 120° les uns par rapport aux autres :

$$\begin{cases} i_1 = I_M \cos(\omega t) \\ i_2 = I_M \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 = I_M \cos\left(\omega t - \dfrac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

On suppose que chaque paire de bobines crée au voisinage de *O* un champ quasiment uniforme, parallèle à son axe et proportionnel au courant qui l'alimente, soit :
$\overrightarrow{B_k} = \alpha\, i_k\, \overrightarrow{e_k} \quad k \in \{1,2,3\}$. La constante de proportionnalité importe peu dans cet exercice.

Exprimer chaque vecteur $\overrightarrow{e_k}$ sur la base cartésienne (voir schéma), puis calculer le champ magnétique total créé au voisinage de *O*. Montrer qu'il s'agit d'un champ « tournant » de module constant, que nous noterons B_0, et dont la direction tourne à vitesse angulaire uniforme autour de (*Oz*).



2- On souhaite créer un champ tournant avec uniquement deux paires de bobines, dont les axes sont orthogonaux (schéma ci-contre). Comment faut-il choisir les courants parcourant les paires de bobines ?

II- MOTEUR SYNCHRONE.

Un aimant permanent, dont le seul degré de liberté est une rotation autour de (*Oz*), est placé en *O*, son moment magnétique, de module M constant, étant contenu dans le plan horizontal (*Oxy*). En reliant mécaniquement l'aimant à un arbre d'axe (*Oz*), on espère réaliser un moteur rotatif.

1- Expliquer qualitativement pourquoi il est plausible que l'aimant tourne autour de (*Oz*) à la même vitesse angulaire que le champ.

Dans toute la suite et jusqu'à la question 4, on étudie un régime permanent de rotation de l'aimant à la vitesse angulaire ω imposée par le champ magnétique tournant. Toutefois, on envisage cette rotation synchrone avec un éventuel décalage angulaire entre le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de l'aimant et le champ magnétique $\vec{B}$; on note $\theta_0 = \left(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}\right)$.

2a- Calculer le couple Γ_L, par rapport à (Oz), des actions de Laplace s'exerçant sur l'aimant lors de ce régime permanent. On s'appuiera sur un schéma du plan (Oxy), figurant le champ magnétique et le moment magnétique à l'instant initial, puis à un instant t quelconque ; on prendra $\theta_0 = \pi/6$ pour fixer les idées.

2b- Tracer Γ_L en fonction de θ_0. Pour quelles valeurs de θ_0 ce couple Γ_L est-il moteur ? Commenter.
Quelle est la valeur maximale que peut prendre Γ_L ? la valeur minimale ? Dans quelle configuration chacune de ces valeurs est-elle obtenue ?

L'arbre du moteur est évidemment relié à un outil ou une partie « utile » dont la mise en rotation est l'objectif du moteur. Lorsqu'elle est effectivement en rotation, cette partie utile exerce un couple résistant sur l'aimant, caractérisant l'effort demandé au moteur. On suppose ce couple constant et on le note - Γ_r avec $\Gamma_r > 0$. On néglige par ailleurs les frottements fluides. Enfin, on admet que, dans ces conditions, un fonctionnement stable du moteur limite l'angle θ_0 à l'intervalle $[0; \pi/2]$.

3a- En appliquant le théorème de la mécanique adapté, déterminer la relation qui existe entre les paramètres du moteur (M, B_0, ω, θ_0, Γ_r) lorsque le moteur tourne à vitesse angulaire constante (tous les paramètres cités n'interviennent pas nécessairement…).

3b- Quel paramètre du moteur dépend de l'effort demandé ? Décrire ce que l'on observe pour différentes valeurs de Γ_r et montrer que le moteur ne peut fonctionner que si l'effort demandé reste inférieur à une valeur limite que l'on déterminera et que l'on commentera.

4a- On envisage la possibilité d'une rotation de l'aimant à une vitesse angulaire ω' constante a priori différente de ω et on note alors $\omega' t - \theta_0$ l'angle que fait le moment magnétique avec l'axe (Ox) à l'instant t. Que vaut le couple instantané des actions de Laplace ? Quelle est sa moyenne temporelle ? Conclure et expliquer le terme de moteur « synchrone ».

4b- Le moteur synchrone peut-il démarrer tout seul ? Si non, que faut-il faire au démarrage ?

5- Que se passe-t-il si, à partir d'un fonctionnement permanent correspondant à un couple Γ_r fixé et à $\theta_0 \in [0; \pi/2]$, l'effort demandé augmente ou diminue légèrement ? Montrer que le fonctionnement est stable, c'est-à-dire que le moteur ne s'arrête pas (ne cale pas) mais se stabilise pour donner lieu à un nouveau régime permanent. Discuter les caractéristiques de ce nouveau régime : a-t-il lieu à la même vitesse de rotation ? avec le même θ_0 ?

Montrer que, a contrario, si l'état initial envisagé correspond à $\theta_0 \in [\pi/2 ; \pi]$, le fonctionnement est instable.

Montrer enfin que le moteur cale si l'effort demandé est trop grand.