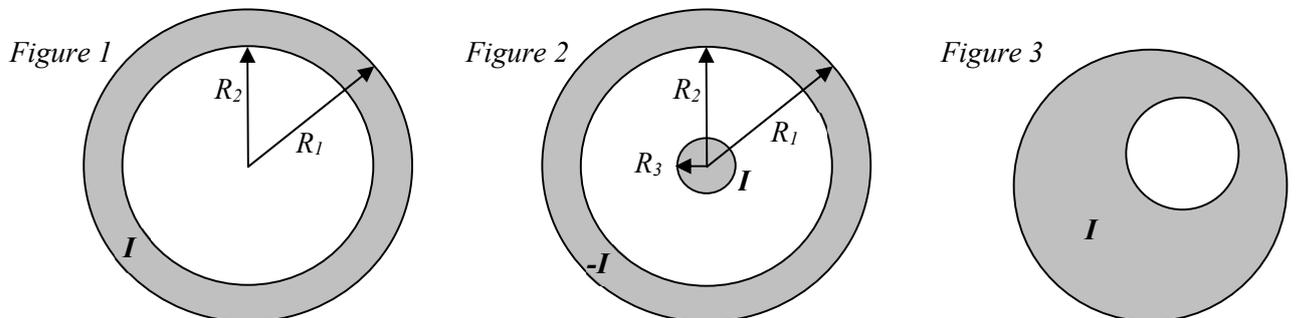


Magnétostatique (2)

Exercice 1 : Champs créés par divers câbles.

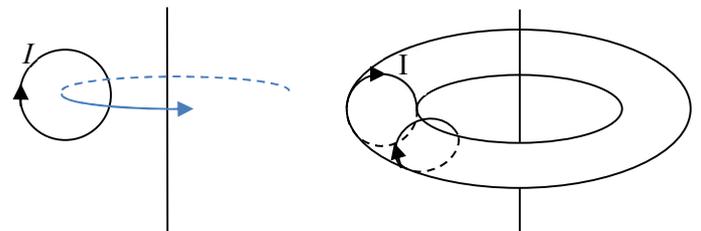
- 1- Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace par un câble rectiligne et infini, parcouru par un courant I uniformément réparti, et dont une section est représentée sur la figure 1.
- 2- On considère un câble coaxial rectiligne et infini, dont une section est représentée sur la figure 2 ; les densités de courant sont uniformes dans chaque partie conductrice, toutes deux parcourues par une même intensité totale I , mais en sens inverse. En effectuant le minimum de calcul (si possible, aucun calcul explicite), tracer qualitativement le graphe donnant l'allure de la norme du champ magnétique créé par ce câble à toute distance r de son axe de symétrie de révolution. Commenter la valeur du champ au voisinage du câble.
- 3- On considère enfin un cylindre conducteur infiniment long, parcouru par un courant I uniformément réparti, et partiellement évidé selon une cavité cylindrique désaxée ; une section est représentée sur la figure 3. Déterminer le champ magnétique créé par le cylindre dans la cavité.

Note : cet exercice existe également dans une version électrostatique.



Exercice 2 : Champ créé par un solénoïde torique.

Un tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle (ou plus généralement d'une courbe plane fermée) autour d'un axe. On s'intéresse à un solénoïde torique constitué d'un enroulement de N spires jointives sur un tore, chaque spire étant parcourue par **un courant I (sens indiqué sur le schéma)**.



- 1- Déterminer le champ magnétique créé par ce solénoïde torique en tout point de l'espace.
- 2- Ce résultat est-il modifié si le tore est à section carrée ?
- 3- Dédire des résultats précédents l'inductance propre d'un solénoïde torique à section carrée.

Exercice 3 : Définition légale de l'ampère avant 2018.

La définition légale de l'ampère avant 2018 était la suivante :

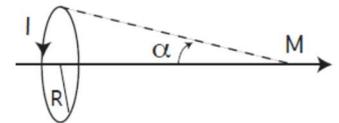
« L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu entre deux fils rectilignes parallèles, de longueur infinie, de section circulaire négligeable, et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces deux conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur ».

Montrer que cette définition revient à donner à la perméabilité du vide μ_0 la valeur $4\pi \cdot 10^{-7}$ dans le système d'unité international.

Connaissez-vous la nouvelle définition de l'ampère, en vigueur depuis 2018 ?

Exercice 4 : Champ créé par un disque chargé en rotation.

On s'intéresse à une spire métallique circulaire, de centre O et de rayon R , parcourue par un courant stationnaire I . On donne l'expression du champ magnétique créé par cette spire en un point M quelconque de son axe de symétrie de révolution (Oz), en fonction de l'angle α sous lequel la spire est



vue depuis M : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

- 1- Discuter l'équivalence entre cette spire et un dipôle magnétique, lorsqu'on s'intéresse au champ créé sur l'axe (Oz).

On s'intéresse maintenant à un disque métallique plat de centre O et de rayon R , situé dans le plan $z = 0$, que l'on a uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ , puis mis en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe de révolution (Oz). On suppose que la rotation du disque n'a aucune incidence sur la répartition de ses charges.

- 2- Montrer que l'on peut considérer ce système comme un ensemble de spires circulaires infinitésimales concentriques, chacune étant parcourue par un courant infinitésimal dI que l'on caractérisera.
- 3- En déduire l'expression du champ magnétique créé en O , puis à grande distance du disque.

Exercice 5 : Supraconducteur et effet Meissner.

On s'intéresse à une sphère supraconductrice de centre O et de rayon R que l'on plonge dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. La théorie des supraconducteurs montre que dans cette situation, des courants superficiels permanents apparaissent par induction à la surface de la sphère et créent un champ magnétique propre \vec{B}_s qui compense totalement \vec{B}_0 à l'intérieur de la sphère (ces courants sont créés lors de l'installation du champ \vec{B}_0 et perdurent indéfiniment compte tenu de la résistivité nulle du matériau supraconducteur). Cet effet s'appelle l'effet Meissner.

- 1- Montrer que si le champ magnétique total est nul en tout point intérieur à la sphère, il en est de même du vecteur densité volumique de courant.
- 2- Montrer que la nullité du champ magnétique total à l'intérieur à la sphère impose au champ extérieur d'être tangent à la sphère à son voisinage.

On modélise le champ \vec{B}_s créé par la sphère supraconductrice **en son extérieur**, par un champ dipolaire associé à un moment magnétique de la forme : $\vec{M} = M \vec{e}_z$.

- 3- Exprimer alors le champ magnétique total en tout point extérieur à la sphère.
- 4- Montrer que, dans le cadre de ce modèle, le moment magnétique acquis par la sphère vérifie nécessairement : $M = -\frac{2\pi}{\mu_0} R^3 B_0$.
- 5- En déduire l'expression de la densité surfacique de courant qui est apparue sur la sphère.
- 6- Proposer une allure de la carte de champ magnétique à l'extérieur de la sphère.
- 7- La supraconductivité cesse si le champ magnétique à la surface de la sphère dépasse, en intensité, une valeur critique que l'on suppose égale à 12,5 T dans les conditions de l'expérience. Pour quelle valeur du champ magnétique B_0 cela se produira-t-il et en quels points de la sphère cette rupture de l'état supraconducteur s'amorcera-t-elle ?

Données :

- Expression du champ créé en un point P de l'espace par un dipôle magnétique de moment \vec{M} situé en O : $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right\}$ avec $\vec{r} = \vec{OP}$
- Relation de passage du champ magnétique à travers une interface séparant deux milieux (1) et (2) : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

1. Diodes à jonction PN (Extrait de Mines MP 2013).

Les données numériques se trouvent en fin d'énoncé. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{u}_x), ou d'une flèche dans le cas général (\vec{v}). Pour les applications numériques on fournira 3 chiffres significatifs.

Aucune connaissance préalable sur les diodes n'est nécessaire pour traiter ce sujet. Le symbole électrique d'une diode est donné sur la figure 1. Idéalement, la diode est un composant électronique ayant la propriété de ne laisser passer le courant que dans un sens.

- ◇ Si $V \leq 0$, l'intensité i est nulle et la diode est dite bloquée.
- ◇ Si la tension V tend à devenir positive, la diode se débloque et se comporte comme un fil (ce qui annule aussitôt V). L'intensité i est alors positive et la diode est dite passante.

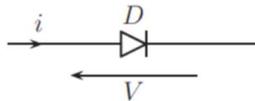
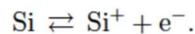


FIGURE 1 – Schéma électrique d'une diode.

Les diodes actuelles sont construites en matériaux semi-conducteurs.

Le silicium pur est un semi-conducteur intrinsèque. Il s'y produit des ionisations thermiques (à température ambiante par exemple) :



Un ion Si^+ est appelé « trou » positif. On dit que l'ionisation crée une paire électron-trou. Le silicium étant neutre, il y a autant de porteurs de charge N (électrons négatifs) que de porteurs de charge P (trous positifs).

Lorsqu'un champ électrique est appliqué, les électrons *et les trous* se déplacent, assurant la conduction électrique. En réalité, un ion Si^+ ne se déplace pas car il fait partie du réseau cristallin. Cependant, il prend un électron à son atome de Si voisin, redevenant Si tandis que son voisin est devenu Si^+ . Ainsi, tout se passe comme si l'ion Si^+ avait migré. Du point de vue de la conduction, les trous positifs se comportent donc comme des porteurs mobiles dont la charge est opposée de celle de l'électron.

□ **13** — Comment évolue la conductivité d'un semi-conducteur lorsque la température augmente ? (Justifier). Ce comportement est-il le même que pour les métaux ?

Semi-conducteur extrinsèque dopé N par un donneur d'électrons

Dans du silicium (de valence 4), on peut introduire une faible proportion d'atomes de valence 5 (un atome de phosphore pour 10^{10} atomes de silicium par exemple). L'agitation thermique ionise le phosphore selon $\text{P} \rightarrow \text{P}^+ + e^-$. Cela libère un électron (porteur N) qui peut conduire le courant. En revanche, l'ion P^+ est fixe dans le réseau cristallin de silicium. Comme ses plus proches voisins sont des atomes de silicium et non de phosphore, l'ion P^+ ne peut pas échanger d'électron avec un atome de phosphore voisin et ainsi donner l'illusion qu'il se déplace. Il ne constitue donc pas un trou positif mobile. Ainsi, l'ajout d'atomes de phosphore augmente le nombre de porteurs mobiles négatifs (N) sans changer le nombre de porteurs mobiles positifs (P). Les porteurs mobiles N sont donc majoritaires : le semi-conducteur est dit « dopé N », les atomes de phosphore étant qualifiés de **donneurs d'électrons**.

Semi-conducteur extrinsèque dopé P par un accepteur d'électrons

Dans du silicium (de valence 4), on peut introduire une faible proportion d'atomes de valence 3 (comme le bore par exemple). Un atome de bore capture un électron à un silicium voisin, ce qui crée un ion B^- et un ion Si^+ . L'ion B^- est fixe dans le réseau cristallin et ses plus proches voisins sont des atomes de silicium et non de bore. Il ne peut donc pas, par échange d'électron avec un atome de bore voisin, donner l'illusion qu'il se déplace. Ce n'est donc pas un porteur mobile de type négatif (N). En revanche, l'ion Si^+ constitue un trou positif (P) mobile car il est toujours entouré de nombreux atomes de Si dans le réseau de silicium cristallin. Ainsi, l'ajout d'atomes de bore augmente le nombre de porteurs mobiles P sans changer le nombre de porteurs mobiles N. Les porteurs mobiles P sont donc majoritaires : le semi-conducteur est dit « dopé P », les atomes de bore étant qualifiés d'**accepteurs d'électrons**.

Les semi-conducteurs dopés sont globalement neutres car les charges des porteurs libres sont compensées par les charges fixes.

On crée une jonction PN en accolant deux blocs de silicium dopés P et N respectivement (voir figure 3).

◇ Le semi-conducteur P est dopé avec N_A accepteurs d'électrons par unité de volume.

◇ Le semi-conducteur N est dopé avec N_D donneurs d'électrons par unité de volume.

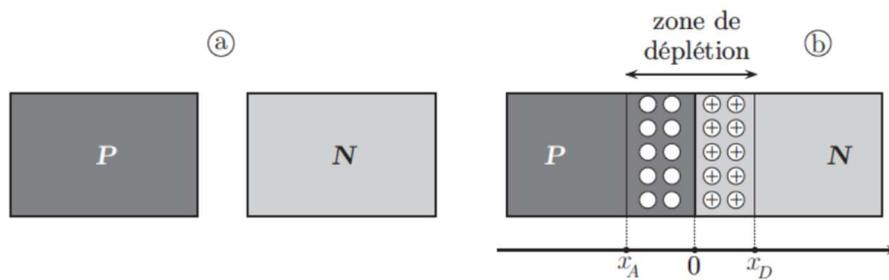


FIGURE 3 – Réalisation d'une jonction PN en $x = 0$.

Lors de l'établissement de la jonction, les électrons du semi-conducteur N diffusent dans le semi-conducteur P car il y a un gradient de concentration en électrons. De même, les trous du semi-conducteur P diffusent dans le semi-conducteur N à cause du gradient de concentration en trous.

La diffusion, non étudiée ici, se poursuit jusqu'à atteindre l'état d'équilibre (simplifié) suivant.

- ◇ La région $[x_A, 0]$, initialement neutre, est complètement vidée des trous positifs apportés par ses atomes accepteurs. Elle devient chargée négativement avec la densité volumique de charge ρ_1 , supposée uniforme pour simplifier. (Cette charge est négative car elle résulte de la présence d'accepteurs ionisés, fixes dans le réseau cristallin).
- ◇ La région $[0, x_D]$, initialement neutre, est complètement vidée des électrons apportés par ses atomes donneurs. Elle devient chargée positivement avec la densité volumique de charge ρ_2 , supposée uniforme pour simplifier. (Cette charge est positive car elle résulte de la présence des donneurs ionisés, fixes dans le réseau cristallin).
- ◇ En dehors de $[x_A, x_D]$, le matériau n'est pas modifié.

La zone $[x_A, x_D]$ est appelée **zone de déplétion** ou **zone de charge d'espace**. En résumé :

- ◇ $\rho(x) = 0$ pour $x < x_A$ et $x > x_D$;
- ◇ $\rho(x) = \rho_1$ pour $x \in [x_A, 0]$;
- ◇ $\rho(x) = \rho_2$ pour $x \in [0, x_D]$.

La largeur de la zone de déplétion est très faible devant les dimensions des blocs de semi-conducteurs. On négligera donc tout effet de bord dans les directions orthogonales au vecteur unitaire \hat{u}_x .

□ 14 — Exprimer les densités volumiques de charge ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_A , N_D et la charge élémentaire e .

□ 15 — Etablir, en la justifiant, une relation simple entre N_A , N_D , x_A et x_D .

On admet que le champ électrique dans le matériau est nul en dehors de la zone de charge d'espace. Dans le silicium, les lois de l'électrostatique s'appliquent en remplaçant ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, où $\varepsilon_r = 11,8$ est la permittivité diélectrique relative du silicium.

□ 16 — Déterminer le champ électrique $\vec{E}(x)$ en tout point de la zone de charge d'espace ($x \in [x_A, x_D]$). En précisant les valeurs remarquables sur le graphe, tracer la composante non nulle du champ en fonction de x (pour x variant sur un intervalle strictement plus grand que $[x_A, x_D]$).

Conventionnellement, l'origine des potentiels sera prise en $x = 0$.

□ 17 — En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(x)$ dans tout le matériau. Tracer $x \mapsto V(x)$ pour x variant sur un intervalle strictement plus grand que $[x_A, x_D]$. Préciser les valeurs remarquables sur le graphe.

□ 18 — Exprimer la différence de potentiel $V_0 = V(x_D) - V(x_A)$ entre deux points situés de part et d'autre de la jonction. On exprimera V_0 en fonction de e , ε , N_A , N_D , x_A et x_D .

□ 19 — Expérimentalement, on constate que $V_0 = 0,70$ V pour une jonction caractérisée par $N_A = 1,00 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $N_D = 2,00 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$. Exprimer et calculer numériquement la largeur $w = x_D - x_A$ de la zone de charge d'espace dans ce cas.

S'il reste du temps...

La jonction PN peut être polarisée par une différence de potentiel V imposée par un générateur extérieur. Dans ce cas, on admet que le modèle précédent reste valable mais :

- ◇ la différence de potentiel entre les régions N et P devient $V_0 - V$;
- ◇ les valeurs de x_A et x_D s'en trouvent modifiées.

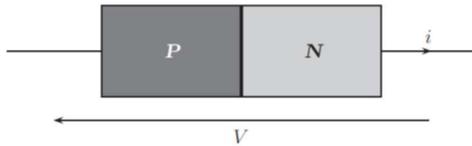


FIGURE 4 – Jonction PN polarisée par une différence de potentiel extérieure V . Les détails de la zone de déplétion n'ont pas été représentés.

□ 20 — Par une étude complète (non effectuée ici), on peut montrer que la caractéristique théorique courant-tension de la jonction est donnée par

$$i = I_s \left[\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right]$$

avec les orientations de la figure 4, et où :

- ◇ e est la charge élémentaire ;
- ◇ k_B est la constante de Boltzmann ;
- ◇ T est la température ;
- ◇ $I_s > 0$ est appelé « courant inverse de saturation ». Son amplitude, pour les calculs on prendra $1,00 \cdot 10^{-5}$ A, est habituellement négligeable dans les montages électroniques.

Pour une température donnée, représenter la caractéristique $i(V)$ de la diode en précisant les éléments remarquables sur le graphe. Préciser la valeur de V correspondant à $i = 1,00$ A à la température ambiante $T = 293$ K. Commenter ce résultat par rapport à ce qui a été vu pour la diode à vide. Que représente physiquement le facteur $k_B T$?

□ 21 — Pour justifier la dissymétrie de la caractéristique $i(V)$ de la diode, expliquer en quelques lignes les phénomènes ayant lieu dans la jonction PN :

- ◇ quand la diode est passante (cas où $i > 0$) ;
- ◇ quand la diode est bloquée (cas où $i \simeq 0$).

Dans la suite, on impose une différence de potentiel extérieure V *négative* aux bornes de la diode. La diode, bloquée dans ce cas, est dite polarisée en inverse. On posera $U = -V$, avec $U > 0$.

□ 22 — On note S la surface de la jonction PN (aire de contact des deux semi-conducteurs dopés). Exprimer les quantités de charges Q_A et Q_D respectivement stockées dans les régions $[x_A, 0]$ et $[0, x_D]$ en fonction de e , ε , S , N_A , N_D , V_0 et U . Donner les valeurs numériques de Q_A et Q_D pour $S = 1,00$ mm² et $U = 4,00$ V.

□ 23 — Lorsque U devient $U + \delta U$, où $|\delta U| \ll |U|$, les quantités de charges Q_A et Q_D sont modifiées de δQ_A et δQ_D (car la largeur de la zone de déplétion l'est). Déterminer la **capacité dynamique de jonction**, définie par :

$$C \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\delta Q_D}{\delta U}.$$

Cette capacité dépend, entre autres, de la tension U . Donner sa valeur numérique pour $U = 4,00$ V.

Notations et valeurs numériques

- ◇ permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12}$ F · m⁻¹ ;
- ◇ permittivité diélectrique relative du silicium : $\varepsilon_r \simeq 11,8$;
- ◇ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H · m⁻¹ ;
- ◇ célérité de la lumière dans le vide : $c \simeq 3,00 \cdot 10^8$ m · s⁻¹ ;
- ◇ charge électrique d'un électron : $q = -e \simeq -1,60 \cdot 10^{-19}$ C ;
- ◇ constante de Boltzmann : $k_B \simeq 1,38 \cdot 10^{-23}$ J · K⁻¹ ;
- ◇ masse d'un électron : $m \simeq 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg ;